THOMAS CALCULUS 2

ONBİRİNCİ BASKI

George B. Thomas, Jr.
Massachusetts Institute of Technology

Maurice D. Weir
Naval Postgraduate School

Joel Hass
University of California, Davis

Frank R. Giordano
Naval Postgraduate School

Çeviren: Recep Korkmaz

Beta

Yayın No : 2346
Teknik Dizisi : 145

11. Baskıdan çeviri 1. Baskı - Aralık 2010 - İSTANBUL

ISBN 978 - 605 - 377 - 369 - 6

Dizgi : Beta Basım A.Ş.
Sayfa Düzenleme : Gülgonca Çarpık
Baskı - Cilt : Kahraman Neşriyat Ofset San. Tic. Ltd. Şti. (Sertifika No: 12084)
Yüzyıl Mah. Matbaacılar Cad. Atahan No: 34 K: 4
Bağcılar/İstanbul (0-212) 629 00 01

Beta BASIM YAYIM DAĞITIM A.Ş.
Narlıbahçe Sok. Damga Binası No: 11
Cağaloğlu - İSTANBUL
Tel : (0-212) 511 54 32 - 519 01 77
Fax: (0-212) 511 36 50
www.betayayincilik.com

İÇİNDEKİLER

13 Vektör-Değerli Fonksiyonlar ve Uzayda Hareket 906

14 Kısmi Türevler 965

15 Katlı İntegraller 1067

16 Vektör Alanlarında İntegrasyon 1143

Ekler EK-1

Cevaplar C-1

İndeks İ-1

Kısa Bir İntegral Tablosu T-1

CALCULUS 1. KİTAP

4 Türev Uygulamaları 244

5 İntegrasyon 325

6 Belirli İntegrallerin Uygulamaları 396

7 Transandant Fonksiyonlar 466

Önsöz

GİRİŞ *Thomas Calculus*'un 11.basımının hazırlanmasında önceki basımların tarzını ve gücünü yakalamaya çalıştık. Amacımız, birçok kullanıcımızı ve eleştirmenimizi dikkatlice dinleyerek *Thomas Calculus*'un klasik basımlarının en iyi özelliklerini tekrar ziyeret etmek oldu. Aklımızdaki bu yüksek standartlarla, alıştırmaları yeniden kurduk ve bazı zor konuları aydınlattık. George Thomas'ın sözleri ile "Kitabı, olabileceği kadar açık ve kesin olarak yazmaya çalıştık". Ek olarak, daha mantıklı ve standart müfredat programı ile aynı hizada olması için içeriği yeniden yapılandırdık. Geriye bakmakla, mühendisler ve bilim adamları için kullanışlı ve çekici bir calculus metni hazırlamakta bize yardımcı olacak çok şey öğrendik.

On birinci basımda metin, öğrenciye sadece calculus'un yöntemlerini ve uygulamalarını değil ayrıca bir matematiksel düşünme yolu da tanıtır. Alıştırmalardan örneklere kavramları geliştiren ve teoriyi okunabilir bir lisanla açığa çıkaran anlatıma, bu kitap matematiksel fikirleri düşünme ve iletme hakkındadır. Calculus, matematiğin anahtar örneklerinden bir çoğunu içerir ve fiziksel ve matematiksel konular hakkında doğru ve mantıklı bir yolla nasıl düşünüleceğinin gerçek başlangıçlarını işaret eder

Materyale hakim olmaları ve gücünü kullanmak için gerekli matematiksel olgunluğa ulaşmaları için öğrencilere yardım etmeyi deniyoruz. Derin bir bilgiden gelen kavrayışlar gayrete değerdir. Bu kitabı tamamlayan öğrencilerin , bilimde ve mühendislikte bir çok uygulamaya calculus kavramlarını uygulamak için ihtiyaç duyulan, matematiksel lisan konusunda oldukça bilgi edinmiş olmaları gerekir. Ayrıca, diferansiyel denklemler, lineer cebir ve ileri analiz derslerine iyi bir şekilde hazırlanmış olmaları gerekir.

Onbirinci Basımdaki Değişiklikler

ALIŞTIRMALAR Alıştırmalar ve örnekler calculus öğrenmede çok önemli bir rol oynarlar. *Thomas Calculus*'un önceki basımlarında yer alan ve o basımların muazzam gücünü oluştan alıştırmalardan bir çoğunu bu yeni basıma dahil ettik. Her bölümde, hesaplamalı problemlerden uygulamalı ve teorik problemlere ilerleyen alıştırmaları konulara göre düzenledik ve grupladık. Bu düzenleme öğrencilere, calculus yöntemlerini kullanma becerilerini geliştirme ve değerlendirmelerini derinleştirmenin yanında calculus uygulamalarını ve mantıklı matematiksel yapılarını anlamaları fırsatını verir.

ÖZEN Özen seviyesi, önceki basımlarla karşılaştırıldığında baştan sona daha tutarlıdır. İkisi arasındaki farkı ortaya koymak için hem biçimsel ve hem de biçimsel olmayan tartışmaları verdik. Ayrıca, kesin tanımları ve öğrencilerin anlayabileceği ispatları dahil ettik. Metin, materiyalin gayri resmi olarak anlaşılabileceği şekilde düzenlenmiştir. Bu, öğret-

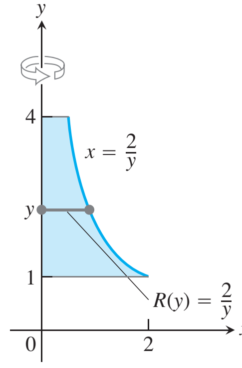
mene önemli derecede bir esneklik sağlar. Örneğin, kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli olan bir fonksiyonun bu aralıkta bir maksimumunun bulunduğunu ispat etmediğimiz halde bu teoremi çok dikkatli bir şekilde ifade ettik ve takip eden çeşitli sonuçları ispat etmek için bunu kullandık. Bundan başka, limitlerle ilgili bölüm, açıklığa ve kesinliğe karşı büyük bir dikkatle önemli ölçüde yeniden düzenlenmiştir. Önceki basımlarda olduğu gibi limit kavramı yine bir eğriye üzerindeki bir noktada teğet olan doğrunun eğimini elde etme fikri ile motive edilmektedir.

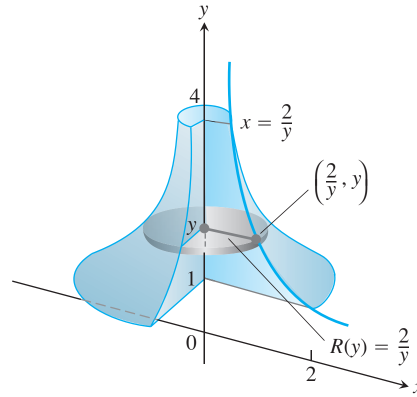
İÇERİK Bu basımın hazırlığı sırasında, *Thomas Calculus*'un önceki basımlarının kullanıcıları ve eleştirmenlerimizin önerilerine ve yorumlarına önemli ölçüde dikkat sarf ettik. Bu, bazı bölümlerde büyük revizyonlara ve değişikliklere yol açtı.

- **Önbilgiler** Bölüm 1'i, temel fonksiyonların kısa bir incelemesi olarak tekrar yazdık. Bir çok eğitimcinin bu bölümü atlamayı seçebilecek olmasına rağmen, bölüm öğrenciye kolay bir referans ve inceleme olanağı sunar, notasyonu standart hale getirir ve altyapı materyali olarak nelerin kabul edildiğine işaret eder. Ayrıca birçok öğrencinin, bir hesap makinesine veya bilgisayara bir fonksiyonun grafiğini vermesi konusunda tam olarak güvenmedeki tuzaklar gibi, görmemiş olabileceği bazı yardımcı materyal içerir.
- **Limitler** Bölüm 2'de içerilenler, limitlerin epsilon-delta tanımları, birçok teoremin ispatı, sonsuzda limitler ve sonsuz limitlerdir (ve bunların bir grafiğin asimptotları ile ilişkileri).
- **Ters türevler** Türev ve önemli uygulamalarını, bütünlüğü sağlayan ters türev kavramı ile sonuçlanan Bölüm3 ve Bölüm 4'te verdik.
- **İntegrasyon** Çeşitli sonlu toplam örneklerini tartıştıktan sonra Bölüm 5'te, eğrinin altındaki alan, geleneksel çerçevesi içinde belirli integrali tanıttık. Türevleri ve ters türevleri birbirine bağlayan Analizin Temel Teoremini işledikten sonra, integrasyon için Değişken Dönüşümü'nün yanında belirsiz integrali tanıttık. Bunları, belirli integralin uygulamaları hakkındaki alışılmış bölüm takip eder.
- **İntegrasyon Teknikleri** İntegrasyonun, sayısal integrasyonu da içeren temel teknikleri Bölüm 8'de verilmektedir. Bunlar, bir integral olarak doğal logaitmayı ve onun tersi olarak üstel fonksiyonu tanımladığımız transandant fonksiyonların tanıtımını takip etmektedirler.
- **Diferansiyel denklemler** Temel diferansiyel denklemlerin çözümleri hakkındaki materiyalin önemli kısmı, şimdi tek bir bölümde, Bölüm 9'da düzenlenmiştir. Bu düzenleme, bu konuların kavranması açısından eğitimcilere önemli ölçüde esneklik sağlar.
- **Konikler** Birçok kullanıcının isteği üzerine, konik kesitler hakkındaki Bölüm 10 tamamen yenilendi. Bu bölüm ayrıca, parabollerin, hiperbollerin ve sicloidlerin parametrizasyonlarını vererek parametrik denklemler hakkındaki materyali tamamlar.
- **Seriler** Bölüm 11'de, dokuzuncu basımda gözüken, serilerin yakınsaklık testlerinin daha bütün bir gelişimini yeniden düzenledik. Ayrıca, bölümün sonuna (atlanabilecek olan) Fourier serilerini tanıtan kısa bir bölüm ekledik.
- **Vektörler** Temel cebirsel ve geometrik fikirlerin tekrarından kaçınmak için, iki ve üç boyutlu vektörlerin işlenmesini tek bir bölümde Bölüm 12'de birleştirdik. Bu tanıtımı, düzlemde ve uzayda vektör-değerli fonksiyonlar hakkındaki bir bölüm takip etti.
- **Reel sayılar** *Calculus*'a uyglanmasından dolayı Reel sayılar teorisi hakkında kısa ve yeni bir ek yazdık

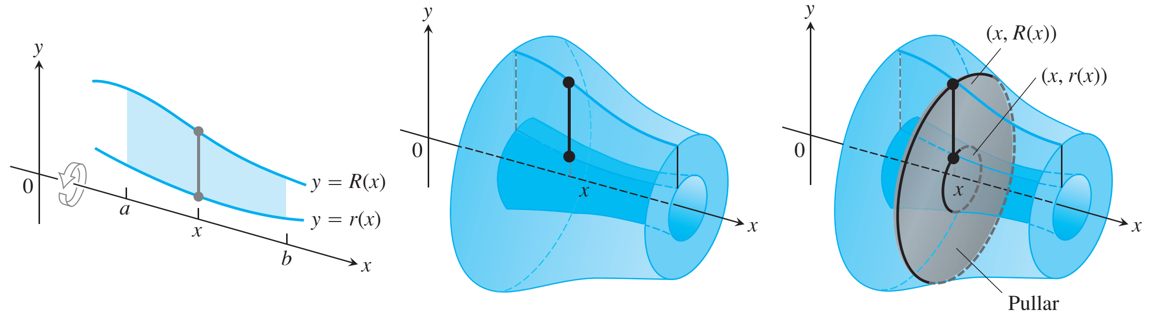
SANAT Şekillerin ve resimlerin calculus öğrenmede kritik bileşenler olduklarını fark ettik. Bu nedenle kitaptaki bütün şekillere yeni bir bakışı ele aldık. Var olan şekilleri düzenlerken ve yenilerini oluştururken, şekillerin resmettiği, ilişkilendirildikleri kavramların berraklığını geliştirmeye çalıştık. Bu, özellikle derinliği, katmanları ve döndürmeleri daha iyi belirtmeyi başarabildiğimiz üç-boyutlu grafiklerde çok açıktır (aşağıdaki şekillere bakın). Ayrıca, renklerin tutarlı ve pedagojik bir kullanımını sağlamayı denedik ve tamamlanmış parçaların düzeltilmesine kendini adamış bir ekip bir araya getirdik.

ŞEKİL 6.11, sayfa 402
(a) bölgesinin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile üretilen cismin hacminin bulunması





ŞEKİL 6.13, sayfa 403
Burada üretilen dönel cismin dik-kesiteri diskler değil pullardır.



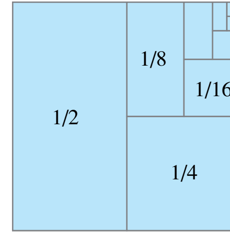
Bölüm 11

Sonsuz Diziler ve Seriler

GİRİŞ İki hatta birkaç sayının nasıl toplanacağını herkes bildiği halde sonsuz tane sayının nasıl toplanacağı o kadar açık değildir. Bu bölümde sonsuz seriler teorisinin konusu olan bu gibi soruları çalışacağız. Sonsuz serilerin toplamları bazen

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$$

toplamında olduğu gibi sonludur. Bu toplam geometrik olarak aşağıda gösterildiği gibi birim karenin daima ikiye bölünmesiyle elde edilen alanlarla temsil edilir. Küçük dikdörtgenlerin alanlarının toplamı içini doldurmuş oldukları birim karenin alanını verir. Toplanan terim sayısını arttırdıkça toplam alana daha çok yaklaşılır.



Bazı sonsuz serilerin toplamları ise

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots$$

toplamında olduğu gibi sonlu değildir. İlk birkaç terimin toplamı terim sayısı arttıkça giderek çoğalır. Yeteri kadar terim toplamakla önceden belirlenmiş herhangi bir sabit sayı aşılır.

Bazı serilerde ise,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

harmonik serisinde olduğu gibi toplamın sonlu olup olmadığı açık değildir. Toplanan terim sayısını arttırdıkça sonlu bir değere yaklaşılıp yaklaşılmadığı veya sınırsız olarak büyüyen bir toplam elde edilip edilmediği açık değildir.

Sonsuz diziler ve seriler teorisini geliştirirken, önemli bir uygulama türetilebilir bir $f(x)$ fonksiyonunu x'in kuvvetlerinin bir sonsuz toplamı olarak temsil etme metodu verir. Bu metotla polinomların nasıl hesaplandığı, türetildiği ve integre edildiği hakkındaki bilgilerimizi polinomlardan çok daha genel olan bir fonksiyonlar sınıfına genişletebiliriz. Ayrıca bir fonksiyonu sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının sonsuz bir toplamı olarak temsil etmenin bir yöntemini inceleyeceğiz. Bu yöntem fonksiyonları incelemek için güçlü bir araç verecektir.

11.1 Diziler

TARİHSEL DENEME

Diziler ve Seriler

Bir dizi verilen bir sıra ile

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots$$

gibi bir sayılar listesidir. $a_1, a_2, a_3,$ vs. her biri bir sayıyı temsil eder. Bunlar dizinin **terimleri** dir. Örneğin,

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \cdots, 2n, \cdots$$

dizisinin ilk terimi $a_1 = 2$, ikinci terimi $a_2 = 4$ ve n.terimi $a_n = 2n$ dir. n tamsayısına a_n'nin **indisi** denir ve a_n'nin listenin neresinde bulunduğunu gösterir. Genelde

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots$$

dizisini 1'i a_1'e, 2'yi a_2'ye, 3'ü a_3'e ve genel olarak pozitif n tamsayısını n.terim a_n'ye gönderen bir fonksiyon olarak düşünebiliriz. Bu, bir dizinin aşağıdaki formel tanımına yol açar.

TANIM **Sonsuz Dizi**

Bir **sonsuz sayı dizisi** tanım kümesi pozitif tamsayılar kümesi olan bir fonksiyondur.

Örneğin

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \cdots, 2n, \cdots$$

dizisi ile eşlenen fonksiyon 1'i $a_1 = 2$'ye 2'yi $a_2 = 4$'e vs. gönderir. Bu dizinin genel davranışı

$$a_n = 2n$$

formülü ile tanımlanır.

Tanım kümesini verilen bir n_0 sayısından büyük tamsayılar olarak da alabilir ve bu tipte diziler de düşünebiliriz.

$$12, 14, 16, 18, 20, 22 \dots$$

dizisi $a_n = 10 + 2n$ formülü ile tanımlanır. Bu dizi ayrıca n indisi 6 dan başlayıp artmak üzere daha basit olan $b_n = 2n$ formülü ile de tanımlanabilir. Böyle basit formüller elde edebilmek için dizinin ilk indisini herhangi bir sayı olarak alabiliriz. Yukarıdaki $\{a_n\}$ dizisi a_1 ile başlarken $\{b_n\}$ dizisi b_6 ile başlamaktadır. Sıra önemlidir. Zira 1, 2, 3, 4… dizisi 1, 2, 3, 4 … dizisi ile aynı değildir.

Diziler

$$a_n = \sqrt{n},$$

$$b_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n},$$

$$c_n = \frac{n-1}{n},$$

$$d_n = (-1)^{n+1}$$

gibi terimlerini belirten kuralları yazarak veya

$$\{a_n\} = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}, \dots\right\}$$

$$\{b_n\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \dots\right\}$$

$$\{c_n\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots\right\}$$

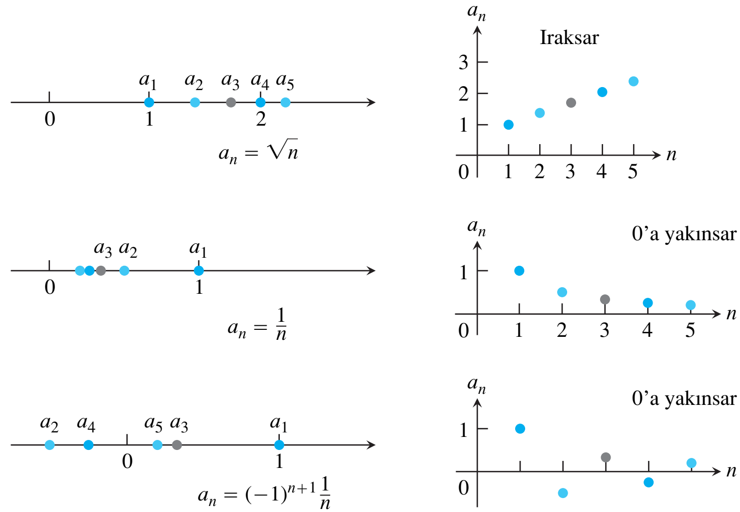
$$\{d_n\} = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots\}$$

şeklinde listelenerek tanımlanabilirler. Bazen

$$\{a_n\} = \left\{\sqrt{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

da yazarız.

Şekil 11.1, dizileri grafik olarak temsil etmenin iki yolunu göstermektedir. İlki, $a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots$ terimlerinden ilk birkaçını reel eksen üzerinde işaretler. İkinci yöntem diziyi tanımlayan fonksiyonun grafiğini gösterir. Fonksiyon sadece tamsayılarda tanımlıdır ve grafik xy-düzleminde, $(1, a_1)$, $(2, a_2)$,… (n, a_n), … noktalarına işaretlenmiş bazı noktalardan oluşur.



ŞEKİL 11.1 Diziler, reel eksen üzerinde noktalar veya yatay n-ekseni terimin indis sayısı, düşey a_n ekseni de terimin değeri olmak üzere xy-düzleminde noktalar olarak temsil edilebilirler.

Yakınsaklık ve Iraksaklık

Bazen bir dizideki sayılar, n indisi arttıkça, tek bir değere yaklaşır. n arttıkça terimleri 0'a yaklaşan

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$$

dizisinde ve terimleri 1'e yaklaşan

$$\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, 1 - \frac{1}{n}, \dots\right\}$$

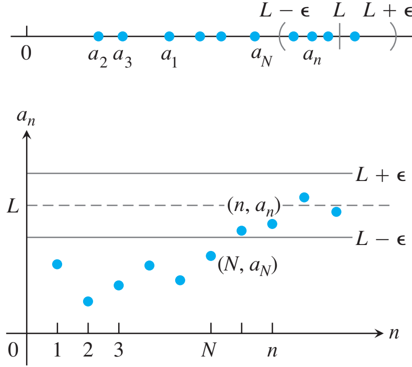
dizisinde durum böyledir. Diğer taraftan

$$\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\}$$

gibi dizilerde n indisi arttıkça herhangi bir sayıdan daha büyük olan terimler vardır. Ayrıca

$$\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}$$

gibi diziler asla tek bir değere yaklaşmadan 1 ve –1 arasında ileri geri sıçrar. Aşağıdaki tanım bir dizinin bir limit değere yakınsamasının anlamını açıklamaktadır. Tanım şunu söylemektedir: bir dizide n indisini bir N sayısından büyük alarak dizinin terimleri üzerinde yeteri kadar ilerlersek a_n ile dizinin limiti arasındaki fark önceden belirlenmiş herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısından küçük kalır.



ŞEKİL 11.2 $y = L$, $\{(n, a_n)\}$ noktalar dizisinin yatay asimptotu ise $a_n \to L$ dir. Yukarıdaki şekilde a_N'den sonraki bütün a_n'ler L'nin ε civarındadır.

TANIMLAR **Yakınsaklık, Iraksaklık, Limit**

Her pozitif ϵ sayısına

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \epsilon$$

$\{a_n\}$ dizisi L sayısına **yakınsar**. Böyle bir L sayısı mevcut değilse, $\{a_n\}$ **ıraksar** deriz.

$\{a_n\}$ dizisi L'ye yakınsıyorsa, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ veya kısaca $a_n \to L$ yazar ve L'ye dizinin **limiti** deriz (Şekil 11.2).

Tanım, x sonsuza giderken bir $f(x)$ fonksiyonunun limiti tanımına çok benzerdir (Bölüm 2.4'te $\lim_{x\to\infty} f(x)$). Dizilerin limitlerini hesaplamak için bu bağıntıyı kullanacağız.

Tarihsel Biyografi

Nicole Oresme
(1320–1382 dolaylarında)

ÖRNEK 1 Tanımı Uygulamak

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ **(b)** $\lim_{n\to\infty} k = k$ (k herhangi bir sabit)

olduğunu gösterin.

Çözüm

(a) $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$n > N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$$

gerektirmesi sağlanacak şekilde bir N tamsayısının var olduğunu göstermemiz gerekir. Yukarıdaki gerektirme, $(1/n) < \epsilon$ veya $n > 1/\epsilon$ ise geçerli olacaktır. N, $1/\epsilon$'dan daha büyük bir tamsayı ise gerektirme her $n > N$ için geçerli olur. Bu, $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$ olduğunu ispatlar.

(b) $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |k - k| < \epsilon$$

gerektirmesi sağlanacak şekilde bir N tamsayısının var olduğunu göstermemiz gerekir. $k - k = 0$ olduğundan, herhangi bir pozitif N sayısı kullanırsak gerektirme geçerli olacaktır. Bu herhangi bir k sabiti için $\lim_{n\to\infty} k = k$ olduğunu ispatlar. ■

ÖRNEK 2 Iraksak Bir Dizi

$\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}$ dizisinin ıraksadığını gösterin.

Çözüm Dizinin bir L sayısına yakınsadığını varsayın. Limit tanımında $\epsilon = 1/2$ seçerek, n indisi bir N sayısından büyük olan bütün a_n dizi terimleri L'nin $\epsilon = 1/2$ civarında bulunmaları gerekir. Dizinin diğer her terimi gibi 1 terimi tekrarlı olarak gözüktüğünden 1 sayısı L'nin $\epsilon = 1/2$ civarında bulunmalıdır. Bundan dolayı $|L - 1| < 1/2$ veya buna denk olarak $1/2 < L < 3/2$ olmalıdır. Benzer şekilde –1 sayısı da keyfi büyük indislerle tekrarlı olarak dizide gözükür. Dolayısıyla, $|L - (-1)| < 1/2$ veya buna denk olarak $-3/2 < L < -1/2$ eşitsizlikleri de ayrıca sağlanmalıdır. Fakat bu aralıklar örtüşmediklerinden L sayısı $(1/2, 3/2)$ ve $(-3/2, -1/2)$ ve aralıklarının ikisinde birden bulunamaz. Bu nedenle böyle bir L limiti yoktur ve dolayısıyla dizi ıraksar.

Şuna dikkat edin aynı düşünce sadece $1/2$ için değil 1'den küçük herhangi bir pozitif ϵ sayısı için de geçerlidir. ■

$\{\sqrt{n}\}$ dizisi de ıraksar fakat nedeni farklıdır. n indisinin artmasıyla birlikte terimleri herhangi bir sabit sayıdan daha büyük olur. Bu dizinin davranışını

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$$

yazarak tanımlarız. Bir dizinin limitini sonsuz olarak yazmakla, n arttıkça a_n ile ∞ arasındaki farkın azaldığını söylemiyoruz. Dizinin yakınsadığı bir sonsuz sayısının var olduğunu da söylemiyoruz. Sadece n arttıkça, a_n'nin sayısal olarak büyüdüğünü ve nihayetinde herhangi sabit bir sayıdan büyük kaldığını açıklayan bir notasyon kullanıyoruz.

TANIM **Sonsuza Iraksama**

Her M sayısına karşılık, N'den büyük her n için $a_n > M$ olacak şekilde bir N tamsayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi **sonsuza ıraksar** deriz. Bu şart sağlanırsa

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{veya} \qquad a_n \to \infty$$

yazarız. Benzer şekilde, her m sayısına karşılık, her $n > N$ için $a_n < m$ olacak şekilde bir N tamsayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi **eksi sonsuza ıraksar** deriz ve

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \text{veya} \qquad a_n \to -\infty$$

yazarız.

Bir dizi sonsuza veya eksi sonsuza ıraksamadan da ıraksak olabilir. Bunu Örnek 2'de gördük. Ayrıca $\{1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, \ldots\}$ ve $\{1, 0, 2, 0, 3, 0, \ldots\}$ dizileri de böyle dizilere örnektir.

Dizilerin Limitlerini Hesaplamak

Daima dizi limitinin formel tanımını, ϵ'ları ve N'leri hesaplayarak, kullanmak zorunda olsaydık dizilerin limitlerini hesaplamak zahmetli bir iş olurdu. Neyse ki birkaç basit örnek geliştirebilir ve bunları birçok dizinin limitlerinin çabucak incelenmesinde kullanabiliriz. Dizilerin nasıl birleştirilebileceklerini ve nasıl karşılaştırılabileceklerini anlamamız gerekecektir. Diziler, tanım kümeleri pozitif tamsayılar kümesine kısıtlanmış fonksiyonlar olduklarından Bölüm 2'de fonksiyon limitleri hakkındaki teoremlerin diziler için versiyonlarının olması çok şaşırtıcı değildir.

TEOREM 1

$\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ reel sayı dizileri, A ve B reel sayılar olsun. $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ve $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ ise aşağıdaki kurallar geçerlidir.

1. *Toplama Kuralı:* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$
2. *Fark Kuralı:* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$
3. *Çarpım Kuralı:* $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
4. *Sabitle Çarpım Kuralı:* $\lim_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot B$ (Herhangi bir k)
5. *Bölüm Kuralı:* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ $B \neq 0$ için

İspatı Bölüm 2.2'deki Teorem 1'in ispatına benzerdir ve atlanacaktır.

ÖRNEK 3 Teorem 1'i Uygulamak

Teorem 1'i Örnek 1'deki limitleri birleştirirsek şunları buluruz:

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1 \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = -1 \cdot 0 = 0$ — Sabitle Çarpım Kuralı ve Örnek 1a

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1 - 0 = 1$ — Fark Kuralı ve Örnek 1a

(c) $\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} = 5 \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 5 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ — Çarpım Kuralı

(d) $\lim_{n\to\infty}\frac{4 - 7n^6}{n^6 + 3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(4/n^6) - 7}{1 + (3/n^6)} = \frac{0 - 7}{1 + 0} = -7.$ — Toplama ve Bölüm Kuralı ■

Teorem 1'i uygularken dikkatli olun. Teorem, örneğin, $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizilerinin $\{a_n + b_n\}$ toplamlarının limiti varsa $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizilerinin her birinin limitinin var olduğunu söylemiyor. Meselâ $\{a_n\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ve $\{b_n\} = \{-1, -2, -3, \dots\}$ dizilerinin ikisi de ıraksaktır, fakat toplamları $\{a_n + b_n\} = \{0, 0, 0, \dots\}$ açık olarak 0'a yakınsar.

Teorem 1'in bir sonucu şudur: ıraksak bir dizinin sıfırdan farklı her katı ıraksar. Tersine, bir $c \neq 0$ için $\{ca_n\}$ dizisinin yakınsadığını varsayın. Bu durumda Teorem1'deki Sabitle Çarpım Kuralında $k = 1/c$ alarak

$$\left\{\frac{1}{c} \cdot ca_n\right\} = \{a_n\}$$

dizisinin yakınsadığını görürüz. Böylece, $\{ca_n\}$ yakınsamadıkça $\{a_n\}$ yakınsayamaz. Eğer $\{a_n\}$ yakınsamazsa $\{ca_n\}$ yakınsamaz.

Aşağıdaki teorem Bölüm 2.2'deki Sandviç Teoreminin dizi versiyonudur. Alıştırma 95'te teoremi ispatlamanız istenmektedir.

TEOREM 2 **Diziler İçin Sandviç Teoremi**

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ reel sayı dizileri olsunlar. Belirli bir N indisinden büyük her n için $a_n \leq b_n \leq c_n$ geçerliyse ve $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ ise, bu durumda $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ olur.

Teorem 2'nin hemen görülen bir sonucu, $|b_n| \leq c_n$ ve $c_n \to 0$ ise, $-c_n \leq b_n \leq c_n$ olduğundan $b_n \to 0$ olmasıdır. Aşağıdaki örnekte bunu kullanıyoruz.

ÖRNEK 4 Sandviç Teoremini Uygulamak

$1/n \to 0$ olduğunda, aşağıdakileri biliyoruz.

(a) $\dfrac{\cos n}{n} \to 0$ çünkü $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\cos n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$;

(b) $\dfrac{1}{2^n} \to 0$ çünkü $0 \leq \dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{1}{n}$;

(c) $(-1)^n \dfrac{1}{n} \to 0$ çünkü $-\dfrac{1}{n} \leq (-1)^n \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n}$. ■

Teorem 1 ve 2'nin uygulanması yakınsak bir diziye sürekli bir fonksiyonun uygulanmasının yakınsak bir dizi oluşturacağını belirten bir teoremle genişletilir. Teoremi ispatsız veriyoruz (Alıştırma 96).

TEOREM 3 Diziler İçin Sürekli Fonksiyon Teoremi
$\{a_n\}$ bir reel sayı dizisi olsun. $a_n \to L$ ve f fonksiyonu L'de sürekli ve bütün a_n'lerde tanımlı ise, $f(a_n) \to f(L)$ olur.

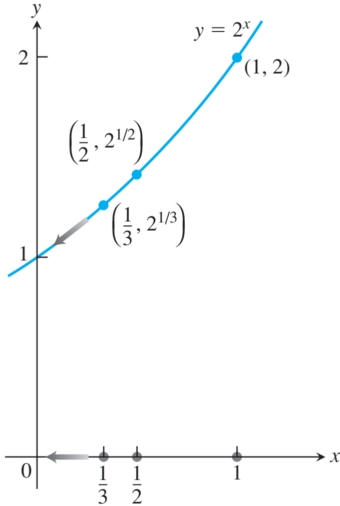


FIGURE 11.3 $n \to \infty$ iken, $1/n \to 0$ ve $2^{1/n} \to 2^0$ dır. (Örnek 6).

ÖRNEK 5 Teorem 3'ü Uygulamak

$\sqrt{(n+1)/n} \to 1$ olduğunu gösterin.

Çözüm $(n+1)/n \to 1$ olduğunu biliyoruz. Teorem 3'te $f(x) = \sqrt{x}$ ve $L = 1$ almak $\sqrt{(n+1)/n} \to \sqrt{1} = 1$ verir. ■

ÖRNEK 6 $\{2^{1/n}\}$ Dizisi

$\{1/n\}$ dizisi 0'a yakınsar. Teorem 3'te $a_n = 1/n$, $f(x) = 2^x$ ve $L = 0$ olarak, $2^{1/n} = f(1/n) \to f(L) = 2^0 = 1$ olduğunu görürüz. $\{2^{1/n}\}$ dizisi 1'e yakınsar (Şekil 11.3). ■

l'Hôpital Kuralını Kullanmak

Aşağıdaki teorem bazı dizilerin limitini bulmada l'Hôpital kuralını kullanmamızı sağlar. Teorem, $\lim_{n\to\infty} a_n$ ile $\lim_{x\to\infty} f(x)$ arasındaki bağıntıyı sağlar.

TEOREM 4
$f(x)$'in her $x \geq n_0$ için tanımlı bir fonksiyon olduğunu ve $\{a_n\}$'nin her $n \geq n_0$ için $a_n = f(n)$ olacak şekilde bir reel sayı dizisi olduğunu varsayın.
Bu durumda,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{olur.}$$

İspat $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ olduğunu varsayın. Her pozitif ϵ sayısına karşılık

$$x > M \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon$$

gerektirmesi gerçeklenecek şekilde bir M sayısı vardır.

N tamsayısı M'den büyük ve n_0 'dan büyük veya eşit olsun. Bu durumda

$$n > N \quad \Rightarrow \quad a_n = f(n) \qquad \text{ve} \qquad |a_n - L| = |f(n) - L| < \epsilon. \qquad \blacksquare$$

ÖRNEK 7 L'Hôpital Kuralını Uygulamak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0. \text{ olduğunu gösterin.}$$

Çözüm $(\ln x)/x$ fonksiyonu her $x \geq 1$ için tanımlıdır ve pozitif tamsayılarda verilen diziyle uyuşur. Dolayısıyla, Teorem 4'e göre, $\lim_{n\to\infty} (\ln n)/n$, eğer varsa $\lim_{n\to\infty} (\ln x)/x$'e eşit olacaktır. L'Hôpital kuralının bir kere uygulanışı

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

olduğunu gösterir. Buradan $\lim_{n\to\infty} (\ln n)/n = 0$ sonucunu çıkarırız. ■

Bir dizinin limitini bulmak için L'Hôpital kuralını kullanırken, genellikle n' ye sürekli bir reel değişken gibi davranır ve doğrudan n'ye göre türev alırız. Bu bizi Örnek 7'de yaptığımız gibi a_n formülünü yeniden yazmaktan kurtarır.

ÖRNEK 8 L'Hôpital Kuralını Uygulamak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n} \text{ 'yi bulun.}$$

Çözüm l'Hôpital kuralına göre (n'ye göre türev alarak)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot \ln 2}{5} \\ &= \infty \end{aligned}$$

buluruz. ■

ÖRNEK 9 Yakınsaklığı Belirlemek İçin L'Hôpital Kuralını Uygulamak

n. terimi

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$$

colan dizi yakınsar mı? Yakınsarsa, $\lim_{n\to\infty} a_n$'yi bulun.

Çözüm Limit 1^∞ belirsiz formuna götürür. Önce a_n'nin doğal logaritmasını alarak formu $\infty \cdot 0$ haline getirirsek, l'Hôpital kuralını uygulayabiliriz.

$$\begin{aligned} \ln a_n &= \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \\ &= n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right). \end{aligned}$$

Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \qquad \infty \cdot 0$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{1/n} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2/(n^2-1)}{-1/n^2} \qquad \text{l'Hôpital Kuralı}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2-1} = 2.$$

bulunur. $\ln a_n \to 2$ ve $f(x) = e^x$ sürekli olduğundan, Teorem 4

$$a_n = e^{\ln a_n} \to e^2$$

olduğunu söyler. $\{a_n\}$ dizisi e^2'ye yakınsar. ■

Sık Karşılaşılan Limitler

Aşağıdaki teorem sık sık karşılaşılan bazı limitleri vermektedir.

TEOREM 5
Aşağıdaki altı dizi karşılarında gösterilen limitlere yakınsarlar.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3. $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \qquad (x > 0)$
4. $\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad (|x| < 1)$
5. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad$ (her x için)
6. $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad$ (her x için)

(3)–(6) formüllerinde, $n \to \infty$ iken x sabit kalır.

İspat Birinci limit Örnek 7 de hesaplanmıştı. Sonraki ikisi logaritma alarak ve Teorem 4'ü uygulayarak ispatlanabilir (Alıştırma 93 ve 94). Diğer ispatlar Ek 3'te verilmiştir. ■

Faktöriyel Gösterim
$n!$ ("n faktöriyel") 1'den n'ye kadar olan tamsayıların $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ çarpımı anlamına gelir
$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ olduğuna dikkat edin. Yani
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ ve
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5 \cdot 4! = 120$ 'dir.
0!'yi 1 olarak tanımlarız. Faktöriyeller, aşağıdaki tablonun gösterdiği gibi, eksponansiyellerden bile hızlı büyürler.

n	e^n (yuvarlanmış)	$n!$
1	3	1
5	148	120
10	22,026	3,628,800
20	4.9×10^8	2.4×10^{18}

ÖRNEK 10 Teorem 5'i Uygulamak

(a) $\frac{\ln(n^2)}{n} = \frac{2\ln n}{n} \to 2 \cdot 0 = 0 \qquad$ Formül 1

(b) $\sqrt[n]{n^2} = n^{2/n} = (n^{1/n})^2 \to (1)^2 = 1 \qquad$ Formül 2

(c) $\sqrt[n]{3n} = 3^{1/n}(n^{1/n}) \to 1 \cdot 1 = 1 \qquad$ $x = 3$ ile Formül 3 ve Formül 2

(d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ $\quad x = -\frac{1}{2}$ ile Formül 4

(e) $\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{-2}{n}\right)^n \to e^{-2}$ $\quad x = -2$ ile Formül 5

(f) $\frac{100^n}{n!} \to 0$ $\quad x = 100$ ile Formül 6 ■

Tekrarlamalı Tanımlar

Şimdiye kadar, her a_n'yi doğrudan n'nin değerinden hesapladık. Ama diziler genellikle

1. Başlangıç teriminin veya terimlerinin değer(ler)i ve
2. Sonraki terimleri kendilerinden önce gelen terimlerden hesaplamak için **tekrarlama formülü** adı verilen bir kural verilerek tanımlanır.

ÖRNEK 11 Tekrarlamalı Olarak Tanımlanan Diziler

(a) $a_1 = 1$ ve $a_n = a_{n-1} + 1$ ifadeleri pozitif tamsayılardan oluşan $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ dizisini tanımlar. $a_1 = 1$ ile, $a_2 = a_1 + 1 = 2$, $a_3 = a_2 + 1 = 3$ vs. buluruz.

(b) $a_1 = 1$ ve $a_n = n \cdot a_{n-1}$ ifadeleri faktöriyellerden oluşan $1, 2, 6, 24, \ldots, n!, \ldots$ dizisini tanımlar. $a_1 = 1$ ile, $a_2 = 2 \cdot a_1 = 2$, $a_3 = 3 \cdot a_2 = 6$, $a_4 = 4 \cdot a_3 = 24$ vs. buluruz.

(c) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ ve $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ ifadeleri **Fibonacci sayıları** denen $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$ dizisini oluşturur. $a_1 = 1$ ve $a_2 = 1$ ile, $a_3 = 1 + 1 = 2$, $a_4 = 2 + 1 = 3$, $a_5 = 3 + 2 = 5$ vs. elde ederiz.

(d) Newton yöntemini uygulayarak görebileceğimiz gibi, $x_0 = 1$ ve $x_{n+1} = x_n - [(\sin x_n - x_n^2)/(\cos x_n - 2x_n)]$ ifadeleri, $\sin x - x^2 = 0$ denkleminin bir çözümüne yakınsayan bir dizi tanımlarlar.

Sınırlı Azalmayan Diziler

Genel bir dizinin terimleri, bazen büyüyerek bazen de küçülerek, sıçramalar yapabilir. Dizilerin önemli özel bir çeşidi, her bir terimin en az kendisinden önceki kadar büyük olduğu dizilerdir.

TANIM **Azalmayan Diziler**

Her n için $a_n \le a_{n+1}$ özelliğini taşıyan bir $\{a_n\}$ dizisine **azalmayan dizi** denir.

ÖRNEK 12 Azalmayan Diziler

(a) Doğal sayılardan oluşan $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ dizisi.

(b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ dizisi

(c) Sabit $\{3\}$ dizisi ■

İki tür azalmayan dizi vardır—terimleri herhangi sonlu bir sınırı aşan diziler ve aşmayanlar.

TANIMLAR Sınırlı, Üst Sınır, En Küçük Üst Sınır

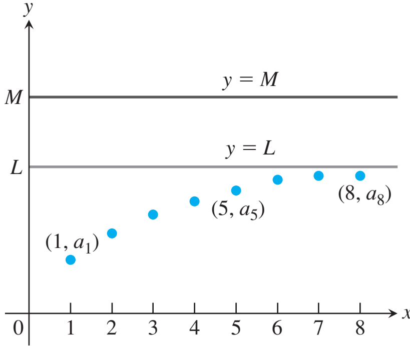
Her n için $a_n \leq M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi üstten sınırlıdır. M sayısı $\{a_n\}$ için bir üst sınırdır. M sayısı $\{a_n\}$ 'nin bir üst sınırı ise ve M'den daha küçük bir sayı $\{a_n\}$ için bir üst sınır olamıyorsa M sayısı $\{a_n\}$'nin en küçük üst sınırıdır.

ÖRNEK 13 Sınırlılık Tanımını Uygulamak

(a) 1, 2, 3, …, n, … dizisinin bir üst sınırı yoktur.

(b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ dizisi üstten $M = 1$ ile sınırlıdır.

1'den daha küçük bir sayı dizinin bir üst sınırı olamaz, dolayısıyla 1 en küçük üst sınırdır (Alıştırma 113). ■



ŞEKİL 11.4 Azalmayan bir dizinin terimlerinin bir M üst sınırı varsa, limitleri $L \leq M$ olur.

Üstten sınırlı azalmayan bir dizinin her zaman bir en küçük alt sınırı vardır. Bu reel sayıların, Ek 4'te incelenen, tamlık özelliğinin bir sonucudur. L en küçük üst sınırsa, dizinin L'ye yakınsadığını ispatlayacağız.

$(1, a_1), (2, a_2), \ldots, (n, a_n), \ldots$ noktalarını xy-düzleminde işaretlediğimizi varsayın. M dizinin bir üst sınırı ise bütün bu noktalar $y = M$ doğrusu üstünde veya aşağısında bulunacaklardır (Şekil 11.4). $y = L$ doğrusu bu tip doğruların en altta bulunanıdır. (n, a_n) noktalarının hiçbiri $y = L$'nin üzerinde bulunmaz, fakat bazıları, ϵ pozitif bir sayı olmak üzere, daha alttaki bir $y = L - \epsilon$ doğrusunun yukarısında bulunurlar. Dizi L'ye yakınsar, çünkü

(a) n'nin bütün değerleri için $a_n \leq L$'dir ve

(b) $\epsilon > 0$ ise, $a_N > L - \epsilon$ olacak şekilde en azından bir N tamsayısı vardır.

$\{a_n\}$'nin azalmayan bir dizi olması bize ayrıca

$$\text{her } n \geq N \text{ için} \qquad a_n \geq a_N > L - \epsilon$$

olduğunu söyler. Yani, N inci sayıdan büyük *bütün* a_n sayıları L'nin ϵ civarında bulunurlar. Bu da L'nin $\{a_n\}$ dizisinin limiti olma koşuludur.

Azalmayan dizilerin özellikleri aşağıdaki teoremde özetlenmiştir. Artmayan diziler için de benzer bir sonuç geçerlidir (Alıştırma 107).

TEOREM 6 Azalmayan Dizi Teoremi

Reel sayılardan oluşan azalmayan bir dizi, ancak ve yalnız üstten sınırlı ise yakınsar. Azalmayan bir dizi yakınsıyorsa, en küçük üst sınırına yakınsar.

Teorem 6, üstten sınırlı azalmayan bir dizinin yakınsak olmasını gerektirir. Dizi üstten sınırlı değilse sonsuza ıraksar.

ALIŞTIRMALAR 11.1

Bir Dizinin Terimlerini Bulmak

1–6 alıştırmalarının her birinde bir $\{a_n\}$ dizisinin n. terimi a_n'nin formülü verilmektedir. a_1, a_2, a_3 ve a_4'ün değerlerini bulun.

1. $a_n = \frac{1-n}{n^2}$

2. $a_n = \frac{1}{n!}$

3. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

4. $a_n = 2 + (-1)^n$

5. $a_n = \frac{2^n}{2^{n+1}}$

6. $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$

7–12 alıştırmalarının her birinde dizinin ilk terimi veya ilk iki terimi ile birlikte bir tekrarlama formülü verilmektedir. Dizinin ilk on terimini yazın.

7. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (1/2^n)$

8. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n/(n+1)$

9. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = (-1)^{n+1}a_n/2$

10. $a_1 = -2, \quad a_{n+1} = na_n/(n+1)$

11. $a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

12. $a_1 = 2, \quad a_2 = -1, \quad a_{n+2} = a_{n+1}/a_n$

Bir Dizinin Formülünü Bulmak

13–22 alıştırmalarındaki dizilerin n. teriminin formülünü bulun.

13. 1, –1, 1, –1, 1, … dizisi — Değişen işaretli 1'ler

14. –1, 1, –1, 1, –1, … dizisi — Değişen işaretli 1'ler

15. 1, –4, 9, –16, 25, … dizisi — Pozitif tamsayıların kareleri, işaretleri değişiyor.

16. $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$ dizisi — Pozitif tamsayıların karelerinin tersleri, işaretleri değişiyor.

17. 0, 3, 8, 15, 24, … dizisi — Pozitif tamsayıların karelerinden 1 çıkartılmış

18. –3, –2, –1, 0, 1, … dizisi — –3'ten başlayan tamsayılar

19. 1, 5, 9, 13, 17, … dizisi — Her ikinci tek tamsayı

20. 2, 6, 10, 14, 18, … dizisi — Her ikinci çift tamsayı

21. 1, 0, 1, 0, 1, … dizisi — Sırayla değişen1'ler ve 0'lar

22. 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, … dizisi — Her tamsayının tekrarlanması

Limit Bulmak

23–81 alıştırmalarındaki $\{a_n\}$ dizilerinden hangileri yakınsar, hangileri ıraksar? Her yakınsak dizinin limitini bulun.

23. $a_n = 2 + (0.1)^n$

24. $a_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$

25. $a_n = \frac{1-2n}{1+2n}$

26. $a_n = \frac{2n+1}{1 - 3\sqrt{n}}$

27. $a_n = \frac{1 - 5n^4}{n^4 + 8n^3}$

28. $a_n = \frac{n+3}{n^2 + 5n + 6}$

29. $a_n = \frac{n^2 - 2n + 1}{n - 1}$

30. $a_n = \frac{1 - n^3}{70 - 4n^2}$

31. $a_n = 1 + (-1)^n$

32. $a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

33. $a_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

34. $a_n = \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)\left(3 + \frac{1}{2^n}\right)$

35. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

36. $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

37. $a_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$

38. $a_n = \frac{1}{(0.9)^n}$

39. $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$

40. $a_n = n\pi \cos(n\pi)$

41. $a_n = \frac{\sin n}{n}$

42. $a_n = \frac{\sin^2 n}{2^n}$

43. $a_n = \frac{n}{2^n}$

44. $a_n = \frac{3^n}{n^3}$

45. $a_n = \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$

46. $a_n = \frac{\ln n}{\ln 2n}$

47. $a_n = 8^{1/n}$

48. $a_n = (0.03)^{1/n}$

49. $a_n = \left(1 + \frac{7}{n}\right)^n$

50. $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

51. $a_n = \sqrt[n]{10n}$

52. $a_n = \sqrt[n]{n^2}$

53. $a_n = \left(\frac{3}{n}\right)^{1/n}$

54. $a_n = (n+4)^{1/(n+4)}$

55. $a_n = \frac{\ln n}{n^{1/n}}$

56. $a_n = \ln n - \ln(n+1)$

57. $a_n = \sqrt[n]{4^n n}$

58. $a_n = \sqrt[n]{3^{2n+1}}$

59. $a_n = \frac{n!}{n^n}$ (*İpucu:* $1/n$ ile karşılaştırın.)

60. $a_n = \dfrac{(-4)^n}{n!}$

61. $a_n = \dfrac{n!}{10^{6n}}$

62. $a_n = \dfrac{n!}{2^n \cdot 3^n}$

63. $a_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1/(\ln n)}$

64. $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

65. $a_n = \left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^n$

66. $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

67. $a_n = \left(\dfrac{x^n}{2n+1}\right)^{1/n}, \quad x > 0$

68. $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

69. $a_n = \dfrac{3^n \cdot 6^n}{2^{-n} \cdot n!}$

70. $a_n = \dfrac{(10/11)^n}{(9/10)^n + (11/12)^n}$

71. $a_n = \tanh n$

72. $a_n = \sinh(\ln n)$

73. $a_n = \dfrac{n^2}{2n-1}\sin\dfrac{1}{n}$

74. $a_n = n\left(1 - \cos\dfrac{1}{n}\right)$

75. $a_n = \tan^{-1} n$

76. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\tan^{-1} n$

77. $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{1}{\sqrt{2^n}}$

78. $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$

79. $a_n = \dfrac{(\ln n)^{200}}{n}$

80. $a_n = \dfrac{(\ln n)^5}{\sqrt{n}}$

81. $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

82. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+n}}$

83. $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^n \dfrac{1}{x}\,dx$

84. $a_n = \displaystyle\int_1^n \dfrac{1}{x^p}\,dx, \quad p > 1$

Teori ve Örnekler

85. Bir dizinin ilk terimi $x_1 = 1$'dir. Birbirini izleyen her terim kendinden önce gelen terimlerin toplamıdır:

$$x_{n+1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Dizi ilk terimlerinden yeteri kadarını yazarak, x_n için $n \geq 2$ değerlerinde geçerli olacak genel bir formül yazın.

86. Bir rasyonel sayı dizisi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \ldots, \frac{a}{b}, \frac{a+2b}{a+b}, \ldots$$

Burada paylar bir dizi, paydalar ikinci bir dizi ve bunların oranları üçüncü bir dizi oluşturur. x_n ve y_n sırasıyla n. kesir $r_n = x_n/y_n$'nin pay ve paydası olsun.

a. $x_1^2 - 2y_1^2 = -1, x_2^2 - 2y_2^2 = +1$ ve daha genel olarak, $a^2 - 2b^2 = -1$ veya $+1$ ise sırasıyla

$$(a + 2b)^2 - 2(a + b)^2 = +1 \quad \text{veya} \quad -1$$

olduğunu doğrulayın.

b. $r_n = x_n/y_n$ kesirleri n arttıkça bir limite yaklaşır. Bu limit nedir? (*İpucu*: $r_n^2 - 2 = \pm(1/y_n)^2$ olduğunu ve y_n'nin n'den küçük olmadığını göstermek için (*a*) şıkkını kullanın.

87. Newton yöntemi Aşağıdaki diziler Newton yönteminin

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

tekrarlamalı formülünden gelirler. Diziler yakınsar mı? Yakınsarlarsa, hangi değere yakınsarlar? Her durumda, işe diziyi üreten f fonksiyonunu tanımlayarak başlayın.

a. $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}$

b. $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{\tan x_n - 1}{\sec^2 x_n}$

c. $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - 1$

88. a. $f(x)$'in $[0, 1]$ aralığındaki her x için türetilebildiğini ve $f(0) = 0$ olduğunu varsayın. $a_n = nf(1/n)$ kuralıyla $\{a_n\}$ dizisini tanımlayın. $\lim_{n\to\infty} a_n = f'(0)$ olduğunu gösterin.

(a) şıkkındaki sonucu kullanarak aşağıdaki $\{a_n\}$ dizilerinin limitlerini bulun.

b. $a_n = n\tan^{-1}\dfrac{1}{n}$

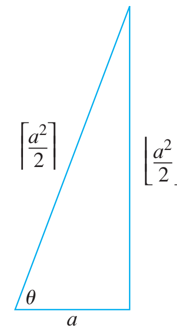
c. $a_n = n(e^{1/n} - 1)$

d. $a_n = n\ln\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)$

89. Pisagor üçlüleri $a^2 + b^2 = c^2$ ise, a, b ve c'den oluşan bir pozitif tamsayılar üçlüsüne **Pisagor üçlüsü** denir. a bir tek tamsayı ve

$$b = \left\lfloor \frac{a^2}{2} \right\rfloor \quad \text{ve} \quad c = \left\lceil \frac{a^2}{2} \right\rceil$$

sırasıyla $a^2/2$'nin tamsayı taban ve tavanları olsun.



a. $a^2 + b^2 = c^2$ olduğunu gösterin (*İpucu: $a = 2n + 1$* alın ve b ile c'yi n cinsinden ifade edin.)

b. Doğrudan hasaplayarak, veya şekle bakarak, aşağıdaki limiti bulun

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\left\lfloor \frac{a^2}{2} \right\rfloor}{\left\lceil \frac{a^2}{2} \right\rceil}.$$

90. $n!$'in n. kökü

a. $\lim_{n\to\infty}(2n\pi)^{1/(2n)} = 1$ ve buradan Stirling yaklaşımını kullanarak (Bölüm 8, Ek Alıştırma 50a)

n'nin büyük değerleri için $\sqrt[n]{n!} \approx \dfrac{n}{e}$ olduğunu gösterin.

T **b.** (a) şıkkındaki yaklaşımı $n = 40, 50, 60, \ldots$, hesap makinenizin izin verdiği kadar ilerleyerek hesaplayın.

91. a. c herhangi bir pozitif sabit olmak üzere, $\lim_{n\to\infty}(1/n^c) = 0$ olduğunu varsayarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^c} = 0$$

olduğunu gösterin.

b. c pozitif bir sabit ise, $\lim_{n\to\infty}(1/n^c) = 0$ olduğunu ispatlayın. (*İpucu*: $\epsilon = 0.001$ ve $c = 0.04$ ise, $n > N$ iken $\left|1/n^c - 0\right| < \epsilon$ olmasını sağlamak için N ne kadar büyük olmalıdır?)

92. Fermuar teoremi Dizileri için "fermuar" teoremini ispatlayın: $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ 'nin ikisi de L'ye yakınsıyorsa:

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$$

dizisi de L'ye yakınsar.

93. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ olduğunu ispatlayın.

94. $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1, (x > 0)$ olduğunu ispatlayın.

95. Teorem 2'yi ispatlayın.

96. Teorem 3'ü ispatlayın.

97–100 alıştırmalarında, dizinin azalmayan olup olmadığını ve üstten sınırlı olup olmadığını belirleyin.

97. $a_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$

98. $a_n = \dfrac{(2n+3)!}{(n+1)!}$

99. $a_n = \dfrac{2^n 3^n}{n!}$

100. $a_n = 2 - \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{2^n}$

101–106 alıştırmalarındaki dizilerden hangileri yakınsaktır, hangileri ıraksaktır? Yanıtlarınızı açıklayın.

101. $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

102. $a_n = n - \dfrac{1}{n}$

103. $a_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$

104. $a_n = \dfrac{2^n - 1}{3^n}$

105. $a_n = ((-1)^n + 1)\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

106. Bir dizinin ilk terimi $x_1 = \cos(1)$'dir. Bunu izleyen terimler, $x_2 = x_1$ veya $\cos(2)$, hangisi daha büyükse, ve $x_3 = x_2$ veya $\cos(3)$, hangisi daha büyükse, (sağa doğru bu şekilde devam eder) dir. Genel olarak,

$$x_{n+1} = \max\{x_n, \cos(n+1)\}$$

ile verilir.

107. Artmayan diziler Her n için $a_n \geq a_{n+1}$ olan bir $\{a_n\}$ sayı dizisine **artmayan dizi** denir. Her n için $M \leq a_n$ olacak şekilde bir M sayısı bulunabiliyorsa, $\{a_n\}$ dizisi **alttan sınırlı**dır. Böyle bir M sayısına dizinin **alt sınırı** denir. Teorem 6'dan alttan sınırlı artmayan bir dizinin yakınsadığını ve alttan sınırlı olmayan artmayan bir dizinin ıraksadığını çıkarın.

(*Alıştırma 107'nin devamı*) Alıştırma 107'nin sonucunu kullanarak, 108–112 alıştırmalarındaki dizilerin hangilerinin yakınsadığını, hangilerinin ıraksadığını belirleyin.

108. $a_n = \dfrac{n+1}{n}$

109. $a_n = \dfrac{1+\sqrt{2n}}{\sqrt{n}}$

110. $a_n = \dfrac{1-4^n}{2^n}$

111. $a_n = \dfrac{4^{n+1}+3^n}{4^n}$

112. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n - 3$

113. $\{n/(n+1)\}$ dizisinin en küşük üst sınırı 1'dir. M 1'den küçük bir sayıysa, $\{n/(n+1)\}$'in terimlerinin eninde sonunda M'yi aşacağını gösterin. Yani, $M < 1$ ise, herhangi bir $n > N$ için $n/(n+1) > M$ olacak şekilde bir N tamsayısı vardır. Her n için, $n/(n+1) < 1$ olduğundan, bu 1'in $\{n/(n+1)\}$ için en küçük alt sınır olduğunu ispatlar.

114. En küçük üst sınırların tekliği M_1 ve M_2 $\{a_n\}$ dizisinin en küçük üst sınırları ise, $M_1 = M_2$ olduğunu gösterin. Yani, bir dizinin iki farklı en küçük üst sınırı olamaz.

115. Pozitif sayılardan oluşan bir $\{a_n\}$ dizisinin, üstten sınırlıysa, yakınsayacağı doğru mudur? Yanıtınızı açıklayın.

116. $\{a_n\}$ yakınsak bir diziyse, her pozitif ϵ sayısına karşılık,

$$m > N \text{ ve } n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon$$

gerektirmesi sağlanacak şekilde bir N tamsayısı bulunabileceğini gösterin.

117. Limitlerin tekliği Dizilerin limitlerinin tek olduğunu ispatlayın. Yani, L_1 ve L_2, $a_n \to L_1$ ve $a_n \to L_2$ olacak şekilde iki sayı ise $L_1 = L_2$ olduğunu gösterin.

118. Limitler ve alt diziler Bir dizinin terimleri verilen sıralarıyla başka bir dizinin içinde yer alıyorlarsa, ilk diziye ikinci dizinin **alt dizisi** deriz. Bir $\{a_n\}$ dizisinin iki alt dizisinin farklı $L_1 \neq L_2$ limitleri varsa, $\{a_n\}$'nin ıraksadığını ispatlayın.

119. Bir $\{a_n\}$ dizisi için, çift indisli terimler a_{2k}, tek indisli terimler a_{2k+1} ile gösterilmektedir. $a_{2k} \to L$ ve $a_{2k+1} \to L$ ise, $a_n \to L$ olduğunu ispatlayın.

120. Bir $\{a_n\}$ dizisi için ancak ve yalnız $\{|a_n|\}$ mutlak değerler dizisi 0'a yakınsarsa, dizinin 0'a yakınsayacağını gösterin.

Limitlerin Hesap Makinesiyle Araştırılması

121–124 alıştırmalarında, eşitsizliğin her $n > N$ için geçerli olmasını sağlayacak bir N değeri bulmak için hesap makinesiyle deneyler yapın. Eşitsizliğin limitin formel tanımının bir ifadesi olduğunu varsayarsanız, her durumda hangi dizi ele alınmaktadır ve limiti nedir?

121. $|\sqrt[n]{0.5} - 1| < 10^{-3}$ **122.** $|\sqrt[n]{n} - 1| < 10^{-3}$

123. $(0.9)^n < 10^{-3}$ **124.** $2^n/n! < 10^{-7}$

125. Newton yöntemiyle üretilen diziler Türetilebilen bir $f(x)$ fonksiyonuna uygulanan Newton yöntemi bir x_0 başlangıç değeriyle başlar ve bundan uygun koşullarda f'nin bir sıfırına yakınsayan bir $\{x_n\}$ dizisi üretir. Dizinin tekrarlama formülü şöyledir:

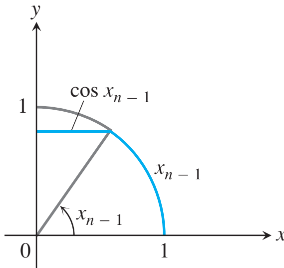
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

a. $f(x) = x^2 - a,\ a > 0$ için tekrarlama formülünün $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$ olarak yazılabileceğini gösterin.

b. $x_0 = 1$ ve $a = 3$ ile başlayarak, sayılar tekrar etmeye başlayıncaya kadar dizinin birbirini izleyen terimlerini hesaplayın. Hangi sayıya yaklaşılmaktadır. Açıklayın.

126. (*Alıştırma 125'in devamı.*) Alıştırma 125'in (b) şıkkını $a = 3$ yerine $a = 2$ alarak tekrarlayın.

127. $\pi/2$'nin tekrarlamalı bir tanımı $x_1 = 1$ ile başlar ve $\{x_n\}$'nin birbirini izleyen terimlerini $x_n = x_{n-1} + \cos x_{n-1}$ kuralı ile tanımlarsanız, hızla $\pi/2$'ye yakınsayan bir dizi üretirsiniz. **a.** Deneyin. **b.** Aşağıdaki şekli kullanarak yakınsamanın neden bu kadar hızlı olduğunu açıklayın.



128. *The Wall Street Journal*'ın 15 Aralık 1992 tarihli sayısının kapak makalesine göre, Ford Motor Şirketi, ortalama bir aracın kalıplarını hazırlamak için, 1980'deki tahmini 15 saatten düşük olarak $7\frac{1}{4}$ iş saati harcamaktadır. Japonlar ise $3\frac{1}{2}$ saatte bunu yapmaktadırlar.

Ford'un 1980'den beri gösterdiği ilerleme yılda ortalama %6'lık bir azalma gösterir. Bu oran sürekli olursa, n yıl sonra Ford ortalama bir aracın kalıpları için yaklaşık

$$S_n = 7.25(0.94)^n$$

saat harcayacaktır. Japonların araç başına $3\frac{1}{2}$ saat harcamaya devam ettiklerini varsayarsak, Ford'un onlara yetişmesi kaç yıl sürer? Bunu iki yolla bulun:

a. $\{S_n\}$ dizisinin 3.5'tan küçük veya ona eşit ilk terimini bulun.

b. $f(x) = 7.25(0.94)^x$'in grafiğini çizin ve Trace kullanarak grafiğin $y = 3.5$ doğrusunu nerede kestiğini bulun.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

129-140 alıştırmalarındaki dizilere aşağıdaki adımları uygularken bir BCS kullanın.

a. Dizinin ilk yirmibeş terimini hesaplayın ve işaretleyin. Dizinin alttan veya üstten bir sınırı var gibi gözükmekte midir? Size yakınsar gibi mi, yoksa ıraksar gibi mi görünmektedir? Yakınsıyorsa, L limiti nedir?

b. Dizi yakınsıyorsa, $n \geq N$ için $|a_n - L| \leq 0.01$ olacak şekilde bir N tamsayısı bulun. Hangi adımdan sonra terimlerle L arasındaki uzaklık 0.0001'den küçük kalır?

129. $a_n = \sqrt[n]{n}$ **130.** $a_n = \left(1 + \frac{0.5}{n}\right)^n$

131. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{5^n}$

132. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (-2)^n$

133. $a_n = \sin n$ **134.** $a_n = n \sin \frac{1}{n}$

135. $a_n = \frac{\sin n}{n}$ **136.** $a_n = \frac{\ln n}{n}$

137. $a_n = (0.9999)^n$ **138.** $a_n = 123456^{1/n}$

139. $a_n = \frac{8^n}{n!}$ **140.** $a_n = \frac{n^{41}}{19^n}$

141. Bileşik faizler, yatırma ve çekmeler A_0 miktarında parayı yılda m kere birleştirilen belirli bir yıllık r faiziyle yatırırsanız ve her birleştirme periyodunun sonunda hesaba sabit bir b miktarı eklenirse (veya $b < 0$ ise çekilirse), $n + 1$ katma periyodundan sonra elinize geçecek para

$$A_{n+1} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)A_n + b \tag{1}$$

olacaktır.

a. $A_0 = 1000$, $r = 0.02015$, $m = 12$ ve $b = 50$ ise, ilk 100 (n, A_n) noktasını hesaplayın ve çizin. 5 yıl sonra hesabınızda ne kadar para olur? $\{A_n\}$ yakınsar mı? $\{A_n\}$ sınırlı mıdır?

b. (a) şıkkını $A_0 = 5000$, $r = 0.0589$, $m = 12$ ve $b = -50$ ile tekrarlayın.

c. Dört ayda bir birleştirilen ve yıllık %4.5 veren bir mevduat hesabına (MH) 5000 dolar yatırır ve MH'ye daha fazla katkıda bulunmazsanız, 20.000 dolarınız olana kadar yaklaşık kaç yıl geçer? Ya, MH yılda %6.25 veriyorsa?

d. Herhangi bir $k \geq 0$ için, (1) denklemiyle tekrarlanarak tanımlanan dizinin

$$A_k = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^k \left(A_0 + \frac{mb}{r}\right) - \frac{mb}{r} \tag{2}$$

bağıntısını sağladığı gösterilebilir. A_0, r, m ve b sabitlerinin (a) şıkkında verilen değerleri için, iki dizinin de ilk 50 teriminin değerlerini karşılaştırarak bunun doğruluğunu gösterin. Sonra, doğrudan yerine koyarak, (2) denklemindeki terimlerin, tekrarlama formülü (1)'i sağladığını gösterin.

142. Lojistik fark denklemi

$$a_{n+1} = ra_n(1 - a_n)$$

tekrarlama bağıntısına *lojistik fark denklemi* denir ve başlangıç değeri a_0 verildiğinde, denklem $\{a_n\}$ *lojistik dizisini* tanımlar. Bu alıştırmada a_0'ı $0 < a_0 < 1$ aralığında, mesela $a_0 = 0.3$, seçeceğiz.

a. $r = 3/4$ alın. Dizideki ilk 100 terim için (n, a_n) noktalarını hesaplayıp işaretleyin. Dizi yakınsıyor gibi midir? Sizce limit nedir? Limit a_0 seçiminize bağlı mıdır?

b. $1 < r < 3$ aralığında birkaç r değeri seçerek, (a) şıkkındaki işlemleri tekrarlayın. Aralığın uç noktalarına yakın bazı noktalar seçtiğinizden emin olun. Çizimlerinizde gözlediğiniz dizilerin davranışını tanımlayın.

c. Şimdi r'nin $3 < r < 3.45$ aralığının uç noktalarına yakın değerlerinde dizinin hareketini inceleyin. $r = 3$ değerine **çatallanma değeri** denir ve dizinin aralıktaki davranışına **çekici 2'li-döngü** adı verilir. Bunun davranışı neden mantıklı olarak tanımladığını açıklayın.

d. Sonra r'nin $3.45 < r < 3.54$ ve $3.54 < r < 3.55$ aralıklarının her birinde uç noktalara yakın değerleri için davranışı araştırın. Dizinin ilk 200 terimini işaretleyin. Kendi kelimelerinizle, çizimlerinizde her aralık için gözlediğiniz davranışı tanımlayın. Dizi her aralıkta kaç değer arasında salınmaktadır? $r = 3.45$ ve $r = 3.54$ (2 ondalık basamağa yuvarlanmış) değerlerine de çatallanma değerleri denir, çünkü r bu değerleri aşarken dizinin davranışı değişir.

e. Durum daha da ilginçleşir. Gerçekte, bir $3 < 3.45 < 3.54 < \cdots < c_n < c_{n+1} \cdots$ çatallanma değerleri dizisi bulunur, öyle ki $c_n < r < c_{n+1}$ için $\{a_n\}$ lojistik dizisi **çekici 2^n-döngüsü** adı verilen 2^n değerleri arasında salınır. Dahası, $\{c_n\}$ çatallanma dizisi yukarıdan 3.57 ile sınırlıdır (yani yakınsar). Bir $r < 3.57$ değeri seçerseniz, bir çeşit 2^n-döngüsü gözlersiniz. $r = 3.5695$ seçin ve 300 nokta işaretleyin.

f. $r > 3.57$ olduğunda neler olacağına bakalım. $r = 3.65$ seçin ve $\{a_n\}$'nin ilk 300 terimini hesaplayıp, işaretleyin. Terimlerin nasıl tahmin edilemez, kaotik bir şekilde dolaştığına dikkat edin. a_{n+1}'in değerini a_n'nin değerinden bulamazsınız.

g. $r = 3.65$ için, birbirine yakın iki a_0 başlangıç değeri seçin, örneğin $a_0 = 0.3$ ve $a_0 = 0.301$. Her başlangıç değeriyle belirlenen dizilerin ilk 300 terimini hesaplayıp işaretleyin. Çizimlerinizde gözlediğiniz davranışları karşılaştırın. İki dizide de aynı indisli terimlerin birbirinden uzaklaşması için kaç terim ileri gitmeniz gerekir? Araştırmayı $r = 3.75$ için tekrarlayın. Çizimlerinizin a_0 seçiminize göre nasıl farklılık gösterdiklerini görebiliyor musunuz? Lojistik dizi *başlangıç koşulu a_0'a duyarlıdır* deriz.

11.2 Sonsuz Seriler

Bir *sonsuz seri*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

gibi bir sonsuz sayı dizisinin toplamıdır. Bu bölümün amacı böyle bir sonsuz toplamın anlamını kavramak ve bunu hesaplama yöntemleri geliştirmektir. Bir sonsuz seride toplanması gereken sonsuz tane terim bulunduğundan ne elde edildiğini görmek için sadece toplamayı sürdürmekle kalamayız. Bunun yerine, dizinin ilk n terimini toplamak ve orada durmakla ne elde ettiğimize bakarız. İlk n terimin toplamı

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

sıradan sonlu bir toplamdır ve normal toplama ile hesaplanabilir. Buna *n. kısmi toplam* denir. Bölüm 11.1 de açıklanan, bir dizinin terimlerinin bir limite yaklaşması gibi, n büyüdükçe kısmi toplamların giderek bir limit değere yaklaşmasını bekleriz.

Örneğin,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

gibi bir ifadeye bir anlam yüklemek için başlangıçtan itibaren her defasında bir terim toplar ve bu kısmi toplamların nasıl büyüdüklerine ilişkin bir kalıp ararız.

Kısmi toplam		**Kısmi toplam için önerilen ifade**	**Değer**
Birinci:	$s_1 = 1$	$2 - 1$	1
İkinci:	$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$	$2 - \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
Üçüncü:	$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$2 - \frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$
⋮	⋮	⋮	⋮
$n.$:	$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$	$2 - \frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$

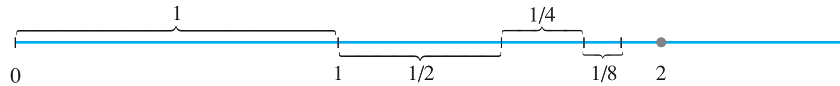
Gerçekten de bir kalıp vardır. Kısmi toplamlar $n.$ terimi

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

olan bir dizi oluştururlar. Bu dizi 2'ye yakınsar, çünkü $\lim_{n\to\infty}(1/2^n) = 0$'dır.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots \quad \text{sonsuz serisinin toplamı 2'dir}$$

deriz. Bu serinin içindeki herhangi bir sonlu toplam 2'ye eşit midir? Hayır. Sonsuz sayıda terimi gerçekten bir bir toplayabilir miyiz? Hayır. Ama yine de toplamlarını $n \to \infty$ iken kısmi toplamlar dizisinin limiti olarak tanımlayabiliriz, bu durumda 2 (Şekil 11.5). Diziler ve limitler hakkındaki bilgilerimiz sonlu toplamlar çerçevesinden dışarıya çıkmamızı sağlar.



ŞEKİL 11.5 $1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$ uzunlukları bir bir toplanırken, toplam 2'ye yaklaşır.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Blaise Pascal
(1623–1662)

TANIMLAR **Sonsuz Seriler, n.inci Terim, Kısmi Toplam, Yakınsar, Toplam**

Bir $\{a_n\}$ sayı dizisi verilmiş olsun.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

şeklindeki bir ifadeye bir **sonsuz seri** denir. a_n sayısı serinin ***n*. terimi**dir.

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

ile tanımlanan $\{s_n\}$ dizisine serinin **kısmi toplamlar dizisi** denir. s_n sayısı ***n*. kısmi toplam** dır. Kısmi toplamlar dizisi bir L limitine yakınsıyorsa, seri **yakınsaktır** der ve **toplamının** L olduğunu söyleriz. Bu durumda, ayrıca

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

yazarız. Serinin kısmi toplamlar dizisi yakınsamıyorsa, seri **ıraksaktır** deriz.

Verilen bir $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ serisini incelerken, yakınsadığını veya ıraksadığını bilmeyebiliriz. Her iki durumda da serileri

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{veya} \qquad \sum a_n$$

1'den ∞'a kadar toplam anlaşıldığında yararlı bir kısaltma

şeklinde yazmak için sigma gösterimini kullanmak uygundur.

Geometrik Seriler

Geometrik seriler a ve r sabit reel sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

şeklindeki serilerdir. r **oranı**,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$$

serisindeki gibi pozitif, veya

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \cdots$$

serisindeki gibi negatif olabilir.

$r = 1$ ise, (1) denklemindeki serinin n. kısmi toplamı

$$s_n = a + a(1) + a(1)^2 + \cdots + a(1)^{n-1} = na,$$

olur ve seri ıraksar, çünkü, a'nın işaretine bağlı olarak, $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ olur. $r = -1$ ise, seri ıraksar, çünkü n. kısmi toplamlar a ile 0 arasında değişip dururlar. $|r| \neq 1$ ise, serinin yakınsaklığını veya ıraksaklığını aşağıdaki gibi inceleyebiliriz:

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$rs_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \qquad s_n\text{'yi } r \text{ ile çarpın.}$$

$$s_n - rs_n = a - ar^n \qquad s_n\text{'den } rs_n\text{'yi çıkarın. Sağdaki terimlerin çoğu birbirini götürür.}$$

$$s_n(1 - r) = a(1 - r^n) \qquad \text{Çarpanlarına ayırın.}$$

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \qquad (r \neq 1) \qquad r \neq 1 \text{ ise, } s_n\text{'yi çözebiliriz.}$$

$|r| < 1$ ise, $n \to \infty$ iken $r^n \to 0$ (Bölüm 11.1'deki gibi) ve $s_n \to a/(1 - r)$ bulunur. $|r| > 1$ ise $|r^n| \to \infty$ olur ve seri ıraksar.

> $|r| < 1$ ise, $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ geometrik serisi $a/(1 - r)$'ye yakınsar.
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r}, \qquad |r| < 1$$
>
> $|r| \geq 1$ ise, seri ıraksar.

Bir geometrik serinin ne zaman yakınsadığını veya ıraksadığını ve nereye yakınsadığını belirledik. Bundan sonraki birkaç bölümde göreceğimiz gibi çoğunlukla bir serinin nereye yakınsadığını bilmeksizin yakınsak olduğunu belirleyebiliriz. Bir geometrik serinin toplamını veren $a/(1 - r)$ formülü *sadece* $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ ifadesindeki toplama indisi $n = 1$ (veya seriyi $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ şeklinde yazarsak $n = 0$) ile başladığında uygulanabilir.

ÖRNEK 1 $n = 1$ ile Başlayan İndis

$a = 1/9$ ve $r = 1/3$ ile oluşturulan geometrik seri

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1/9}{1 - (1/3)} = \frac{1}{6}$$ ■

şeklindedir.

ÖRNEK 2 n = 0 ile Başlayan İndis

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{4^n} = 5 - \frac{5}{4} + \frac{5}{16} - \frac{5}{64} + \cdots$$

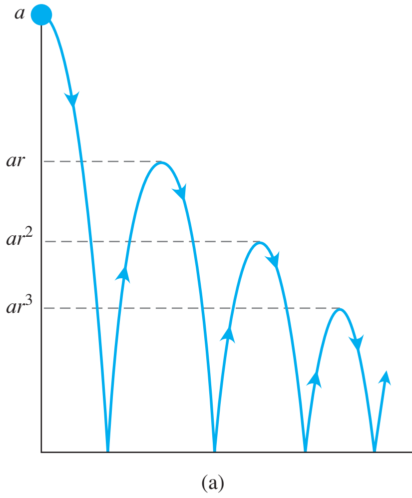
serisi, $a = 5$ ve $r = -1/4$ ile bir geometrik seridir. Bu seri

$$\frac{a}{1 - r} = \frac{5}{1 + (1/4)} = 4$$ ■

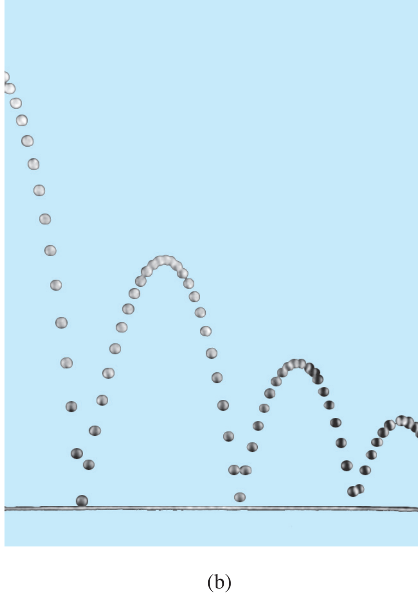
değerine yakınsar.

ÖRNEK 3 Zıplayan Bir Top

Bir topu a metre yüksekten düz bir yüzeye bırakıyorsunuz. Top bir h yüksekliğinden düştükten sonra her yüzeye çarptığında, bir rh yüksekliğine zıplıyor. Burada r pozitif, fakat 1'den küçüktür. Topun yukarı ve aşağı aldığı toplam yolu bulun (Şekil 11.6).



(a)



(b)

FIGURE 11.6 (a) Örnek 3, her zıplamanın yüksekliği bir r çarpanı ile azalıyorsa, zıplayan bir topun aldığı toplam yolu hesaplamak için bir geometrik serinin nasıl kullanılacağını göstermektedir. (b) Zıplayan bir topun stroboskobik bir fotoğrafı.

Çözüm Toplam mesafe

$$s = a + \underbrace{2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \cdots}_{\text{Bu toplam } 2ar/(1-r).} = a + \frac{2ar}{1-r} = a\frac{1+r}{1-r}.$$

olarak bulunur. Örneğin, $a = 6$ m ve $r = 2/3$ ise, toplam mesafe

$$s = 6\frac{1+(2/3)}{1-(2/3)} = 6\left(\frac{5/3}{1/3}\right) = 30 \text{ m}.$$

olur. ■

ÖRNEK 4 Tekrarlanan Ondalık Basamaklar

Tekrarlanan 5.232323… ondalık basamakları iki tamsayının oranı olarak ifade edin.

Çözüm

$$\begin{aligned} 5.232323\ldots &= 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \cdots \\ &= 5 + \frac{23}{100}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots\right)}_{1/(1-0.01)} \qquad a = 1,\ r = 1/100 \\ &= 5 + \frac{23}{100}\left(\frac{1}{0.99}\right) = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99} \end{aligned}$$

■

Ne yazık ki, yakınsak bir geometrik serininki gibi formüller çok nadirdir ve çoğunlukla bir serinin toplamının bir tahminiyle yetinmek zorunda kalırız (bu konu daha sonra incelenecek). Ancak, aşağıdaki örnek toplamı kesin olarak bulabildiğimiz başka bir durumdur.

ÖRNEK 5 Geometrik Olmayan Fakat Teleskopik Olan Seriler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$ serisinin toplamını bulun.

Çözüm Kısmi toplamlar dizisinde, s_k için bir formül verecek bir kalıp ararız. Anahtar,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

kısmi kesirler ayrışımındadır. Buradan,

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

ve

$$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

elde edilir. Parantezleri kaldırıp, zıt işaretli terimleri sadeleştirirsek,

$$s_k = 1 - \frac{1}{k+1}$$

buluruz.

Artık, $k \to \infty$ iken, $s_k \to 1$ olduğunu görüyoruz. Seri yakınsar ve toplamı 1'dir. :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Iraksak Seriler

Bir serinin yakınsak olmamasının bir nedeni terimlerinin giderek küçülmeyişidir.

ÖRNEK 6 Her Sayıyı Aşan Kısmi Toplamlar

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 + \cdots$$

serisi ıraksar, çünkü kısmi toplamlar her L sayısından daha büyüktür. $n = 1$'den sonra, $s_n = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2$ kısmi toplamı n^2'den büyük olur.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n} + \cdots$$

serisi ıraksar, çünkü kısmi toplamlar önceden belirlenen her sayıyı aşar. Her terim 1'den büyüktür, dolayısıyla, n terimin toplamı n'den büyük olur.

Iraksaklık İçin *n*. Terim Testi

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaksa, $\lim_{n\to\infty} a_n$'nin sıfıra eşit olması gerektiğine dikkat edin. Nedenini anlamak için, S serinin toplamını temsil etsin ve $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ de n. kısmi toplam olsun. n büyükken, hem s_n hem de s_{n-1} S'ye yakındır, dolayısıyla farkları, a_n sıfıra yakındır. Daha düzgün olarak,

$$a_n = s_n - s_{n-1} \quad \to \quad S - S = 0$$

Diziler için Fark Kuralı

yazılabilir.
Bunlar aşağıdaki teoremi getirir.

Dikkat
Teorem 7, $a_n \to 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$'nin yakınsayacağını söylemez. $a_n \to 0$ iken bir serinin ıraksaması mümkündür.

TEOREM 7
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsıyorsa, $a_n \to 0$ olur.

Teorem 7, Örnek 6 da ortaya çıkan ıraksaklık çeşidini belirlemek için bir teste yol açar.

Iraksaklık için *n*. Terim Testi
$\lim_{n\to\infty} a_n$ yoksa veya sıfırdan farklıysa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksar.

ÖRNEK 7 *n. terim testini uygulayarak aşağıdakileri bulabiliriz:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ ıraksar, çünkü $n^2 \to \infty$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ ıraksar, çünkü $\frac{n+1}{n} \to 1$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ ıraksar, çünkü $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ yoktur

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+5}$ ıraksar, çünkü $\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+5} = -\frac{1}{2} \neq 0$ dır. ■

ÖRNEK 8 $a_n \to 0$, Fakat Seri Iraksar.

Terimlerin toplamları 1 olan kümelere gruplandığından, dolayısıyla kısmi toplamlar sınırsız olarak büyüdüğünden

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{2 \text{ terim}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{4 \text{ terim}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{2^n \text{ terim}} + \cdots$$

serisi ıraksar. Halbuki serinin terimleri sıfıra yakınsayan bir dizi oluştururlar. Bölüm 11.3'teki Örnek 1, harmonik serinin de aynı biçimde davrandığını gösterir. ■

Serileri Birleştirmek

Elimizde iki yakınsak seri bulunuyorsa, bu serileri terim terim toplayabilir, terim terim çıkarabilir veya bunları sabitlerle çarparak yakınsak yeni seriler elde edebiliriz.

TEOREM 8
$\sum a_n = A$ ve $\sum b_n = B$ yakınsak serilerse, aşağıdaki kurallar geçerlidir.

1. *Toplam Kuralı:* $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A + B$
2. *Fark Kuralı:* $\sum(a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n = A - B$
3. *Sabitle Çarpım Kuralı:* $\sum k a_n = k \sum a_n = kA$ (Herhangi bir k)

İspat Seriler için bu üç kural, diziler için verilen Bölüm 11.1, Teorem 1'deki benzer kurallardan çıkar. Serilerin Toplam Kuralı'nı ispatlamak için,

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

olsun. Bu durumda, $\sum(a_n + b_n)$'nin kısmi toplamları

$$\begin{aligned} s_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n) \\ &= A_n + B_n. \end{aligned}$$

olur.

$A_n \to A$ ve $B_n \to B$ olduğundan, dizilerin Toplam Kuralından $s_n \to A + B$ elde ederiz. Fark Kuralı'nın ispatı da benzerdir.

Serilerin Sabitle Çarpım Kuralını ispatlamak için, $\sum ka_n$'nin kısmi toplamlarının, dizilerin Sabitle Çarpım Kuralından kA'ya yakınsayan

$$s_n = ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n = k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = kA_n,$$

serisini oluşturduklarına dikkat edin. ■

Teorem 8'in sonuçları olarak şunları buluruz:

1. Iraksak bir serinin sıfırdan farklı sabit bir katı ıraksar.
2. $\sum a_n$ yakınsıyor ve $\sum b_n$ ıraksıyorsa, hem $\sum(a_n + b_n)$ hem de $\sum(a_n - b_n)$ ıraksar.

İspatları atlıyoruz.

DİKKAT $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serilerinin ikiside ıraksak iken $\sum(a_n + b_n)$ serisinin yakınsayabildiğini hatırlayın. Örneğin, $\sum a_n = 1 + 1 + 1 + \cdots$ ve $\sum b_n = (-1) + (-1) + (-1) + \cdots$ ıraksarlar oysa $\sum(a_n + b_n) = 0 + 0 + 0 + \cdots$ sıfıra yakınsar.

ÖRNEK 9 Aşağıdaki serilerin toplamlarını bulun.

(a)
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 1}{6^{n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}} && \text{Fark Kuralı} \\
&= \frac{1}{1 - (1/2)} - \frac{1}{1 - (1/6)} && a = 1 \text{ ve } r = 1/2,\ 1/6 \text{ ile geometrik seriler} \\
&= 2 - \frac{6}{5} \\
&= \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} &= 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} && \text{Sabitle Çarpım Kuralı} \\
&= 4\left(\frac{1}{1 - (1/2)}\right) && a = 1 \text{ ve } r = 1/2 \text{ ile bir geometrik seri} \\
&= 8
\end{aligned}$$
■

Terim eklemek veya çıkarmak

Bir seriye her zaman, serinin yakınsaklığını veya ıraksaklığını değiştirmeden, sonlu sayıda terim ekleyebilir veya sonlu sayıda terim çıkartabiliriz, ancak yakınsaklık durumunda bu genellikle toplamı değiştirir. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsıyorsa, herhangi bir $k > 1$ için, $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ de yakınsar ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

yazılabilir. Tersten söylersek, $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ herhangi bir $k > 1$ için yakınsıyorsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de yakınsar. Yani,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n}$$

ve

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\right) - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125}$$

olur.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Richard Dedekind
(1831–1916)

Yeniden İndisleme

Terimlerinin sırasını korudukça, herhangi bir seriyi, yakınsaklığını değiştirmeden yeniden indisleyebiliriz. İndisin başlangıç değerini h birim yükseltmek için, a_n'nin formülünde n yerine $n - h$ yazın:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

İndisin başlangıç değerinin h birim azaltmak içinse, a_n'nin formülünde n yerine $n + h$ yazın:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Bu yatay bir kayma gibi çalışır. Bunu, bir geometrik seride $n = 1$ indisi yerine $n = 0$ indisi ile başlamakta gördük, fakat herhangi başka bir başlangıç indisi de kullanabiliriz. Genellikle basit ifadeler veren indislemeleri tercih ederiz.

ÖRNEK 10 Bir Geometrik Seriyi Yeniden İndislemek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

geometrik serisini

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \qquad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}}, \qquad \text{veya hatta} \qquad \sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}}.$$

şeklinde yazabiliriz. Hangi indislemeyi seçersek seçelim kısmi toplamlar aynı kalır. ■

ALIŞTIRMALAR 11.2

n. Kısmi Toplamları Bulmak

1–6 alıştırmalarında, her serinin n.inci kısmi toplamı için bir formül bulun ve bunu, seri yakınsaksa, serinin toplamını bulmak için kullanın.

1. $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots$

2. $\frac{9}{100} + \frac{9}{100^2} + \frac{9}{100^3} + \cdots + \frac{9}{100^n} + \cdots$

3. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$

4. $1 - 2 + 4 - 8 + \cdots + (-1)^{n-1}2^{n-1} + \cdots$

5. $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots$

6. $\frac{5}{1\cdot 2} + \frac{5}{2\cdot 3} + \frac{5}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{5}{n(n+1)} + \cdots$

Geometrik Terimli Seriler

7–14 alıştırmalarında, her serinin ilk birkaç terimini yazarak serilerin nasıl başladığını gösterin. Serinin toplamını bulun.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$

8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4^n}$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{4^n}$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n}\right)$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{5^n}\right)$

Teleskopik Seriler

15–22 alıştırmalarındaki her serinin toplamını kısmi kesirler kullanarak bulun..

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{1/n}} - \frac{1}{2^{1/(n+1)}}\right)$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right)$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} (\tan^{-1}(n) - \tan^{-1}(n+1))$

Yakınsaklık veya Iraksaklık

23–40 alıştırmalarındaki serilerin hangileri yakınsak hangileri ıraksaktır? Yanıtınızı açıklayın. Yakınsak serilerin toplamını bulun.

23. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

24. $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^n$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{2^n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n$

27. $\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\pi$

28. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{5^n}$

29. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1}{n}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^n}$

32. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}, \quad |x| > 1$

33. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

35. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)$

39. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$

40. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n\pi}}{\pi^{ne}}$

Geometrik Seriler

41–44 alıştırmalarındaki serilerin her birinde, a ve r'yi bulmak için serinin ilk birkaç terimini yazın ve serinin toplamını bulun. Sonra $|r| < 1$ eşitsizliğini x cinsinden ifade ederek eşitsizliğin sağlandığı ve serinin yakınsak olduğu x değerlerini bulun.

41. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

42. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

43. $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$

44. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{3+\sin x}\right)^n$

45–50 alıştırmalarında, verilen geometrik serinin yakınsak olduğu x değerlerini bulun. Ayrıca, x'in bu değerlerinde serilerin toplamını (x'in bir fonksiyonu olarak) bulun.

45. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$

46. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{-2n}$

47. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n$

48. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n$

49. $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^n x$

50. $\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

Tekrarlanan Ondalık Basamaklar

51–58 alıştırmalarındaki sayıların herbirini iki tamsayının oranı olarak ifade edin.

51. $0.\overline{23} = 0.23\ 23\ 23\ldots$

52. $0.\overline{234} = 0.234\ 234\ 234\ldots$

53. $0.\overline{7} = 0.7777\ldots$

54. $0.\overline{d} = 0.dddd\ldots$ d bir basamaklıdır.

55. $0.0\overline{6} = 0.06666\ldots$

56. $1.\overline{414} = 1.414\ 414\ 414\ldots$

57. $1.24\overline{123} = 1.24\ 123\ 123\ 123\ldots$

58. $3.\overline{142857} = 3.142857\ 142857\ldots$

Teori ve Örnekler

59. Örnek 5'teki seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{ve} \quad \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

olarak da yazılabilir. Bu seriyi **(a)** $n = -2$, **(b)** $n = 0$, **(c)** $n = 5$ ile başlayan birer seri olarak yazın.

60. Örnek 6'daki seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} \quad \text{ve} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(n+1)(n+2)}.$$

olarak da yazılabilir. Bu seriyi **(a)** $n = -1$, **(b)** $n = 3$, **(c)** $n = 20$ ile başlayan birer seri olarak yazın.

61. Sıfırdan faklı terimlerden oluşan ve toplamları

a. 1 **b.** –3 **c.** 0

olan sonsuz seriler kurun.

62. (*Alıştırma 61'in devamı*) İstediğiniz sayıya yakınsayan sıfırdan farklı terimli sonsuz bir seri kurabilir misiniz? Açıklayın.

63. Örnekle, $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ yakınsak olsa ve hiçbir b_n sıfır olmasa bile, $\sum(a_n/b_n)$ 'nin ıraksayabileceğini gösterin.

64. $\sum a_n b_n$'nin AB'ye eşit olmadan yakınsayabileceğini gösterecek yakınsak $A = \sum a_n$ ve $B = \sum b_n$ geometrik serisi bulun.

65. Örnekle, $A = \sum a_n$, $B = \sum b_n \neq 0$ olsa ve hiçbir b_n sıfır olmasa bile, $\sum (a_n/b_n)$'nin A/B'den farklı bir sayıya yakınsayabileceğini gösterin.

66. $\sum a_n$ yakınsıyorsa ve her n için $a_n > 0$ ise, $\Sigma(1/a_n)$ hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

67. Iraksak bir seriye sonlu sayıda terim eklerseniz veya ıraksak bir seriden sonlu sayıda terim çıkarırsanız ne olur? Yanıtınızı açıklayın.

68. $\sum a_n$ yakınsak ve $\sum b_n$ ıraksaksa, terim-terim toplamları $\Sigma(a_n + b_n)$ hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

69. Aşağıdaki koşullarda, 5 sayısına yakınsayan bir $\sum ar^{n-1}$ geometrik serisi kurun.

a. $a = 2$ **b.** $a = 13/2$.

70.
$$1 + e^b + e^{2b} + e^{3b} + \cdots = 9$$
olmasını sağlayacak b değerini bulun.

71. Hangi r değerlerinde
$$1 + 2r + r^2 + 2r^3 + r^4 + 2r^5 + r^6 + \cdots$$
sonsuz serisi yakınsar? Yakınsak serinin toplamını bulun.

72. Yakınsak bir seri yerine s_n kısmi toplamlarından birini yazmanın vereceği $(L - s_n)$ hatasının $ar^n/(1 - r)$ olduğunu gösterin.

73. Bir top 4 m yükseklikten bırakılmaktadır. h metrelik yükseklikten kaldırıma her çarptığında $0.75h$ yüksekliğine sıçramaktadır. Topun aşağı ve yukarı aldığı toplam mesafeyi bulun.

74. (*Alıştırma 73'ün devamı*) Alıştırma 73'teki topun hareket ettiği toplam süreyi saniye olarak bulun. (*İpucu*: $s = 4.9t^2$ formülü $t = \sqrt{s/4.9}$ verir.)

75. Aşağıdaki şekil bir kareler dizisinin ilk beşini göstermektedir. En dıştaki karenin alanı 4 m^2'dir. Diğer her kare kendinden önceki karelerin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek oluşturulmuştur. Tüm karelerin alanlarının toplamını bulun.

76. Aşağıdaki şekil yarım çember sıralarından oluşan bir dizinin ilk üç sırasını ve dördüncü sırasının bir bölümünü göstermektedir. n. sırada yarıçapları $1/2^n$ olan 2^n yarım çember vardır. Tüm yarım çemberlerin alanlarının toplamını bulun.

1/8

1/4

1/2

77. Helga von Koch'un kar tanesi eğrisi Helga von Koch'un kar tanesi eğrisi sonlu bir alanı sınırlayan sonsuz uzunluklu bir eğridir. Bunun neden böyle olduğunu anlamak için, eğrinin kenarları 1 uzunluğunda olan bir eşkenar üçgenle başlatıldığını varsayın.

a. n. eğri C_n'nin uzunluğu L_n'yi bulun ve $\lim_{n\to\infty} L_n = \infty$ olduğunu gösterin.

b. C_n'nin çevrelediği A_n alanını bulun ve $\lim_{n\to\infty} A_n$'yi hesaplayın.

1. Eğri

2. Eğri

3. Eğri

4. Eğri

78. Aşağıdaki şekil $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ 'nin 2'den küçük olduğunun formel olmayan bir ispatını verir. Ne olduğunu açıklayın. (Kaynak: "Convergence with Pictures", P.J: Rippon, *American Mathematical Monthly*, Vol. 93, No. 6, 1986, s. 476-478.)

1 1 $\frac{1}{3^2}$ $\frac{1}{7^2}$ $\frac{1}{6^2}$ … $\frac{1}{5^2}$ $\frac{1}{2^2}$ $\frac{1}{4^2}$

1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ …

11.3 İntegral Testi

Elimizde bir Σa_n serisi varsa, iki soru sorarız:

1. Seri yakınsar mı?
2. Yakınsarsa, toplamı nedir?

Bu bölümün geri kalanının çoğu ilk soruya ayrılmıştır ve bu bölümde, $\int_1^\infty f(x)\,dx$ genelleştirilmiş integralinin yakınsaklığına bir bağlantı kurarak, bu soruyu cevaplıyoruz. Fakat pratik bakımdan, ikinci soru da aynı derecede önemlidir ve buna daha sonra döneceğiz.

Bu ve bundan sonraki iki alt bölümde, negatif terimler içermeyen serileri inceleyeceğiz. Bu kısıtlamanın nedeni, bu serilerin kısmi toplamlarının azalmayan diziler oluşturması ve üstten sınırlı azalmayan dizilerin daima yakınsamasıdır. (Bölüm 11.1, Teorem 6). Terimleri negatif olmayan bir serinin yakınsadığını göstermek için, sadece kısmi toplamlarının üstten sınırlı olduklarını göstermemiz gerekir.

Bu yaklaşımın söz konusu serinin toplamını bulmadan yakınsaklığını belirlemesi, ilk bakışta bir çekingenlik yaratabilir. Elbette, serilerin toplamlarını doğrudan kısmi toplamların formüllerinden hesaplamak daha iyidir. Fakat birçok durumda, bu tip formüller bulunamaz ve bunların yokluğunda, önce yakınsaklığı doğrulamak, sonra da toplama yaklaşım yapmaktan oluşan iki adımlı işleme dönmek zorunda kalırız.

Azalmayan Kısmi Toplamlar

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$'nin, her n için $a_n \geq 0$ olacak şekilde bir sonsuz seri olduğunu varsayın. Bu durumda, her kısmi toplam kendinden öncekine eşit veya ondan büyüktür, çünkü $s_{n+1} = s_n + a_n$'dir:

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \cdots$$

Kısmi toplamlar azalmayan bir dizi oluşturduklarından dolayı, Azalmayan Dizi Teoremi (Bölüm 11.1, Teorem 6) serinin ancak ve yalnız kısmi toplamları üstten sınırlıysa yakınsayacağını söyler.

Teorem 6'nın Sonucu

Negatif terimler içermeyen bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ancak ve yalnız kısmi toplamları üstten sınırlıysa yakınsar.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Nicole Oresme
(1320–1382)

ÖRNEK 1 Harmonik Seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

serisine **harmonik seri** denir. Harmonik seri ıraksar, fakat n. Terim Testinden dolayı değildir. n.inci terim, $1/n$, sıfıra gider fakat seri yine de ıraksaktır. Iraksamanın nedeni kısmi toplamlarının bir üst sınırının olmamasıdır. Nedenini anlamak için, serideki terimleri aşağıdaki şekilde gruplandırın:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> \frac{2}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> \frac{4}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{> \frac{8}{16} = \frac{1}{2}} + \cdots.$$

İlk iki terimin toplamı 1.5'tir. Sonraki iki terimin toplamı ise, $1/4 + 1/4 = 1/2$'den büyük olan $1/3 + 1/4$'tür. Bundan sonraki dört terimin toplamı ise, $1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8$'dir ki, bu da $1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 = 1/2$'den büyüktür. Sonraki sekiz terimin toplamı $1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16$'dır ki, bu da $8/16 = 1/2$'den büyüktür. Daha sonraki 16 terimin toplamı $16/32 = 1/2$'den büyüktür ve toplam böyle devam eder. Genel olarak, $1/2^{n+1}$ ile biten 2^n terimin toplamı, $2^n/2^{n+1} = 1/2$'den büyüktür. Kısmi toplamlar dizisi üstten sınırlı değildir: $n = 2^k$ ise, s_n kısmi toplamı $k/2$'den büyüktür. Harmonik seri ıraksar. ■

İntegral Testi

İntegral Testini harmonik seriyle ilişkili, fakat n. terimi $1/n$ yerine $1/n^2$ olan bir seriyle tanıtacağız.

ÖRNEK 2 Aşağıdaki seri yakınsar mı?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

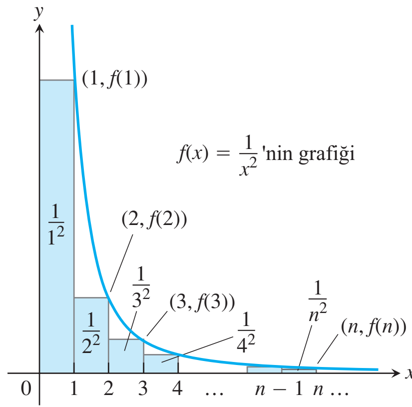
Çözüm $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$'nin yakınsaklığını, $\int_1^{\infty}(1/x^2)\,dx$ ile karşılaştırarak belirleriz. Karşılaştırmayı yürütmek için, serinin terimlerini $f(x) = 1/x^2$ fonksiyonunun değerleri olarak düşünür ve bu değerleri $y = 1/x^2$ eğrisinin altındaki dikdörtgenlerin alanları olarak yorumlarız.

Şekil 11.7'den görüldüğü gibi,

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\ &= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \\ &< f(1) + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx \\ &< 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \\ &< 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Bölüm 8.8, Örnek 3'te olduğu gibi, $\int_1^{\infty}(1/x^2)\,dx = 1$ 'dir.

bulunur. Yani, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$'nin kısmi toplamları üstten sınırlıdır (2 ile) ve seri yakınsar. Serinin toplamı $\pi^2/6 \approx 1.64493$'tür (Bölüm 11.11 de Alıştırma 16'ya bakın). ■



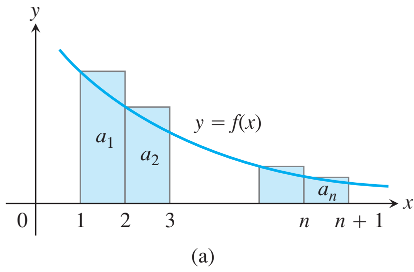
ŞEKİL 11.7 $f(x) = 1/x^2$'nin grafiği altındaki dikdörtgenlerin alanlarının toplamı grafiğin altındaki alandan küçüktür (Örnek 2).

Dikkat
Yakınsaklık durumunda serinin ve integralin değerlerinin aynı olması gerekmez. Örnek 2'de gördüğümüz gibi, $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2) = \pi^2/6$ iken $\int_1^{\infty}(1/x^2)\,dx = 1$ 'dir.

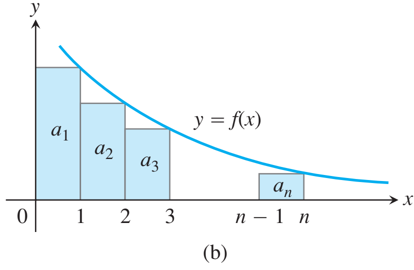
TEOREM 9 İntegral Testi
$\{a_n\}$ pozitif terimli bir dizi olsun f, her $x \geq N$ (N pozitif bir tamsayı) için x'in sürekli, pozitif ve azalan bir fonksiyonu olmak üzere, $a_n = f(n)$ olduğunu varsayın. Bu durumda, $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ serisi ve $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ integralinin ikisi de ya yakınsar, ya da ıraksar.

İspat Testi $N = 1$ için kullanacağız. Genel N değerleri için ispat benzerdir.

f'nin, her n için $f(n) = a_n$ olmak üzere, azalan bir fonksiyon olduğu varsayımıyla işe başlarız. Bu bizi, Şekil 11.8(a)'da, alanları $a_1, a_2, \ldots, a_n$ olan dikdörtgenlerin, birlikte,



(a)



(b)

ŞEKİL 11.8 İntegral Testinin koşullarına uygun olarak, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ve $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ integralinin ikisi de ya yakınsar, ya da ıraksar.

$x = 1$'den $x = n + 1$'e kadar $y = f(x)$ eğrisinin altında kalan alandan daha fazla alan kapladıklarını gözlemeye götürür. Yani,

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \le a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Şekil 11.8(b)'de, dikdörtgenler sağa doğru değil, sola doğru yerleştirilmişlerdir. Bir a_1 için ilk dikdörtgeni göz ardı edersek,

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \le \int_1^{n} f(x)\,dx$$

olduğunu görürüz. a_1'i de eklersek,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le a_1 + \int_1^{n} f(x)\,dx$$

buluruz. Bu iki sonucu birleştirmek

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \le a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le a_1 + \int_1^{n} f(x)\,dx$$

verir. Bu eşitsizlikler her n için geçerlidir ve $n \to \infty$ iken de geçerli kalırlar.

$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ sonlu ise sağ taraftaki eşitsizlik $\sum a_n$'nin sonlu olduğunu gösterir. $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ sonsuz ise sol taraftaki eşitsizlik $\sum a_n$'nin sonsuz olduğunu gösterir.

Dolayısıyla, seri ve integralin ikisi de ya sonludur, ya da sonsuzdur. ■

ÖRNEK 3 *p*-Serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

***p*-serisinin** (p reel bir sabit) $p > 1$ ise yakınsayacağını, $p \le 1$ ise ıraksayacağını gösterin.

Çözüm $p > 1$ ise, $f(x) = 1/x^p$, x'in pozitif azalan bir fonksiyonu olur.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^{\infty} x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{1-p}(0-1) = \frac{1}{p-1},$$

$p - 1 > 0$ olduğundan $b \to \infty$ iken $b^{p-1} \to \infty$

olduğundan, İntegral Testine göre seri yakınsaktır. p-Serisinin toplamının $1/(p-1)$ olmadığını vurguluyoruz. Seri yakınsaktır fakat hangi değere yakınsadığını bilmiyoruz.

$p < 1$ ise, $1 - p > 0$ ve

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} (b^{1-p} - 1) = \infty.$$

olur. İntegral Testi'ne göre seri ıraksaktır.

$p = 1$ ise, (ıraksak) harmonik seriyi buluruz:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

$p > 1$ için yakınsaklık vardır, fakat başka her p değeri için ıraksaklık bulunur. ■

$p = 1$ ile p-serisi **harmonik seri**dir (Örnek 1). p-Serisi Testi harmonik serinin ancak zorbela ıraksadığını gösterir; p'yi örneğin 1.000000001'e yükseltirsek seri yakınsak olur!

Harmonik serinin kısmi toplamlarının sonsuza gitmesinin yavaşlığı etkileyicidir. Örneğin, harmonik serinin kısmi toplamlarının 20'yi aşması için yaklaşık 178,482,301 terim gerekir. Hesap makinenizle bu kadar çok terimi toplamak birkaç hafta sürerdi. (Ayrıca, Alıştırma 33b'ye bakın)

ÖRNEK 4 Yakınsak Bir Seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

serisi, İntegral Testine göre yakınsar. $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ fonksiyonu $x \geq 1$ için pozitif, sürekli ve azalandır, ve

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \Big[\arctan x\Big]_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty} [\arctan b - \arctan 1] \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

tür. Yine serinin toplamının $\pi/4$ olmadığını vurguluyoruz. Seri yakınsaktır, fakat toplamının değerini bilmiyoruz. ■

Örnek 4'teki serinin yakınsaklığı, $\Sigma 1/n^2$ serisiyle karşılaştırma ile de gerçeklenebilirdi. Karşılaştırma testleri bundan sonraki bölümde incelenmektedir.

ALIŞTIRMALAR 11.3

Yakınsaklık veya Iraksaklığı Belirlemek

1–30 alıştırmalarındaki serilerin hangileri yakınsar, hangileri ıraksar? Yanıtlarınızı açıklayın. (Bir yanıtı kontrol ederken, bir serinin yakınsaklığını veya ıraksaklığını belirlemenin birden fazla yolu olduğunu hatırlayın)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+1}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\sqrt{n}}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{8^n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{n}$
9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$
10. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n + 3}$
13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{n+1}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$
17. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 3)^n}$
21. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(1/n)}{(\ln n)\sqrt{\ln^2 n - 1}}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + \ln^2 n)}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{1}{n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1 + e^{2n}}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1 + e^n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \tan^{-1} n}{1 + n^2}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech} n$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech}^2 n$

Teori ve Örnekler

31 ve 32 alıştırmalarındaki seriler, yakınsıyorlarsa, hangi a değerleri için yakınsarlar?

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n + 2} - \frac{1}{n + 4} \right)$

32. $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n - 1} - \frac{2a}{n + 1} \right)$

33. a. Şekil 11.7 ve 11.8'deki gibi şekiller çizerek, harmonik serinin kısmi toplamlarının aşağıdaki eşitsizlikleri sağladığını gösterin.

$$\ln (n + 1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$
$$\le 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\, dx = 1 + \ln n.$$

T **b.** Iraksadığını bildiğimiz halde, harmonik serinin ıraksaklığının gözlemsel bir delili yoktur. Sadece kısmi toplamlar çok yavaş büyürler. Ne demek istediğimizi anlamak için, 13 milyar yıl önce, evrenin yaratıldığı gün $s_1 = 1$ ile başladığınızı ve her *saniye* yeni bir terim eklediğinizi varsayın. Bir yılın 365-gün olduğunu kabul edersek, bugün s_n kısmi toplamı ne kadar olur?

34. $\sum_{n=1}^{\infty} (1/(nx))$'in yakınsak olduğu bir x değeri var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

35. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif sayılardan oluşan ıraksak bir seriyse, her n için, $b_n < a_n$ olacak şekilde bir $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitif sayı serisinin bulunacağı doğru mudur? Pozitif sayıların bir "en küçük" ıraksak serisi var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

36. (*Alıştırma 35'in devamı*) Pozitif sayıların bir "en büyük" yakınsak serisi var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

37. Cauchy sıklaştırma testi. Cauchy sıklaştırma testi şunu söyler: $\{a_n\}$ 0'a yakınsayan, pozitif terimli ve artmayan (her n için $a_n \ge a_{n+1}$) bir dizi olsun. Bu durumda, ancak ve yalnız $\sum 2^n a_{2^n}$ yakınsıyorsa, $\sum a_n$ yakınsar. Mesela, $\sum (1/n)$ ıraksar, çünkü $\sum 2^n \cdot (1/2^n) = \sum 1$ ıraksar. Testin neden işe yaradığını açıklayın.

38. Alıştırma 37'deki Cauchy sıklaştırma testini kullanarak aşağıdakileri gösterin.

a. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ıraksar;

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$ ise yakınsar ve $p \le 1$ ise ıraksar.

39. Logaritmik *p*-serisi

a. Ancak ve yalnız $p > 1$ ise

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} \qquad (p \text{ pozitif bir sabit})$$

integralinin yakınsak olduğunu gösterin.

b. (a) şıkkındaki sonuç

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

serisinin yakınsaklığı hakkında ne söyler? Yanıtınızı açıklayın.

40. (*Alıştırma 39'un devamı.*) Alıştırma 39'un sonucunu kullanarak aşağıdaki serilerden hangilerinin yakınsak olduğunu ve hangilerinin ıraksadık olduğunu belirleyin. Her durumda yanıtınızı destekleyin.

a. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)}$

b. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1.01}}$

c. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln (n^3)}$

d. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

41. Euler sabiti Şekil 11.8'deki gibi grafikler n artarken

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

toplamı ile

$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{x}\, dx$$

integrali arasındaki farkta fazla bir değişiklik olmayacağını belirtir. Bunu araştırmak için, aşağıdaki adımları izleyin.

a. Teorem 9'un ispatında $f(x) = 1/x$ alarak

$$\ln (n + 1) \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \le 1 + \ln n$$

veya

$$0 < \ln (n + 1) - \ln n \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \le 1$$

olduğunu gösterin. Yani,

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

dizisi alttan ve üstten sınırlıdır.

b.

$$\frac{1}{n + 1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \ln (n + 1) - \ln n$$

olduğunu gösterin ve bu sonucu kullanarak (a) şıkkındaki $\{a_n\}$ dizisinin azaldığını gösterin.

Alttan sınırlı azalan bir seri yakınsak olduğundan (Bölüm 11.1, Alıştırma 107), (a)'da tanımlanan a_n sayıları yakınsar:

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \to \gamma.$$

Değeri 0.5772…, olan γ sayısına *Euler sabiti* denir. π ve e gibi diğer özel sayıların aksine, γ için daha basit formülasyon kurallı bir ifade bulunamamıştır.

42. İntegral testini kullanarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$$

serisinin yakınsadığını gösterin.

11.4 Karşılaştırma Testleri

Geometrik serinin, p-serisinin ve birkaç başka serinin yakınsaklıklarının nasıl belirleneceğini gördük. Daha birçok serinin yakınsaklığını, terimlerini yakınsaklığı bilinen bir serinin terimleri ile karşılaştırarak test edebiliriz.

TEOREM 10 Karşılaştırma Testi

$\sum a_n$ negatif terim içermeyen bir seri olsun.

(a) N herhangi bir tamsayı olmak üzere her $n > N$ için, $a_n \leq c_n$ olacak şekilde yakınsak bir $\sum c_n$ serisi varsa $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.

(b) N herhangi bir tamsayı olmak üzere her $n > N$ için $a_n \geq d_n$ olacak şekilde negatif terim içermeyen ıraksak bir $\sum d_n$ serisi varsa, $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Albert of Saxony
(ca. 1316–1390)

İspat (a) şıkkında, $\sum a_n$'nin kısmi toplamları üstten

$$M = a_1 + a_2 + \cdots + a_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n$$

ile sınırlıdır. Dolayısıyla, bir $L \leq M$ limitiyle azalmayan bir dizi oluştururlar.

(b) şıkkında, $\sum a_n$'nin kısmi toplamları üstten sınırlı değildir. Sınırlı olsalardı, $\sum d_n$'nin kısmi toplamları

$$M^* = d_1 + d_2 + \cdots + d_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

ile sınırlı olurlardı ve $\sum d_n$ ıraksamak yerine yakınsardı. ■

ÖRNEK 1 Karşılaştırma Testini Uygulamak

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n - 1}$$

serisi ıraksaktır. Çünkü; n. terimi

$$\frac{5}{5n-1} = \frac{1}{n - \frac{1}{5}} > \frac{1}{n}$$

ıraksak olan harmonik serinin n.inci teriminden büyüktür.

(b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

serisi yakınsaktır. Çünkü; bütün terimleri pozitiftir ve

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots$$

serisinin karşı gelen terimlerinden küçük veya eşittir. Sol taraftaki geometrik seri yakınsaktır ve

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1 - (1/2)} = 3$$

tür. 3'ün, $\sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)$ serisinin kısmi toplamları için bir üst sınır olması serinin 3'e yakınsaması anlamına gelmez. Bölüm 11.9'da göreceğimiz gibi seri e'ye yakınsar.

(c)

$$5 + \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + 1 + \frac{1}{2 + \sqrt{1}} + \frac{1}{4 + \sqrt{2}} + \frac{1}{8 + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2^n + \sqrt{n}} + \cdots$$

serisi yakınsaktır. Bunu görmek için ilk üç terimi ihmal ederiz ve kalan terimleri, yakınsak olan $\sum_{n=0}^{\infty}(1/2^n)$ geometrik serisinin terimleri ile karşılaştırırız. Budanmış serinin $1/(2^n + \sqrt{n})$ terimi, geometrik serinin karşı gelen $1/2^n$ teriminden küçüktür. Terim terime

$$1 + \frac{1}{2 + \sqrt{1}} + \frac{1}{4 + \sqrt{2}} + \frac{1}{8 + \sqrt{3}} + \cdots \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

karşılaştırmasını görürüz. Dolayısıyla, Karşılaştırma Testinin bir uygulamasına göre budanmış seri ve orijinal seri yakınsaktır. ■

Limit Karşılaştırma Testi

Şimdi, özellikle a_n genel terimi n'nin rasyonel fonksiyonu şeklinde olan seriler için kullanışlı bir karşılaştırma testi tanıtacağız.

TEOREM 11 Limit Karşılaştırma Testi

Her $n \geq N$ (N bir tamsayı) için $a_n > 0$ ve $b_n > 0$ olduğunu varsayın.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ ise, $\sum a_n$ ve $\sum b_n$'nin ikisi birden yakınsak veya ıraksaktır.

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ise ve $\sum b_n$ yakınsak ise, $\sum a_n$'de yakınsaktır.

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ise ve $\sum b_n$ ıraksak ise, $\sum a_n$'de ıraksaktır.

İspat (1) şıkkını ispatlayacağız. (2) ve (3) şıkları Alıştırma 37(a) ve (b)'ye bırakılmıştır. $c/2 > 0$ olduğundan, her n için

$$n > N \;\Rightarrow\; \left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < \frac{c}{2}$$

$\epsilon = c/2$, $L = c$ ve a_n yerine a_n/b_n alınmış olarak limit tanımı

sağlanacak şekilde bir N tamsayısı vardır. Dolayısıyla $n > N$ için,

$$-\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} - c < \frac{c}{2},$$

$$\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2},$$

$$\left(\frac{c}{2}\right)b_n < a_n < \left(\frac{3c}{2}\right)b_n$$

bulunur. $\sum b_n$ yakınsak ise, $\sum(3c/2)b_n$ de yakınsaktır ve Doğrudan Karşılaştırma Testine göre $\sum a_n$ de yakınsaktır. $\sum b_n$ ıraksak ise, $\sum(c/2)b_n$ de ıraksaktır ve Doğrudan Karşılaştırma Testine göre $\sum a_n$ de ıraksak olur. ■

ÖRNEK 2 Limit Karşılaştırma Testini Kullanmak

Aşağıdaki serilerin hangisi yakınsar, hangisi ıraksar?

(a) $$\frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$$

(b) $$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

(c) $$\frac{1 + 2\ln 2}{9} + \frac{1 + 3\ln 3}{14} + \frac{1 + 4\ln 4}{21} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + n\ln n}{n^2 + 5}$$

Çözüm

(a) $a_n = (2n+1)/(n^2+2n+1)$ olsun. Büyük n değerleri için, a_n'nin $2n/n^2 = 2/n$ gibi davranmasını bekleriz, dolayısıyla $b_n = 1/n$ alırız.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ıraksak olduğundan ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n}{n^2 + 2n + 1} = 2$$

olduğundan, Limit Karşılaştırma Testinin 1. kısmına göre $\sum a_n$ ıraksaktır. $b_n = 2/n$'yi de olabilirdik, fakat $1/n$ daha basittir.

(b) $a_n = 1/(2^n - 1)$ olsun. Büyük n değerleri için, a_n'nin $1/2^n$ gibi davranmasını bekleriz, dolayısıyla $b_n = 1/2^n$ alırız.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

yakınsak olduğundan ve

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - (1/2^n)} \\ &= 1\end{aligned}$$

olduğundan, Limit Karşılaştırma Testinin 1. kısmına göre $\sum a_n$ yakınsaktır.

(c) $a_n = (1 + n \ln n)/(n^2 + 5)$ olsun. Büyük n değerleri için, a_n'nin $(n \ln n)/n^2 = (\ln n)/n$ gibi davranmasını bekleriz, ki bu $n \geq 3$ için $1/n$'den büyüktür, dolayısıyla $b_n = 1/n$ alırız.

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ıraksak olduğundan ve

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n + n^2 \ln n}{n^2 + 5} \\ &= \infty\end{aligned}$$

olduğundan, Limit Karşılaştırma Testinin 3. kısmına göre $\sum a_n$ ıraksaktır. ■

ÖRNEK 3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ yakınsar mı?

Çözüm $\ln n$ herhangi bir pozitif c sabiti için n^c'den daha yavaş büyüdüğü için (Bölüm 11.1, Alıştırma 91), yeterince büyük n değerleri için

$$\frac{\ln n}{n^{3/2}} < \frac{n^{1/4}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{5/4}}$$

olmasını bekleriz. Gerçekten de, $a_n = (\ln n)/n^{3/2}$ ve $b_n = 1/n^{5/4}$ alarak

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/4}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{(1/4)n^{-3/4}} \qquad \text{l'Hôpital Teorisi} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^{1/4}} = 0\end{aligned}$$

buluruz. $\sum b_n = \sum (1/n^{5/4})$ ($p > 1$ ile bir p-serisi) yakınsak olduğundan, Limit Karşılaştırma Testinin 2. kısmına göre, $\sum a_n$ yakınsak olur.

ALIŞTIRMALAR 11.4

Yakınsaklık veya Iraksaklığı Belirlemek

1–36 alıştırmalarındaki serilerden hangileri yakınsar, hangileri ıraksar? Yanıtlarınızı açıklayın.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}$ **2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n + \sqrt{n}}$ **3.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{n^2}$ **5.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n - 1}$ **6.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n^2\sqrt{n}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n + 1}\right)^n$ **8.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}}$ **9.** $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$

10. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$ **11.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$ **12.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n^3}$

13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ **14.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$ **15.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \ln n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \ln n)^2}$ **17.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n + 1)}{n + 1}$ **18.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \ln^2 n)}$

19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2 - 1}}$ **20.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$ **21.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - n}{n2^n}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2^n}{n^2 2^n}$ **23.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1} + 1}$ **24.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} + 1}{3^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ **26.** $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{1}{n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n + 1}{n(n + 1)(n + 2)}$ **28.** $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n^3 - 3n}{n^2(n - 2)(n^2 + 5)}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^{1.1}}$ **30.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sec^{-1} n}{n^{1.3}}$ **31.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth n}{n^2}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{n^2}$ **33.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ **34.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2 + 3 + \cdots + n}$ **36.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}$

Teori ve Örnekler

37. Limit Karşılaştırma Testinin **(a)** 2. kısmını ve **(b)** 3. kısmını ispatlayın.

38. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ negatif olmayan sayılardan oluşan yakınsak bir seri ise, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n)$ için ne söylenebilir ? Açıklayın.

39. $n \geq N$ (N bir tamsayı) için, $a_n > 0$ ve $b_n > 0$ olduğunu varsayın. $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = \infty$ ve $\sum a_n$ yakınsak ise, $\sum b_n$ hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

40. $\sum a_n$ negatif olmayan sayılardan oluşan yakınsak bir seri ise, $\sum {a_n}^2$'nin de yakınsak olduğunu ispatlayın.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

41.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$$

serisi ıraksak mı veya yakınsak mı hala bilinmemektedir. Bir BCS kullanarak, aşağıdaki adımları izleyip serinin davranışını araştırın.

a.

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$$

kısmi toplamlar dizisini tanımlayın. $k \to \infty$ iken s_k'nın limitini bulmaya kalkarsanız ne olur? BCS'niz bu limit için kapalı bir ifade verir mi?

b. Kısmi toplamlar dizisinin ilk 100 (k, s_k) noktasını işaretleyin. Noktalar yakınsıyor gibi mi? Limitin ne olmasını beklersiniz?

c. Sonra ilk 200 (k, s_k) noktasını işaretleyin. Davranışı kendi kelimelerinizle tartışın.

d. İlk 400 (k, s_k) noktasını işaretleyin. k = 355 iken ne olur? $355/113$ sayısını hesaplayın. Hesabınızdan $k = 355$'de ne olduğunu açıklayın. k'nın hangi değerleri için bu davranışın tekrarlanmasını beklersiniz?

Mazes for the Mind by Clifford A. Pickover, St. Martin's Press, Inc., New York, 1992'de bu seri hakkında ilginç bir tartışma bulacaksınız.

11.5 Kök ve Oran Testleri

Oran Testi, a_{n+1}/a_n oranını inceleyerek, bir serinin büyüme (veya azalma) oranını ölçer. Bir $\sum ar^n$ geometrik serisi için, bu oran bir sabittir $((ar^{n+1})/(ar^n) = r)$, ve seri ancak ve yalnız oranı mutlak değerce 1'den küçükse yakınsaktır. Oran Testi bu sonucu genişleten kuvvetli bir kuraldır. Bunu bir sonraki sayfada Karşılaştırma Testini kullanarak ispat edeceğiz.

TEOREM 12 Oran Testi

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri olsun ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho.$$

olduğunu varsayın. Bu durumda,

(a) $\rho < 1$ ise, *seri yakınsar*.

(b) $\rho > 1$ veya ρ sonsuz ise, seri *ıraksar*.

(c) $\rho = 1$ ise, *test sonuçsuz*dur.

İspat

(a) $\boldsymbol{\rho < 1}$. r, ρ ile 1 arasında bir sayı olsun. Bu durumda $\epsilon = r - \rho$ sayısı pozitiftir.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \rho$$

olduğundan, n yeterince büyükken, mesela her $n \geq N$ için, a_{n+1}/a_n oranı ρ'nun ϵ civarında bulunmalıdır. Özel olarak

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \epsilon = r, \qquad n \geq N \text{ için}$$

olur. Yani,

$$\begin{aligned}
a_{N+1} &< ra_N, \\
a_{N+2} &< ra_{N+1} < r^2 a_N, \\
a_{N+3} &< ra_{N+2} < r^3 a_N, \\
&\vdots \\
a_{N+m} &< ra_{N+m-1} < r^m a_N.
\end{aligned}$$

Bu eşitsizlikler serimizin terimlerinin, N. terimden sonra $r < 1$ oranı ile bir geometrik serinin terimlerinden daha hızlı sıfıra yaklaştığını gösterir. Daha kesin olarak, $n = 1, 2, \ldots, N$ için $c_n = a_n$ ve $c_{N+1} = ra_N$, $c_{N+2} = r^2 a_N, \ldots, c_{N+m} = r^m a_N, \ldots$ olacak şekilde bir $\sum c_n$ serisini düşünün. Her n için, $a_n \leq c_n$'dir ve

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} c_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N + ra_N + r^2 a_N + \cdots \\
&= a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N(1 + r + r^2 + \cdots)
\end{aligned}$$

olur. $1 + r + r^2 + \cdots$ geometrik serisi yakınsaktır, çünkü $|r| < 1$'dir, dolayısıyla $\sum c_n$ yakınsak olur. $a_n \leq c_n$ olduğundan, $\sum a_n$ de yakınsak olur.

(b) $\boldsymbol{1 < \rho \leq \infty}$. Bir M indisinden sonra,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \qquad \text{ve} \qquad a_M < a_{M+1} < a_{M+2} < \cdots$$

olur. Serinin terimleri n sonsuz olurken sıfıra yaklaşmazlar ve seri n. Terim Testinden dolayı ıraksar.

(c) $\boldsymbol{\rho = 1.}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{ve} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

serileri, $\rho = 1$ iken, başka yakınsaklık testlerinin kullanılması gerektiğini gösterir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ için:} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \to 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ için:} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1^2 = 1$$

İki durumda da, $\rho = 1$'dir, ama yine de birinci seri ıraksarken ikincisi yakınsar. ■

Oran Testi genellikle bir serinin terimleri n'yi içeren ifadelerin faktoriyellerini veya n. kuvveti alınmış ifadeleri içerdiği zaman etkilidir.

ÖRNEK 1 Oran Testini Uygulamak

Aşağıdaki serilerin yakınsaklığını araştırın.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n! n!}{(2n)!}$

Çözüm

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 5)/3^n$ serisi için,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2^{n+1} + 5)/3^{n+1}}{(2^n + 5)/3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{n+1} + 5}{2^n + 5} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2 + 5 \cdot 2^{-n}}{1 + 5 \cdot 2^{-n}}\right) \to \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}.$$

Seri yakınsar, çünkü $\rho = 2/3$, 1'den küçüktür. Bu serinin toplamının $2/3$ olduğu anlamına gelmez. Gerçekten de,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \frac{1}{1 - (2/3)} + \frac{5}{1 - (1/3)} = \frac{21}{2}$$

bulunur.

(b) $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$ ise, o zaman $a_{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$ olur ve

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!n!(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+1} \to 4$$

buluruz. Seri ıraksar, çünkü $\rho = 4$, 1'den büyüktür.

(c) $a_n = 4^n\, n!n!(2n)!$ ise,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n n! n!}$$

$$= \frac{4(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+1} \to 1$$

olur.

Limit $\rho = 1$ olduğu için, Oran Testinden serinin yakınsak olup olmadığını anlayamayız. Ancak, $a_{n+1}/a_n = (2n+2)/(2n+1)$ olduğunu fark ettiğimizde, a_{n+1}'in her zaman a_n'den büyük olduğu sonucunu çıkarırız, çünkü $(2n+2)/(2n+1)$ her zaman 1'den büyüktür. Dolayısıyla bütün terimler $a_1 = 2$'ye eşit veya ondan büyüktür ve $n \to \infty$ iken, n. terim sıfıra gitmez. Seri ıraksar. ■

Kök Testi

$\sum a_n$ için şimdiye kadar gördüğümüz yakınsama testleri a_n'nin formülü oldukça basitken işe yarar. Fakat aşağıdaki durumu düşünün.

ÖRNEK 2 $a_n = \begin{cases} n/2^n, & n \text{ tek} \\ 1/2^n, & n \text{ çift} \end{cases}$ olsun. $\sum a_n$ yakınsar mı?

Çözüm Serinin birkaç terimini yazarız.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{7}{2^7} + \cdots$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{5}{32} + \frac{1}{64} + \frac{7}{128} + \cdots.$$

Bu, kesin olarak bir geometrik seri değildir. $n \to \infty$ iken, n. terim sıfıra yaklaşır, dolayısıyla serinin ıraksayıp ıraksamadığını bilmiyoruz. İntegral Testi pek umut verici görünmemektedir. Oran Testi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}, & n \text{ tek} \\[2mm] \dfrac{n+1}{2}, & n \text{ çift} \end{cases}$$

verir. $n \to \infty$ iken, oran büyük ile küçük değerler arasında değişir ve bir limiti yoktur. Soruya yanıt verecek (seri yakınsar) bir test Kök Testidir. ■

TEOREM 13 Kök Testi
$\sum a_n$, $n \geq N$ için, $a_n \geq 0$ olacak şekilde bir seri olsun ve

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

olduğunu varsayın. Bu durumda,

(a) $\rho < 1$ ise, seri *yakınsar*.

(b) $\rho > 1$ veya ρ sonsuz ise, seri *ıraksar*.

(c) $\rho = 1$ ise, test *sonuçsuz*dur.

İspat

(a) $\rho < 1$. $\rho + \epsilon < 1$ olacak kadar küçük bir $\epsilon > 0$ seçin. $\sqrt[n]{a_n} \to \rho$, olduğundan, $\sqrt[n]{a_n}$ terimleri eninde sonunda ρ'ya ϵ'dan daha yakın olurlar. Diğer bir deyişle,

$$n \geq M \text{ iken} \qquad \sqrt[n]{a_n} < \rho + \epsilon$$

olacak şekilde bir $M \geq N$ indisi bulunur.

$$n \geq M \text{ için} \quad a_n < (\rho + \epsilon)^n$$

olduğu da doğrudur. Şimdi, $\sum_{n=M}^{\infty} (\rho + \epsilon)^n$ oranı $(\rho + \epsilon) < 1$ olan bir geometrik seri, yakınsar. Karşılaştırmayla, $\sum_{n=M}^{\infty} a_n$ de yakınsar ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_{M-1} + \sum_{n=M}^{\infty} a_n$$

yakınsar.

(b) $\mathbf{1 < \rho \leq \infty}$**.** Bir M indisinden büyük olan bütün terimler için, $\sqrt[n]{a_n} > 1$ buluruz, dolayısıyla $n > M$ için $a_n > 1$ olur. Serinin terimleri sıfıra yakınsamaz. n. Terim Testine göre seri ıraksar.

(c) $\boldsymbol{\rho = 1}$**.** $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ serileri, $\rho = 1$ iken, testin sonuçsuz olduğunu gösterir. İlk seri ıraksar ve ikinci seri yakınsar, fakat iki durumda da $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ 'dir. ■

ÖRNEK 3 Kök Testini Uygulamak

Aşağıdaki serilerin hangisi yakınsar, hangisi ıraksar?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$

Çözüm

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ yakınsar, çünkü $\displaystyle\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} \to \frac{1}{2} < 1.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ ıraksar çünkü $\displaystyle\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \to \frac{2}{1} > 1.$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$ yakınsar, çünkü $\displaystyle\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+n}\right)^n} = \frac{1}{1+n} \to 0 < 1.$ ■

ÖRNEK 2 Devamı

$$a_n = \begin{cases} n/2^n, & n \text{ tek} \\ 1/2^n, & n \text{ çift} \end{cases}$$ olsun. $\sum a_n$ yakınsar mı?

Çözüm Kök Testini uygulayarak

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{n}/2, & n \text{ tek} \\ 1/2, & n \text{ çift} \end{cases}$$

buluruz. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

olur. $\sqrt[n]{n} \to 1$ olduğundan (Bölüm 11.1, Teorem 5), Sandviç Teoreminden $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/2$ buluruz. Limit 1'den küçüktür, dolayısıyla Kök Testine göre, seri yakınsar. ■

ALIŞTIRMALAR 11.5

Yakınsaklık veya Iraksaklığı Belirlemek

1–26 alıştırmalarındaki serilerin hangileri yakınsar, hangileri ıraksar? Yanıtlarınızı açıklayın. (Yanıtlarınızı kontrol ederken, bir serinin yakınsaklık veya ıraksaklığını belirlemek için birden fazla yol olabileceğini hatırlayın.)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{1.25^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^n$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{2^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}(n^3)$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n(n+1)!}{3^n n!}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

23. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$

24. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^{(n/2)}}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \ln n}{n(n+2)!}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n}$

27–38 alıştırmalarındaki formüllerle verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serilerinin hangileri yakınsar, hangileri ıraksar? Yanıtlarınızı açıklayın.

27. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1+\sin n}{n} a_n$

28. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1+\tan^{-1} n}{n} a_n$

29. $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{3n-1}{2n+5} a_n$

30. $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$

31. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2}{n} a_n$

32. $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$

33. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1+\ln n}{n} a_n$

34. $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{n+\ln n}{n+10} a_n$

35. $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n}$

36. $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = (a_n)^{n+1}$

37. $a_n = \frac{2^n n! n!}{(2n)!}$

38. $a_n = \frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$

39–44 alıştırmalarındaki serilerin hangileri yakınsar, hangileri ıraksar? Yanıtlarınızı açıklayın.

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{(n^2)}}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2^n)^2}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{4^n 2^n n!}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{[2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)](3^n+1)}$

Teori ve Örnekler

45. p-serilerinde ne Oran ne de Kök Testleri yararlı olur. Bu testleri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

serisinde deneyin ve iki testin de yakınsaklık hakkında bilgi vermediğini gösterin.

46. Ne Oran Testinin ne de Kök Testinin aşağıdaki serinin yakınsaklığı hakkında bilgi vermediğini gösterin.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} \qquad (p \text{ sabit})$$

47. $a_n = \begin{cases} n/2^n, & n \text{ asal bir sayı ise} \\ 1/2^n, & \text{diğer} \end{cases}$ olsun.

$\sum a_n$ yakınsar mı? Yanıtınızı açıklayın.

11.6 Alterne Seriler, Mutlak ve Koşullu Yakınsaklık

Terimleri sırayla pozitif ve negatif olan serilere **alterne seriler** denir.

Aşağıda bunlara üç örnek vardır:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots \quad (1)$$

$$-2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n}4}{2^{n}}+\cdots \quad (2)$$

$$1-2+3-4+5-6+\cdots+(-1)^{n+1}n+\cdots \quad (3)$$

Alterne harmonik seri denilen (1) serisi, birazdan göreceğimiz gibi, yakınsaktır. $r=-1/2$ oranıyla bir geometrik seri olan (2) serisi $-2/[1+(1/2)]=-4/3$'e yakınsar. (3) serisi ıraksaktır çünkü; n. terim sıfıra yaklaşmaz.

Alterne harmonik serilerin yakınsaklığını Alterne Seri Testini uygulayarak göstereceğiz.

TEOREM 14 Alterne Seriler Testi (Leibniz Teoremi)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$$

serisi aşağıdaki üç koşulu da sağlanırsa yakınsar:

1. u_n'lerin hepsi pozitiftir.
2. Her $n \geq N$ için $u_n \geq u_{n+1}$'dir. (N bir tamsayı).
3. $u_n \to 0$.

İspat n bir çift tamsayı ise, mesela $n=2m$, ilk n terimin toplamı

$$\begin{aligned} s_{2m} &= (u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2m-1}-u_{2m}) \\ &= u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2m-2}-u_{2m-1})-u_{2m}. \end{aligned}$$

olur. İlk eşitlik s_{2m}'nin negatif olmayan terimlerin toplamı olduğunu gösterir, çünkü parantez içindeki her terim pozitif veya sıfırdır. Dolayısıyla, $s_{2m+2} \geq s_{2m}$'dir ve $\{s_{2m}\}$ dizisi azalmayandır. İkinci eşitlik $s_{2m} \leq u_1$ olduğunu gösterir. $\{s_{2m}\}$ azalmayan ve üstten sınırlı olduğundan, bir limiti vardır, mesela

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = L \quad (4)$$

n bir tek tamsayı ise, örneğin $n=2m+1$, ilk n terimin toplamı $s_{2m+1}=s_{2m}+u_{2m+1}$ olur. $u_n \to 0$ olduğundan,

$$\lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$$

olur ve $m \to \infty$ iken,

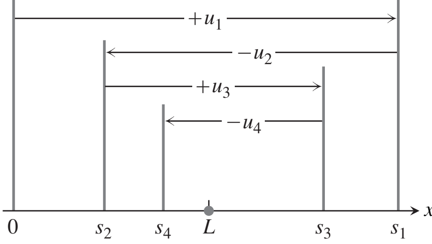
$$s_{2m+1}=s_{2m}+u_{2m+1} \to L+0=L \quad (5)$$

bulunur. (4) ve (5)'in sonuçlarını birleştirmek $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ verir (Bölüm 11.1, Alıştırma 119). ■

ÖRNEK 1 Alterne harmonik seri

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

$N = 1$ ile Teorem 14'ün üç koşulunu sağlar; dolayısıyla yakınsar. ■



ŞEKİL 11.9 $N = 1$ için Teorem 14'ün hipotezlerini sağlayan bir alterne serinin kısmi toplamları baştan itibaren limite iki taraftan yaklaşır.

Kısmi toplamların geometrik bir yorumu (Şekil 11.9), $N = 1$ ile Teorem 14'ün üç koşulu sağlandığında bir alterne serinin L limitine nasıl yakınsadığını göstermektedir. (Alıştırma 63 sizden $N > 1$ durumunu resmetmenizi isteyecektir.) x-ekseninin orijininden başlayarak, $s_1 = u_1$ pozitif mesafesini belirtiriz. $s_2 = u_1 - u_2$'e karşılık gelen noktayı bulmak için, u_2'ye eşit bir mesafe geri gideriz. $u_2 \leq u_1$ olduğundan, orijinden daha geriye gidemeyiz. Serideki işaretlere göre ileri veya geri giderek bu testere şekline devam ederiz. Fakat $n \geq N$ için, her ileri veya geriye adım bir önceki adımdan daha kısadır (veya en fazla aynı boydadır), çünkü $u_{n+1} \leq u_n$'dir. Ve n. terim n arttıkça sıfıra yaklaştığı için, ileri veya geri doğru attığımız adımlar giderek küçülür. L limitinin çevresinde salınırız ve salınımın genliği sıfıra yaklaşır. L limiti herhangi iki ardışık s_n ile s_{n+1} toplamı arasında bulunur ve dolayısıyla s_n'den farkı u_{n+1}'den daha küçük olur.

$$n \geq N \text{ için} \quad |L - s_n| < u_{n+1}$$

olduğundan, yakınsak alterne serilerin toplamları hakkında yararlı tahminler yapabiliriz.

TEOREM 15 Alterne Seriler Tahmin Teoremi

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ alterne serisi Teorem 14'ün üç koşulunu sağlıyorsa, $n \geq N$ için

$$s_n = u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{n+1}u_n$$

kısmi toplamı L'ye, mutlak değeri u_{n+1}'den, ilk kullanılmayan terimin değerinden daha küçük bir hatayla yaklaşımda bulunur. Dahası, $L - s_n$ kalanının işareti, kullanılmayan ilk teriminkiyle aynıdır.

Kalanın işaretinin doğrulanmasını Alıştırma 53'e bırakıyoruz.

ÖRNEK 2 Teorem 15'i toplamını bildiğimiz bir seride deneyelim:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} \;\vdots + \frac{1}{256} - \cdots$$

Teoreme göre, seriyi sekizinci terimde kesersek, pozitif ve $1/256$'dan küçük olan bir miktarı atmış oluruz. İlk sekiz terimin toplamı 0.6640625'tir. Serinin toplamı

$$\frac{1}{1 - (-1/2)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$

olarak bulunur. Fark, $(2/3) - 0.6640625 = 0.0026041666\ldots$ pozitiftir ve $(1/256) = 0.00390625$'ten daha küçüktür. ■

Mutlak ve Koşullu Yakınsaklık

TANIM Mutlak Yakınsaklık

$\sum |a_n|$ mutlak değerler serisi yakınsak ise $\sum a_n$ serisi **mutlak olarak yakınsar** (veya **mutlak yakınsaktır**).

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$$

geometrik serisi mutlak olarak yakınsar, çünkü kendisine karşılık gelen

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

mutlak değerler serisi yakınsaktır. Alterne harmonik seri mutlak yakınsak değildir. Kendisine karşı gelen mutlak değerler serisi (ıraksak) harmonik seridir.

TANIM Koşullu Yakınsaklık

Yakınsak olan, fakat mutlak yakınsak olmayan bir seri **koşullu yakınsaktır.**

Alterne harmonik seri koşullu yakınsaktır.

Mutlak yakınsaklık iki nedenden dolayı önemlidir. İlk olarak, pozitif terimli serilerin yakınsaklığı için iyi testlerimiz vardır. İkincisi, bir seri mutlak olarak yakınsak ise, yakınsaktır. Bu aşağıdaki teoremin temelidir.

TEOREM 16 Mutak Yakınsaklık Testi

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yakınsak ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de yakınsaktır.

İspat Her n için,

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|\text{'dir. Dolayısıyla } 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yakınsak ise, $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ de yakınsaktır ve Doğrudan Karşılaştırma Testine göre, negatif olmayan $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ serisi de yakınsak olur. Artık $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$. eşitliği $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisini iki yakınsak serinin farkı olarak ifade etmemize izin verir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Dolayısıyla, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaktır. ■

DİKKAT Teorem 16'yı her *mutlak yakınsak serinin* yakınsadığını söyleyecek şekilde yeniden ifade edebiliriz. Ancak, bu ifadenin tersi doğru değildir: Çoğu yakınsak seri mutlak olarak yakınsamaz (Örnek 1'deki alterne harmonik seride olduğu gibi).

ÖRNEK 3 Mutlak Yakınsaklık Testini Uygulamak

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots$ 'e karşılık gelen mutlak değerler serisi şöyledir:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Asıl seri yakınsaktır, çünkü mutlak değerler serisi yakınsaktır.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2} = \frac{\sin 1}{1} + \frac{\sin 2}{4} + \frac{\sin 3}{9} + \cdots$ serisine karşılık gelen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| = \frac{|\sin 1|}{1} + \frac{|\sin 2|}{4} + \cdots,$$

mutlak değerler serisi, $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ ile karşılaştırıldığında, yakınsar, çünkü her n için $|\sin n| \leq 1$'dir. Asıl seri mutlak yakınsaktır; dolayısıyla yakınsaktır. ■

ÖRNEK 4 Alterne *p*-serileri

Pozitif bir p-sabiti için $\{1/n^p\}$ dizisi, limiti sıfır olan azalan bir dizidir. Dolayısıyla

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots, \qquad p > 0$$

alterne p-serisi yakınsaktır.

$p > 1$ ise, seri mutlak yakınsaktır. $0 < p \leq 1$ ise, seri koşullu yakınsak olur.

Koşullu yakınsaklık: $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$

Mutlak yakınsaklık: $1 - \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} - \frac{1}{4^{3/2}} + \cdots$ ■

Serileri Yeniden Düzenlemek

TEOREM 17 Mutlak Yakınsak Seriler İçin Yeniden Düzenleme Teoremi

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mutlak yakınsak ise ve $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ $\{a_n\}$ dizisinin herhangi bir düzenlenişi ise, $\sum b_n$ de mutlak yakınsaktır ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

dir.

(İspatın bir taslağı için Alıştırma 60'a bakın.)

ÖRNEK 5 Yeniden Düzenleme Teoremini Uygulamak

Örnek 3'te gördüğümüz gibi

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \cdots$$

serisi mutlak yakınsaktır. Serinin terimlerinin olası bir yeniden düzenlenişi pozitif bir terimle başlayabilir, sonra ilk negatif terim gelebilir, daha sonra üç pozitif terim, sonra dört negatif terim, vs: Aynı işaretli k terimden sonra, zıt işaretli $k + 1$ terim alın. Böyle bir serinin ilk on terimi şöyledir:

$$1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} - \frac{1}{36} - \frac{1}{64} - \frac{1}{100} - \frac{1}{144} + \cdots$$

Yeniden Düzenleme Teoremi iki serinin de aynı değere yakınsadığını söyler. Bu örnekte, başlangıçta elimizde ikinci seri olsaydı, ve yapabileceğimizi bilseydik, muhtemelen onu birinciyle değiştirmekten mutluluk duyardık. Daha iyisini de yapabiliriz: İki serinin her birinin toplamı aynı zamanda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

farkına eşittir. (Alıştırma 61'e bakın.) ■

Koşullu yakınsak bir serinin sonsuz sayıda terimini yeniden düzenlersek, orijinal serininkinden çok farklı sonuçlar elde edebiliriz. Bir örnek aşağıdadır.

ÖRNEK 6 Alterne Harmonik Seriyi Yeniden Düzenlemek

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \cdots$$

Alterne harmonik serisi ıraksayacak veya daha önceden belirlenmiş bir toplam verecek şekilde yeniden düzenlenebilir.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$'yi *ıraksayacak şekilde yeniden düzenlemek.* $\sum[1/(2n-1)]$ serisi $+\infty$'a, $\sum(-1/2n)$ serisi ise $-\infty$'a ıraksar. Tek sayılı terimler dizisinin neresinden başlarsak başlayalım, her zaman keyfi derecede büyük bir toplam elde edecek kadar çok pozitif terim toplayabiliriz. Benzer şekilde, negatif terimlerle de, nereden başlarsak başlayalım, her zaman mutlak değeri keyfi derecede büyük bir negatif toplam elde edecek kadar birbirini izleyen çift sayılı terim toplayabiliriz. Eğer istersek, örneğin +3'ten daha büyük bir toplam elde edene kadar tek sayılı terimler toplayabilir ve yeni toplamı – 4'ten küçük yapacak şekilde yeterli sayıda birbirini izleyen negatif terimlerle devam edebiliriz. Sonra yeni toplamı +5'ten daha büyük yapacak sayıda pozitif terim toplar ve birbirini izleyen kullanılmamış negatif terimler ekleyerek toplamı –6'dan küçük yapabiliriz, vs. Bu şekilde, uzamaları iki tarafta da keyfi derecede büyük yapabiliriz.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ *'yi 1'e yakınsayacak şekilde yeniden düzenlemek.* Başka bir olasılık da belirli bir limitte odaklanmaktır.1'e yakınsayan toplamlar elde etmeye çalıştığımızı varsayın. Birinci terim, $1/1$'le başlar ve bundan $1/2$ çıkarırız. Sonra $1/3$ ve $1/5$ ekleriz, ki bunların toplamı 1 veya 1'den büyük yapar. Sonra toplam 1'den az olana kadar birbirini izleyen negatif terimler ekleriz. Bu şekilde işleme devam ederiz: Toplam 1'den küçük ise, toplam 1 veya daha büyük olana kadar pozitif terimler ekleyin; sonra

toplam yeniden 1'den küçük olana kadar terim çıkarın (negatif terimler ekleyin). Bu işlem sonsuz olarak sürdürülebilir. $n \to \infty$ iken, asıl serinin hem tek sayılı hem de çift sayılı terimleri sıfıra yaklaştığı için, kısmi toplamlarımızın 1'i aştığı veya 1'in altına düştüğü miktar sıfıra yakınsar. Yeniden düzenlenmiş seri şu şekilde başlar:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{10}$$
$$+ \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{12} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} - \frac{1}{14} + \frac{1}{27} - \frac{1}{16} + \cdots$$

Örnek 6'da gösterilen davranış şekli herhangi bir koşullu yakınsak seride olabileceklerin bir örneğidir. Bu nedenle, koşullu yakınsak bir serinin terimlerini daima verilen sırada toplamalıyız.

Şu ana kadar serilerin yakınsaklığı ve ıraksaklığı için birkaç test geliştirdik. Özet olarak:

1. ***n*. Terim Testi:** $a_n \to 0$ olmadıkça seri ıraksar.
2. **Geometrik seri:** $\sum ar^n$ serisi, $|r| < 1$ için yakınsak; aksi halde ıraksaktır.
3. ***p*-serisi:** $\sum 1/n^p$ serisi $p > 1$ için yakınsak; aksi halde ıraksaktır.
4. **Terimleri negatif olmayan seriler:** İntegral Testini, Oran Testini veya Kök Testini deneyin. Karşılaştırma Testine göre, bilinen bir seri ile karşılaştırmayı deneyin.
5. **Bazı terimleri negatif olan seriler:** $\sum |a_n|$ yakınsak mıdır? Evet ise mutlak yakınsaklık yakınsaklığı gerektirdiğinden $\sum a_n$ de yakınsaktır.
6. **Alterne seriler:** Alterne Seriler Testinin koşullarını sağlarsa $\sum a_n$ yakınsaktır.

ALIŞTIRMALAR 11.6

Yakınsaklık veya Iraksaklığı Belirlemek

1–10 alıştırmalarındaki serilerin hangileri yakınsak, hangileri ıraksaktır? Yanıtlarınızı açıklayın.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{3/2}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{10}\right)^n$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{10^n}{n^{10}}$
5. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$
7. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{\ln n^2}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n} + 1}{n + 1}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3\sqrt{n + 1}}{\sqrt{n} + 1}$

Mutlak Yakınsaklık

11–44 alıştırmalarındaki serilerden hangileri mutlak yakınsak, hangileri ıraksaktır? Yanıtlarınızı açıklayın.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (0.1)^n$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(0.1)^n}{n}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \sqrt{n}}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^3 + 1}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{2^n}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n + 3}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\sin n}{n^2}$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3 + n}{5 + n}$
20. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{\ln (n^3)}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 + n}{n^2}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n + 5^n}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} n^2 (2/3)^n$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sqrt[n]{10}\right)$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\tan^{-1} n}{n^2 + 1}$
26. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \ln n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+1}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n-\ln n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-100)^n}{n!}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-5)^{-n}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2n+1}$

32. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{\ln n}{\ln n^2}\right)^n$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)^n}{(2n)^n}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n!)^2}{(2n)!}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n! n}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

40. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$

41. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sech} n$

44. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{csch} n$

Hata Tahmini

45–48 alıştırmalarında, bütün serinin toplamına yaklaşımda bulunmak için serinin ilk dört terimini kullanmanın vereceği hatanın büyüklüğünü bulun.

45. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ Toplamın ln 2 olduğu gösterilebilir.

46. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{10^n}$

47. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{(0.01)^n}{n}$ Bölüm 11.7'de göreceğiniz gibi, toplan ln(1.01)'dir.

48. $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n, \quad 0 < t < 1$

T 49 ve 50 Alıştırmalarındaki toplamlara büyüklüğü 5×10^{-6}'dan daha küçük bir hatayla yaklaşım yapın.

49. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}$ Bölüm 11.9'da göreceğiniz gibi, toplam cos1, yani 1 radyanın kosinüsüdür.

50. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!}$ Bölüm 11.9'da göreceğiniz gibi toplam e^{-1}'dir.

Teori ve Örnekler

51. **a.**
$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{27}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{2^n}+\cdots$$
serisi Teorem 14'ün koşullarından birini sağlamaz. Hangisini?

b. (a) şıkkındaki serinin toplamını bulun.

T 52. Teorem 14'ün koşullarını sağlayan bir alterne serinin limiti, L, ardışık iki kısmi toplam arasında bulunur. Bu, L'yi tahmin etmek için,
$$\frac{s_n + s_{n+1}}{2} = s_n + \frac{1}{2}(-1)^{n+2}a_{n+1}$$
ortalamasını kullanmayı önerir. Alterne harmonik serilerin toplamına bir yaklaşım olarak
$$s_{20} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{21}$$
değerini hesaplayın. Kesin toplam ln 2 = 0.6931…'dır.

53. **Teorem 14'ün koşullarını sağlayan bir alterne serinin kalanının işareti** Teorem 15'te, Teorem 14'ün koşullarını sağlayan bir alterne seriye kısmi toplamlarının biriyle yaklaşım yapıldığında, kalanın (kullanılmamış terimlerin toplamı) işaretinin ilk kullanılmayan teriminkiyle aynı olduğunu söyleyen ifadeyi ispatlayın. (*İpucu*: Kalanın terimlerini birbirini izleyen çiftler halinde gruplayın.)

54.
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$
serisinin ilk $2n$ teriminin toplamının
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots$$
serisinin ilk n teriminin toplamıyla aynı olduğunu gösterin. Bu seriler yakınsar mı? İlk serinin ilk $2n+1$ teriminin toplamı nedir? Seriler yakınsıyorlarsa, toplamları nedir?

55. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksak ise, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$'nin de ıraksak olduğunu gösterin.

56. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mutlak yakınsak ise,
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$
olduğunu gösterin.

57. Hem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hem de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mutlak yakınsak ise, aşağıdakilerin de mutlak yakınsak olduklarını gösterin.

a. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ **b.** $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ (k herhangi bir sayı)

58. Hem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hem de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yakınsak olsalar bile, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$'nin ıraksak olabileceğini örnekle gösterin.

T 59. Örnek 6'da, terimleri yeniden düzenleyerek –1/2'ye yakınsayan yeni bir seri elde etmek istediğimizi varsayın. Yeni düzenlemeye ilk negatif terim, –1/2, ile başlayın. Elinizde ne zaman –1/2'ye eşit veya bundan daha küçük bir toplam varsa, yeni toplam –1/2'den büyük oluncaya kadar birbirini izleyen pozitif terimler

eklemeye başlayın. Sonra yeni toplam $-1/2$'den küçük veya ona eşit oluncaya kadar negatif terimler ekleyin. İşleme kısmi toplamlarınız hedefin en az üç kez üzerine çıkana kadar devam edin ve işlemi hedefte veya hedefin altında bitirin. s_n yeni serinizin ilk n teriminin toplamıysa, (n, s_n) noktalarını işaretleyerek toplamların nasıl davrandıklarını gösterin.

60. Yeniden Düzenleme Teoreminin (Teorem 17) ispatının taslağı

a. ϵ pozitif bir sayı, $L = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ olsun. Bir N_1 indisi ve bir başka $N_2 \geq N_1$ indisi için,

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |a_n| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{ve} \quad |s_{N_2} - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

olduğunu gösterin. Bütün $a_1, a_2, \ldots, a_{N_2}$ terimleri $\{b_n\}$, dizisinin bir yerlerinde ortaya çıktıkları için, $n \geq N_3$ ise $\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) - s_{N_2}$'nin en fazla $m \geq N_1$ koşuluna uygun a_m terimlerinin toplamı olacak şekilde bir $N_3 \geq N_2$ indisi vardır. Dolayısıyla, $n \geq N_3$ ise,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k - L\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} b_k - s_{N_2}\right| + |s_{N_2} - L|$$

$$\leq \sum_{k=N_1}^{\infty} |a_k| + |s_{N_2} - L| < \epsilon .$$

olur.

b. (a) şıkkında söylenenler, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mutlak yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$'nin de yakınsak ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ olduğunu söyler. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yakınsak olduğundan, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$'nin $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$'ye yakınsayacağını gösterin.

61. Mutlak yakınsak serileri ayırmak

a. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yakınsak ise ve

$$b_n = \begin{cases} a_n, & a_n \geq 0 \text{ ise} \\ 0, & a_n < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$'nin yakınsak olduğunu gösterin.

b. (a) şıkkındaki sonucu kullanarak, benzer şekilde, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yakınsak ise ve

$$c_n = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0 \text{ ise} \\ a_n, & a_n < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$'nin yakınsak olduğunu gösterin.

Başka bir deyişle, bir seri mutlak yakınsak ise pozitif terimleri, ve benzer şekilde negatif terimleri, yakınsak bir seri oluşturur. Dahası,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

olur, çünkü $b_n = (a_n + |a_n|)/2$ ve $c_n = (a_n - |a_n|)/2$'dir.

62. Burada yanlış olan nedir?

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots$$

alterne harmonik serisinin iki tarafını da 2 ile çarparak

$$2S = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \frac{2}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

elde edin. Okların gösterdiği gibi, paydaları aynı olan terimleri bir araya toplayarak

$$2S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots .$$

serisini elde edin.

Bu denklemin sağ tarafındaki seri başladığımız seridir. Yani , $2S = S$ olur ve 2 ile bölersek, $2 = 1$ buluruz. (Kaynak: "Riemann's Rearrangement Theorem," Stewart Galanor, *Mathematics Teacher*, Vol.80, No.8, 1987, s. 675-681.)

63. $N > 1$ iken, Teorem 14'teki serinin yakınsaklığını göstermek için Şekil 11.9'dakine benzer bir şekil çizin.

11.7 Kuvvet Serileri

Sonsuz serilerin yakınsaklığını test edebildiğimize göre, bu bölümün başında söz edilen sonsuz polinomları inceleyebiliriz. Bu polinomlara kuvvet serileri deriz, çünkü bir değişkenin, bizim durumumuzda x, kuvvetlerinin sonsuz serileri olarak tanımlanabilirler. Polinomlar gibi, kuvvet serileri de toplanıp, çıkarılıp, çarpılıp, türevleri alınıp, integre edilip yeni kuvvet serileri elde edilebilir.

Kuvvet Serileri ve Yakınsaklık

Formel tanımla işe başlıyoruz.

TANIMLAR **Kuvvet Serileri, Merkez, Katsayılar**

$x = 0$ civarında bir kuvvet serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots. \tag{1}$$

şeklinde bir seridir.

$x = a$ civarında bir kuvvet serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \tag{2}$$

şeklinde bir seridir. Burada **merkez** a ve **katsayılar** $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabitlerdir.

(1) denklemi (2) denkleminde $a = 0$ alınarak elde edilen özel bir durumdur.

ÖRNEK 1 Bir Geometrik Seri

(1) denklemindeki bütün katsayıları 1 almak

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots.$$

geometrik kuvvet serisini verir. Bu, ilk terimi 1 ve oranı x olan geometrik seridir. $|x| < 1$ için $1/(1-x)$'e yakınsar. Bunu

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \qquad -1 < x < 1. \tag{3}$$

■

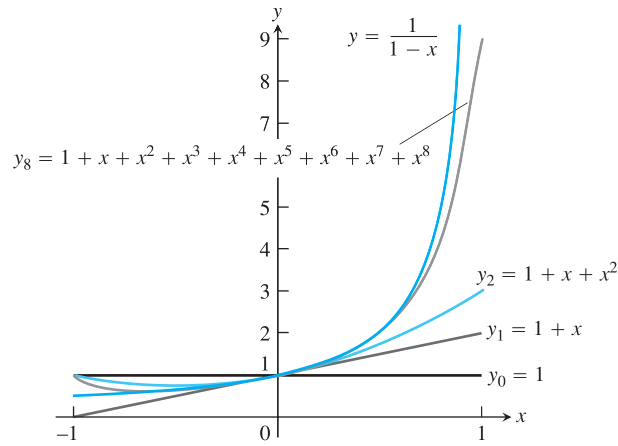
yazarak ifade ederiz.

Şimdiye kadar (3) denklemini sağ taraftaki serinin toplamının bir formülü olarak yazdık. Şimdi odağımızı değiştiriyoruz: Sağ taraftaki serinin kısmi toplamlarını soldaki fonksiyona yaklaşımda bulunan $P_n(x)$ polinomları olarak düşünüyoruz. Sıfır civarındaki x değerlerinde, iyi yaklaşım için serinin sadece birkaç terimini almamız yeterlidir. $x = 1$ veya -1'e doğru ilerlerken, daha fazla terim almamız gerekir. Şekil 11.10 $f(x) = 1/(1-x)$ fonksiyonunun ve $n = 0, 1, 2$ ve 8 için $y_n = P_n(x)$ yaklaşım polinomlarının grafiklerini göstermektedir. $f(x) = 1/(1-x)$ fonksiyonu, dikey asimptotunun bulunduğu $x = 1$'i içeren aralıklarda sürekli değildir. Bu nedenle yaklaşımlar $x \geq 1$ için uygulanamaz.

ÖRNEK 2 Bir Geometrik Seri

$$1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots \tag{4}$$

kuvvet serisi, $a = 2$, $c_0 = 1$, $c_1 = -1/2$, $c_2 = 1/4$, … , $c_n = (-1/2)^n$ ile (2) denklemine uyar. Bu, ilk terimi 1 ve oranı $r = -\dfrac{x-2}{2}$ olan bir geometrik seridir. Bu seri



ŞEKİL 11.10 $f(x) = 1/(1-x)$ ve polinom yaklaşımlarından dördünün grafikleri (Örnek 1).

$\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$ veya $0 < x < 4$ için yakınsar. Toplamı

$$\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1 + \frac{x-2}{2}} = \frac{2}{x}$$

olarak bulunur, dolayısıyla

$$\frac{2}{x} = 1 - \frac{(x-2)}{2} + \frac{(x-2)^2}{4} - \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots, \qquad 0 < x < 4$$

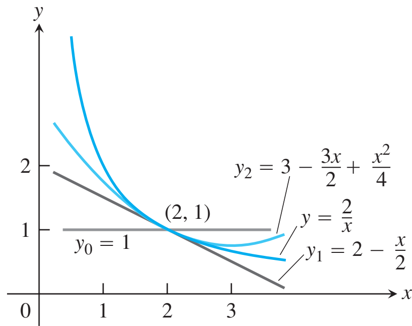
olur. (4) serisi 2 civarındaki x değerleri için $f(x) = 2/x$'e kullanışlı polinom yaklaşımları üretir:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2) = 2 - \frac{x}{2}$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 = 3 - \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{4}$$

gibi (Şekil 11.11). ■



ŞEKİL 11.11 $f(x) = 2/x$ ve ilk üç polinom yaklaşımının grafikleri (Örnek 2).

ÖRNEK 3 Oran Testini Kullanarak Yakınsaklığı Test Etmek

Aşağıdaki kuvvet serileri hangi x değerleri için yakınsar?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$

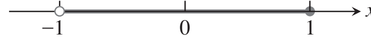
(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + x + 2! x^2 + 3! x^3 + \cdots$

Çözüm u_n, söz konusu serinin n. terimi olmak üzere $\Sigma|u_n|$ serisine Oran Testini uygulayın.

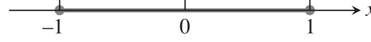
(a) $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{n}{n+1}|x| \rightarrow |x|.$

Seri, $|x| < 1$ için mutlak yakınsaktır. $|x| > 1$ ise ıraksaktır, çünkü n. terim sıfıra yakınsamaz. $x = 1$'de, yakınsak olan alterne harmonik seriyi, $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots$, elde ederiz. $x = -1$'de, harmonik serinin negatifini, $-1 - 1/2 - 1/3 - 1/4 - \ldots$, buluruz, ki bu seri ıraksar. (a) serisi $-1 < x \leq 1$ için yakınsaktır, başka yerlerde ise ıraksak olur.



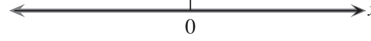
(b) $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{2n-1}{2n+1}x^2 \rightarrow x^2.$

Seri, $x^2 < 1$ için mutlak yakınsaktır. $x^2 > 1$ için ıraksaktır çünkü n. terim sıfıra yakınsamaz. $x = 1$'de, Alterne Seri Teoremine göre yakınsak olan $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots$ serisini elde ederiz. Seri $x = -1$'de de yakınsar, çünkü yakınsaklık koşullarını sağlayan bir alterne seri verir. $x = -1$'deki değer, $x = 1$'deki değerin negatifidir. (b) serisi $-1 \leq x \leq 1$ için yakınsak, başka yerlerde ıraksaktır.



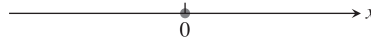
(c) $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{x^n}\right| = \dfrac{|x|}{n+1} \rightarrow 0$ her x için.

Seri, her x için mutlak yakınsaktır.



(d) $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = (n+1)|x| \rightarrow \infty$ $x = 0$ değilse.

Seri, $x = 0$ hariç her x değeri için ıraksaktır.



■

Örnek 3 genelde kuvvet serilerinin yakınsaklığını nasıl test ettiğimizi ve olası sonuçları göstermektedir.

TEOREM 18 Kuvvet Serileri İçin Yakınsaklık Teoremi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

$x = c \neq 0$ için yakınsak ise, her $|x| < |c|$ için mutlak yakınsaktır. Seri, $x = d$ için ıraksak ise her $|x| > |d|$ için ıraksaktır.

İspat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ serisinin yakınsadığını varsayın. Bu durumda, $\lim_{n\to\infty} a_n c^n = 0$ olur. Dolayısıyla, her $n \geq N$ için, $|a_n c^n| < 1$ olmasını sağlayacak bir N tamsayısı vardır. Yani,

$$n \geq N \text{ için} \qquad |a_n| < \frac{1}{|c|^n} \tag{5}$$

olur. Şimdi $|x| < |c|$ olacak şekilde bir x alın ve

$$|a_0| + |a_1 x| + \cdots + |a_{N-1}x^{N-1}| + |a_N x^N| + |a_{N+1}x^{N+1}| + \cdots$$

toplamını düşünün. $|a_N x^N|$'den önce sonlu sayıda terim vardır ve toplamları da sonludur. $|a_N x^N|$ ve bundan sonraki terimlerin toplamı, (5)'ten dolayı,

$$\left|\frac{x}{c}\right|^N + \left|\frac{x}{c}\right|^{N+1} + \left|\frac{x}{c}\right|^{N+2} \cdots \tag{6}$$

toplamından küçüktür. Fakat (6) serisi, $|x| < |c|$ olduğundan, $r = |x/c|$ oranı 1'den küçük olan bir geometrik seridir. Bu yüzden, (6) serisi yakınsaktır ve dolayısıyla asıl seri mutlak yakınsaktır. Bu teoremin ilk yarısını ispatlar.

Teoremin ikinci yarısının ispatı birinci yarının ispatından çıkar. Seri, $x = d$'de ıraksak ise ve $|x_0| > |d|$ olacak şekilde bir x_0 değerinde yakınsak ise teoremin ilk kısmında $c = x_0$ alabilir ve serinin $x = d$'de mutlak yakınsak olduğu sonucunu çıkarabiliriz. Fakat seri aynı anda hem mutlak yakınsak, hem de ıraksak olamaz. Dolayısıyla, d'de ıraksak ise, her $|x| > |d|$ için ıraksaktır. ■

Notasyonu basitleştirmek için, Teorem 18'de $\sum a_n x^n$ formundaki serilerin yakınsaklıklarını göz önüne aldık. $\sum a_n (x-a)^n$ formundaki seriler için $x - a$'yı x' ile değiştirip sonuçları $\sum a_n (x')^n$ serisine uygulayabiliriz.

Bir Kuvvet Serisinin Yakınsaklık Yarıçapı

İspatladığımız teorem ve incelediğimiz örnekler, bir $\sum c_n (x-a)^n$ kuvvet serisinin aşağıdaki üç şekilden birine uygun davrandığı sonucunu verir. Seri sadece $x = a$ için yakınsak veya her yerde yakınsak olabilir ya da $x = a$ merkezli R yarıçaplı bir aralık üzerinde yakınsak olabilir. Bunu, Teorem 18'in bir sonucu olarak ispat ediyoruz.

TEOREM 18'İN SONUCU

$\sum c_n (x-a)^n$ serisinin yakınsaklığı aşağıdaki üç durumdan biri ile açıklanır.

1. Serinin $|x - a| > R$ koşulunu sağlayan x'ler için ıraksak, fakat $|x - a| < R$ koşulunu sağlayan x'ler için mutlak yakınsak olduğu pozitif bir R sayısı vardır. Seri, $x = a - R$ ve $x = a + R$ uç noktalarının her birinde yakınsak olabilir veya olmayabilir.
2. Seri her x için mutlak yakınsaktır ($R = \infty$).
3. Seri $x = a$'da yakınsak ve başka her yerde ıraksaktır ($R = 0$).

İspat Önce, $a = 0$ ve dolayısıyla kuvvet serisinin merkezinin 0 olduğunu kabul edelim. Seri her yerde yakınsak ise Durum 2 söz konusudur. Seri sadece $x = 0$ da yakınsak ise Durum 3 söz konusudur. Bunlar dışında, $\sum c_n d^n$ serisinin ıraksak olduğu, sıfırdan farklı bir d sayısı vardır. $\sum c_n x^n$ serisinin yakınsak olduğu x değerlerinin kümesi, S, boş küme değildir. Çünkü 0'ı ve bir p pozitif sayısını içerir. Teorem 18'e göre seri $|x| > |d|$, koşulunu sağlayan her x için ıraksaktır ve bu nedenle her x P S için $|x| \le |d|$ 'dir ve dolayısıyla S sınırlı bir kümedir. Reel sayıların Tamlık Özelliğine göre (Ek 4'e bakın) boş olmayan sınırlı bir kümenin bir en küçük üst sınırı, R, vardır. (En küçük üst sınır, x P S elemanları için $x \le R$ eşitsizliğinin sağlandığı en küçük sayıdır.) $|x| > R \ge p$, ise $x \notin S$ dir ve dolayısıyla $\sum c_n x^n$ serisi ıraksaktır. $|x| < R$ ise $|x|$ S kümesi için bir üst sınır değildir (çünkü en küçük üst sınırdan küçüktür) bu nedenle $b > |x|$ olacak şekilde bir b P S sayısı vardır. b P S olduğundan $\sum c_n b^n$ serisi yakınsaktır ve bundan dolayı Teorem 18'e göre, $\sum c_n |x|^n$ serisi yakınsaktır. Bununla, $a = 0$ merkezli kuvvet serileri için Sonuç ispatlanmış olur.

$a \ne 0$ merkezli bir kuvvet serisi için $x' = (x - a)$ yazarız ve yukarıdakileri x' ile tekrar ederiz. $x = a$ için $x' = 0$ olduğundan, $x' = 0$ merkezli $\sum c_n (x')^n$ serisinin R yarıçaplı bir yakınsaklık aralığı ile $x = a$ merkezli $\sum c_n (x - a)^n$ serisinin R yarıçaplı yakınsaklık aralığı aynıdır. Bu, genel durum için Sonucu ispatlar. ■

R'ye kuvvet serisinin **yakınsaklık yarıçapı**, $x = a$ merkezli ve R yarıçaplı aralığa **yakınsaklık aralığı** denir. Yakınsaklık aralığı seriye bağlı olarak açık, kapalı veya yarı açık olabilir. $|x - a| < R$ koşulunu sağlayan x'ler için seri mutlak yakınsaktır. Seri her x değeri için yakınsak ise yakınsaklık yarıçapı sonsuzdur deriz. Seri sadece $x = a$'da yakınsak ise yakınsaklık yarıçapı sıfırdır deriz.

Bir Kuvvet Serisinin Yakınsaklığını Test Etmek

1. *Serinin mutlak yakınsak olduğu aralığı bulmak için Oran testini (veya n. Kök Testini) kullanın*. Doğal olarak bu bir açık aralıktır,

$$|x - a| < R \qquad \text{veya} \qquad a - R < x < a + R.$$

2. *Mutlak yakınsaklık aralığı sonlu ise her bir uç noktada yakınsaklığı veya ıraksaklığı test edin* , (Örnek 3a ve b'deki gibi). Bir Karşılaştırma Testi, İntegral Testi veya Alterne Seri Testi kullanın.
3. *Mutlak yakınsaklık aralığı* $a - R < x < a + R$ *ise* $|x - a| > R$ *için seri ıraksaktır* (koşullu yakınsak bile değildir), çünkü x'in bu değerleri için n.terim sıfıra yakınsamaz.

Terim-Terime Türetme

İleri analizin bir teoremi bir kuvvet serisinin yakınsaklık aralığının her iç noktasında terim-terime türetilebileceğini söyler.

TEOREM 19 Terim-Terime Türetme Teoremi

$\sum c_n(x-a)^n$ serisi bir $R > 0$ için, $a - R < x < a + R$ aralığında yakınsak ise bir f fonksiyonu tanımlar:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \qquad a - R < x < a + R.$$

Böyle bir f fonksiyonunun yakınsaklık aralığı içinde her mertebeden türevi vardır. Türevleri, esas seriyi terim-terime türeterek elde edebiliriz:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}$$

vs. Türev alarak elde edilmiş her seri, esas serinin yakınsaklık aralığının her iç noktasında yakınsaktır.

ÖRNEK 4 Terim-Terime Türetmeyi Uygulamak

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad -1 < x < 1$$

ise $f'(x)$ ve $f''(x)$ serilerini bulun.

Çözüm

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \qquad -1 < x < 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \cdots$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, \qquad -1 < x < 1$$

■

DİKKAT Terim-terime türev alma başka tür seriler için işe yaramayabilir. Örneğin, trigonometrik

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n^2}$$

serisi her x için yakınsar. Fakat terim-terime türev alırsak, her x için ıraksak olan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cos(n!x)}{n^2},$$

serisini buluruz. Bu, x'in pozitif kuvvetlerinin bir toplamı olmadığından, bir kuvvet serisi değildir.

Terim-Terime İntegrasyon

İleri analizin başka bir teoremi bir kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı içinde terim-terime integre edilebileceğini söyler.

TEOREM 20 **Terim-Terime İntegrasyon Teoremi**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

fonksiyonunun $a - R < x < a + R$ ($R > 0$) aralığında yakınsak olduğunu varsayın. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

de $a - R < x < a + R$ aralığında yakınsak olur ve $a - R < x < a + R$ için

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

olur.

ÖRNEK 5 $\tan^{-1} x$, $-1 \le x \le 1$ için bir seri

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \qquad -1 \le x \le 1$$

fonksiyonunu tanımlayın.

Çözüm Orijinal seriyi terim-terime türeterek

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \qquad -1 < x < 1$$

buluruz. Bu, birinci terimi 1 ve oranı $-x^2$ olan bir geometrik seridir, o yüzden

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

olur. Artık $f'(x) = 1/(1+x^2)$'yi integre ederek

$$\int f'(x)\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$$

bulabiliriz. $x = 0$ iken, $f(x)$ serisi sıfırdır, bu yüzden $C = 0$ olur. Böylece

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \tan^{-1} x, \qquad -1 < x < 1 \tag{7}$$

elde ederiz. Bölüm 11.10'da, serinin $x = \pm 1$'de de $\tan^{-1} x$'e yakınsadığını göstereceğiz. ■

Şuna dikkat edin Örnek 5'teki orijinal seri yakınsaklık aralığının her iki uç noktasında da yakınsaktır, fakat Teorem 20 türevi alınmış serinin sadece aralığın iç noktalarındaki yakınsaklığını garanti eder.

ÖRNEK 6 $\ln(1 + x),\ -1 < x \leq 1$ için bir seri

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$$

serisi $-1 < t < 1$ açık aralığında yakınsaktır. Dolayısıyla,

$$\ln(1 + x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots\Big]_0^x \qquad \text{Teorem 20}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \qquad -1 < x < 1$$

bulunur. Ayrıca serinin $x = 1$'de $\ln 2$ sayısına yakınsadığı da gösterilebilir, fakat teorem bunu garantilemez. ■

TEKNOLOJİ KULLANMAK Serilerin İncelenmesi

Seriler bir çok yönden integrallere benzer. Elemanter fonksiyonlar cinsinden açık ters türevleri var olan fonksiyonların sayısının, integre edilebilir fonksiyonların sayısına oranla küçük olması gibi, x-aralıklarında açık elemanter fonksiyonlarla uyuşan x'in kuvvet serilerinin sayısı da bir x-aralığında yakınsak olan kuvvet serilerinin sayısının yanında küçüktür. Grafik çizme araçları böyle serilerin incelenmesinde, sayısal integrasyonun belirli integrallerin incelenmesinde yardımcı olduğu gibi, yardımcı olabilir. x'in belirli değerlerinde kuvvet serilerini inceleme becerisi çoğu Bilgisayarlı Cebir Sistemi'nin içine yerleştirilmiştir.

Bir seri yeterince hızlı yakınsıyorsa, BCS araştırması bize toplam hakkında bir fikir verebilir. Örneğin, $\sum_{k=1}^{\infty}[1/(2^{k-1})]$ serisinin ilk kısmi toplamlarını hesaplarken (Bölüm 11.4, Örnek 2b), Maple, $31 \leq n \leq 200$ için $S_n = 1.606695152$ verir. Bu, serinin toplamının 10 ondalık basamak hassaslıkla 1.606695152 olduğunu belirtir. Gerçekten de,

$$\sum_{k=201}^{\infty} \frac{1}{2^k - 1} = \sum_{k=201}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}(2 - (1/2^{k-1}))} < \sum_{k=201}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{199}} < 1.25 \times 10^{-60}.$$

bulunur. 200 terimden sonraki kalan ihmal edilebilir.

Ancak, BCS ve hesap makinesi araştırmaları, seriler çok yavaş yakınsıyor veya ıraksıyor ise, bizim için fazla bir şey yapamazlar ve gerçekte fazlasıyla yanıltıcı olabilirler. Örneğin, $\sum_{k=1}^{\infty}[1/(10^{10}k)]$ serisinin kısmi toplamlarını hesaplamayı deneyin. Terimler bizim genellikle çalıştığımız sayılara nazaran çok küçüktür ve kısmi toplamlar, yüzlerce terimden oluşsalar bile, çok küçüktürler. Serinin yakınsadığını düşünmek hatasına bile düşebiliriz. Aslında, seriyi $(1/10^{10})\sum_{k=1}^{\infty}(1/k)$ şeklinde yazarak görebileceğimiz gibi, seri ıraksaktır.

Bölüm 11.9'da hata tahminlerini öğrendikten sonra, sayısal sonuçları nasıl yorumlayacağımızı daha iyi anlayacağız.

Kuvvet Serilerinin Çarpımı

Yine ileri analizin başka bir teoremi mutlak yakınsak kuvvet serilerinin polinomları çarptığımız gibi çarpılabileceğini söyler.

TEOREM 21 Kuvvet Serileri İçin Seri Çarpım Teoremi
$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ serileri $|x| < R$ için mutlak yakınsak ise ve

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ serisi $|x| < R$ için mutlak yakınsaktır ve $A(x)B(x)$'e yakınsar:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

ÖRNEK 7

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1 \text{ için}$$

geometrik serisini kendisiyle çarparak, $|x| < 1$ için, $1/(1-x)^2$'nin kuvvet serisini bulun.

Çözüm

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = 1/(1-x)$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = 1/(1-x)$$

ve

$$c_n = \underbrace{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_k b_{n-k} + \cdots + a_n b_0}_{n+1 \text{ terim}}$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1 \text{ tane bir}} = n + 1$$

olsun. Bu durumda, Serilerin Çarpımı Teoremine göre,

$$A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$$

$1/(1-x)^2$'nin serisidir. Seri $|x| < 1$ için mutlak yakınsaktır.

Örnek 4'ün,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

olduğu için, aynı sonucu verdiğine dikkat edin. ■

ALIŞTIRMALAR 11.7

Yakınsaklık Aralıkları

1–32 alıştırmalarında **(a)** serilerin yakınsaklık yarıçaplarını ve aralıklarını bulun. Seriler hangi x değerlerinde **(b)** mutlak ve **(c)** koşullu yakınsaktırlar?

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ **2.** $\sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(4x+1)^n$ **4.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$ **6.** $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$ **8.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+2)^n}{n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}\,3^n}$ **10.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ **12.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$ **14.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^{2n+1}}{n!}$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$ **16.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}$ **18.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n(n^2+1)}$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}x^n}{3^n}$ **20.** $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}(2x+5)^n$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$ **22.** $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)x^n$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ **24.** $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-4)^n$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+2)^n}{n2^n}$ **26.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n(n+1)(x-1)^n$

27. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}$ $\sum 1/(n(\ln n)^2)$ hakkında gerek duyduğunuz bütün bilgiyi Bölüm 11.3, Alıştırma 39'dan elde edebilirsiniz.

28. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$ $\sum 1/(n \ln n)$ hakkında gerek duyduğunuz bütün bilgiyi Bölüm 11.3, Alıştırma 38'den elde edebilirsiniz.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}}$ **30.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^{n+1}}{2n+2}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+\pi)^n}{\sqrt{n}}$ **32.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-\sqrt{2})^{2n+1}}{2^n}$

33–38 alıştırmalarında serilerin yakınsaklık aralıklarını ve bu aralıkta, serinin toplamını x'in bir fonksiyonu olarak bulun.

33. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4n}$ **34.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{9^n}$

35. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2}-1\right)^n$ **36.** $\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

37. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n$ **38.** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n$

Teori ve Örnekler

39. Hangi x değerlerinde

$$1-\frac{1}{2}(x-3)+\frac{1}{4}(x-3)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x-3)^n+\cdots$$

serisi yakınsaktır? Toplamı nedir? Verilen serinin terim-terime türevini alırsanız hangi seriyi bulursunuz? Yeni seri hangi x değerlerinde yakınsaktır? Toplamı nedir?

40. Alıştırma 39'daki seriyi terim-terime integre ederseniz hangi seriyi elde edersiniz? Yeni seri x'in hangi değerleri için yakınsaktır ve toplamının bir başka adı nedir?

41.

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\cdots$$

serisi her x için $\sin x$'e yakınsar.

a. $\cos x$ için, bir serinin ilk altı terimini bulun. Bu seri x'in hangi değerleri için yakınsak olmalıdır?

b. $\sin x$ serisinde x yerine $2x$ alarak, her x için $\sin 2x$'e yakınsayan bir seri bulun.

c. (a) şıkkındaki sonucu ve seri çarpımını kullanarak, $2 \sin x \cos x$ için, bir serisinin ilk altı terimini bulun. Yanıtınızı (b) şıkkındaki yanıtla karşılaştırın.

42.

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

serisi her x için e^x'e yakınsar.

a. $(d/dx)e^x$ için bir seri bulun. e^x serisini buluyor musunuz? Yanıtınızı açıklayın.

b. $\int e^x\,dx$ için bir seri bulun. e^x serisini buluyor musunuz? Yanıtınızı açıklayın.

c. e^x serisinde x yerine $-x$ alarak her x için e^{-x}'e yakınsayan bir seri bulun. Sonra e^x ile e^{-x} serilerini çarparak $e^{-x} \cdot e^x$.

43.

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \cdots$$

serisi $-\pi/2 < x < \pi/2$ için tan x'e yakınsar.

a. $\ln|\sec x|$ serisinin ilk beş terimini bulun. Bu seri x'in hangi değerleri için yakınsak olmalıdır?

b. $\sec^2 x$ serisinin ilk beş terimini bulun. Bu seri x'in hangi değerleri için yakınsak olmalıdır?

c. (b)'deki yanıtınızı sec x'in Alıştırma 44'te verilen serisinin karesini alarak kontrol edin.

44.

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \cdots$$

serisi $-\pi/2 < x < \pi/2$ için sec x'e yakınsar.

a. $\ln|\sec x + \tan x|$ fonksiyonunun kuvvet serisinin ilk beş terimini bulun. Bu seri x'in hangi değerleri için yakınsak olmalıdır?

b. sec x tan x için, bir serinin ilk dört terimini bulun. Bu seri hangi x değerleri için yakınsak olmalıdır?

c. (b) şıkkındaki sonucunuzu sec x serisini Alıştırma 43' te tan x için verilen seriyle çarparak kontrol edin.

45. Yakınsak kuvvet serilerinin tekliği

a. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ kuvvet serileri yakınsak iseler ve bir $(-c, c)$ açık aralığındaki her x değeri için eşit iseler, her n için $a_n = b_n$ olduğunu gösterin. (*İpucu*: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ olsun. Terim-terime türetin, a_n ve b_n'nin ikisinin de $f^{(n)}(0)/(n!)$'e eşit olduğunu gösterin.)

b. Bir $(-c, c)$ açık aralığındaki her x için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ ise, her n için $a_n = 0$ olduğunu gösterin.

46. $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2/2^n)$ serisinin toplamı Serinin toplamını bulmak için, $1/(1-x)$'i geometrik seri olarak ifade edin, ortaya çıkan denklemin iki tarafının da x'e göre türevini alın, sonucun iki tarafını da x ile çarpın, yeniden türev alın ve tekrar x ile çarpın, x yerine 1/2 yazın. Ne buluyorsunuz? (Kaynak: David E. Dobbs'un editöre mektubu, *Illinois Mathematics Teacher*, Vol. 33, Sayı 4, 1982, sayfa 27.)

47. Uç noktalarda yakınsaklık Bir kuvvet serisinin yakınsaklık aralığının uç noktalarındaki yakınsaklığının koşullu veya mutlak olabileceğini örneklerle gösterin.

48. Yakınsaklık aralığı aşağıda gibi olan bir kuvvet serisi kurun.

a. $(-3, 3)$ **b.** $(-2, 0)$ **c.** $(1, 5)$.

11.8 Taylor ve Maclaurin Serileri

Bu bölüm, sonsuz defa türetilebilen fonksiyonların, Taylor serisi denilen kuvvet serilerini nasıl oluşturduklarını göstermektedir. Çoğu durumda, bu seriler üretici fonksiyonların kullanışlı polinom yaklaşımlarını sağlayabilir.

Seri Temsili

Teorem 19'dan, yakınsaklık aralığı içinde bir kuvvet serisinin toplamının her mertebeden türevi var olan sürekli bir fonksiyon olduğunu biliyoruz. Fakat ya tersi? Bir $f(x)$ fonksiyonunun bir I aralığında her mertebeden türevi varsa, I'da bir kuvvet serisi olarak ifade edilebilir mi? Ve edilebilirse, katsayıları ne olacaktır?

$f(x)$'in, yakınsaklık yarıçapı pozitif olan bir

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \\ &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

kuvvet serisinin toplamı olduğunu varsayarsak, son soruya hemen cevap verebiliriz. I yakınsaklık aralığında art arda terim-terime türev alarak,

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + \cdots \\ f''(x) &= 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-a) + 3\cdot 4a_4(x-a)^2 + \cdots \\ f'''(x) &= 1\cdot 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x-a) + 3\cdot 4\cdot 5a_5(x-a)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

elde ederiz.

Burada, n. türev, her n için

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (x - a) \text{ çarpanını içeren terimlerin bir toplamı}$$

ile verilir.
Bu denklemlerin hepsi $x = a$'da sağlandığından,

$$\begin{aligned} f'(a) &= a_1, \\ f''(a) &= 1 \cdot 2a_2, \\ f'''(a) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 \end{aligned}$$

ve genel olarak

$$f^{(n)}(a) = n!a_n$$

elde ederiz. Bu formüller, f'nin I aralığındaki değerlerine yakınsayan ("f'yi I'da temsil eden" deriz) herhangi bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ kuvvet serisinin katsayılarında harika bir kalıp ortaya çıkarır. Böyle bir seri varsa (bu hala açık bir sorudur), sadece bir tane vardır ve n. katsayısı

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

dir. f'nin bir seri temsili varsa, bu

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \cdots \qquad (1)$$

olmalıdır. Fakat, merkezi $x = a$'da bulunan bir I aralığında sonsuz defa türetilebilen keyfi bir f fonksiyonuyla işe başlarsak ve bunu (1) denklemindeki seriyi üretmekte kullanırsak, seri I'nın içindeki her x için $f(x)$'e yakınsar mı? Yanıt belkidir—bazı fonksiyonlar için yakınsayacak, fakat göreceğimiz gibi, bazıları için yakınsamayacaktır.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Brook Taylor
(1685–1731)

Colin Maclaurin
(1698–1746)

Taylor ve Maclaurin Serileri

TANIMLAR **Taylor Serileri , Maclaurin Serileri**

f, a'yı bir iç nokta olarak içeren bir aralıkta her mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. **f tarafından $x = a$'da üretilen Taylor serisi**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \cdots$$

olarak tanımlanır. **f tarafından üretilen Maclaurin serisi** ise

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

ile verilir, yani f'nin $x = 0$'da ürettiği Taylor serisidir.

f tarafından üretilen Maclaurin serisine genelde sadece f'nin Taylor serisi denir.

ÖRNEK 1 Bir Taylor Serisi Bulmak

$f(x) = 1/x$ fonksiyonunun $a = 2$'de ürettiği Taylor serisini bulun. Eğer yakınsak ise seri nerede $1/x$'e yakınsar?

Çözüm $f(2), f'(2), f''(2), \ldots$ katsayılarını bulmamız gerekir. Türev alarak,

$$f(x) = x^{-1}, \qquad f(2) = 2^{-1} = \frac{1}{2},$$

$$f'(x) = -x^{-2}, \qquad f'(2) = -\frac{1}{2^2},$$

$$f''(x) = 2!x^{-3}, \qquad \frac{f''(2)}{2!} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3},$$

$$f'''(x) = -3!x^{-4}, \qquad \frac{f'''(2)}{3!} = -\frac{1}{2^4},$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}, \qquad \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

elde ederiz. Taylor serisi

$$f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \cdots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \cdots$$

şeklindedir. Bu sabit terimi $1/2$ ve oranı $r = -(x-2)/2$ olan bir geometrik seridir. $|x-2| < 2$ için mutlak yakınsaktır ve toplamı

$$\frac{1/2}{1 + (x-2)/2} = \frac{1}{2 + (x-2)} = \frac{1}{x}$$

olarak bulunur. Bu örnekte, $f(x) = 1/x$'in $a = 2$'de ürettiği Taylor serisi, $|x-2| < 2$ veya $0 < x < 4$ için $1/x$'e yakınsar. ■

Taylor Polinomları

Türevlenebilir bir f fonksiyonunun a noktasındaki lineerizasyonu

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

ile verilen polinomdur. Bölüm 3.8'de, a'ya yakın x değerlerinde $f(x)$'e yaklaşmak için bu lineerizasyonu kullandık. f'nin a'da daha yüksek mertebeden türevleri varsa, elde edilebilen her türev için, f'nin daha yüksek mertebeden polinom yaklaşımları da bulunur. Bu polinomlara f'nin Taylor polinomları denir.

TANIM **n. Mertebe Taylor Polinomu**

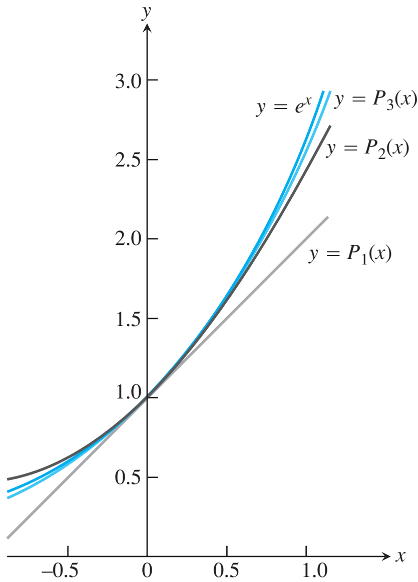
f, a'yı iç nokta olarak içeren bir aralıkta k. mertebeden, $k = 1, 2, \ldots, N$, türevleri var olan bir fonksiyon olsun. 0'dan N'ye kadar olan herhangi bir n tam sayısı için f'nin $x = a$'da ürettiği **n. mertebe Taylor polinomu**

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ile verilir.

Bir Taylor polinomundan bahsederken, n. dereceden yerine, n. mertebeden diyoruz, çünkü $f^{(n)}(a)$ sıfır olabilir. Örneğin, $f(x) = \cos x$'in $x = 0$'daki ilk iki Taylor polinomu $P_0(x) = 1$ ve $P_1(x) = 1$'dir. Birinci mertebe polinomun derecesi 1 değil, sıfırdır.

f'nin $x = a$'daki lineerizasyonunun, a'nın bir komşuluğunda f'nin en iyi lineerizasyonunu vermesi gibi, yüksek mertebe Taylor polinomları da kendi derecelerine göre en iyi polinom yaklaşımlarını verirler. (Alıştırma 32'ye bakın.)



ŞEKİL 11.12 $f(x) = e^x$ fonksiyonunun ve Taylor polinomlarının grafikleri.
$P_1(x) = 1 + x$
$P_2(x) = 1 + x + (x^2/2!)$
$P_3(x) = 1 + x + (x^2/2!) + (x^3/3!)$
Merkez, $x = 0$ civarındaki yakın uyuma dikkat edin (Örnek 2).

ÖRNEK 2 e^x için Taylor polinomları Bulmak

$f(x) = e^x$'in $x = 0$'da ürettiği Tayor serisini ve Taylor polinomlarını bulun.

Çözüm

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) = e^x, \quad \ldots$$

olduğundan

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = 1, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(0) = 1, \quad \ldots.$$

buluruz. f'nin $x = 0$'da ürettiği Taylor serisi

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

olarak elde edilir. Bu aynı zamanda e^x'in Maclaurin serisidir. Bölüm 11.9' da, serinin her x için e^x'e yakınsadığını göreceğiz.

$x = 0$'daki n. mertebe Taylor polinomu

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

ile verilir. Şekil 11.12'ye bakın. ■

ÖRNEK 3 cos x için Taylor polinomları Bulmak

$f(x) =$ cos x'in $x = 0$'da ürettiği Taylor serisi ve polinomlarını bulun.

Çözüm Kosinüs ve türevleri şöyledir:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos x, & f'(x) &= -\sin x, \\
f''(x) &= -\cos x, & f^{(3)}(x) &= \sin x, \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \cos x, & f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^{n+1} \sin x.
\end{aligned}
$$

$x = 0$'da, kosinüsler 1 ve sinüsler 0, dolayısıyla

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n, \qquad f^{(2n+1)}(0) = 0$$

olur. f'nin $x = 0$'da ürettiği Taylor serisi

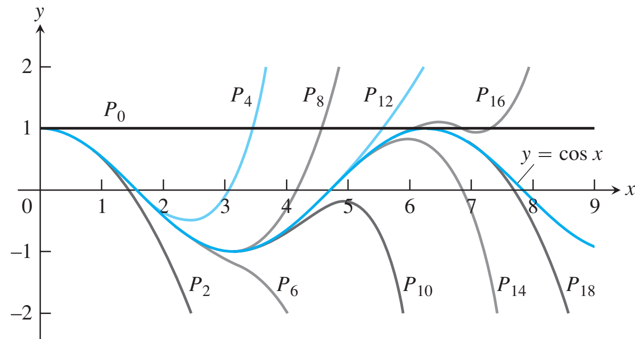
$$
\begin{aligned}
f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\
= 1 + 0 \cdot x - \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot x^3 + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\
= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Bu aynı zamanda $\cos x$'in Maclaurin serisidir. Bölüm 11.9' da, serinin her x için $\cos x$'e yakınsayacağını göreceğiz.

$f^{(2n+1)}(0) = 0$ olduğundan mertebeleri $2n$ ve $2n + 1$ olan Taylor polinomları aynıdır:

$$P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$x = 0$ civarında polinomların $f(x) = \cos x$'e ne kadar yaklaştıkları Şekil 11.13'te görülmektedir. Grafiklerin sadece sağ tarafları verilmiştir, çünkü grafikler y-eksenine göre simetriktir. ■



ŞEKİL 11.13 $n \to \infty$ iken

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

polinomları $\cos x$'e yakınsar. $\cos x$'in keyfi derecede uzaktaki davranışlarını kosinüsün ve türevlerinin $x = 0$' daki değerlerini bilerek çıkarabiliriz (Örnek 3).

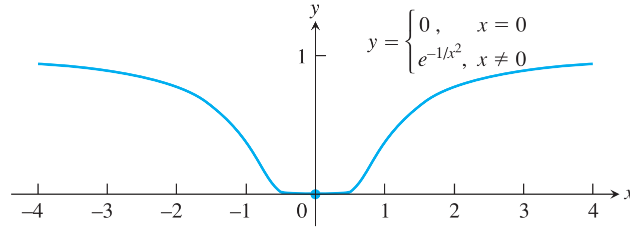
ÖRNEK 4 Taylor serisi her x için yakınsayan, fakat sadece $x = 0$'da $f(x)$'e yakınsayan bir f fonksiyonu.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun (Şekil 11.14) $x = 0$'da her mertebeden türevinin var olduğu ve (kolay olmasa da) her n için $f^{(n)}(0) = 0$ olduğu gösterilebilir. Bu, f'nin $x = 0$'da ürettiği Taylor serisinin

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$
$$= 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n + \cdots$$
$$= 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots.$$

olduğunu gösterir. Seri her x için yakınsaktır (toplamı 0'dır), fakat sadece $x = 0$'da $f(x)$'e yakınsar. ■



ŞEKİL 11.14 $y = e^{-1/x^2}$'nin sürekli genişlemesinin grafiği orijinde o kadar düzdür ki oradaki bütün türevleri sıfırdır (Örnek 4).

Hala iki soru vardır:

1. Bir Taylor serisinin hangi x değerleri için üretici fonksiyonuna yakınsamasını bekleyebiliriz?
2. Bir fonksiyonun Taylor polinomları verilen bir aralıkta fonksiyona ne gibi bir kesinlikle yaklaşımda bulunurlar?

Yanıtlar bir sonraki bölümde Taylor'un bir teoremiyle verilmektedir.

ALIŞTIRMALAR 11.8

Taylor Polinomları Bulmak

1–8 alıştırmalarında, f'nin a'da ürettiği 0, 1, 2 ve 3.üncü mertebeden Taylor polinomlarını bulun.

1. $f(x) = \ln x, \quad a = 1$
2. $f(x) = \ln(1 + x), \quad a = 0$
3. $f(x) = 1/x, \quad a = 2$
4. $f(x) = 1/(x + 2), \quad a = 0$
5. $f(x) = \sin x, \quad a = \pi/4$
6. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/4$
7. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$
8. $f(x) = \sqrt{x + 4}, \quad a = 0$

$x = 0$ da Taylor Polinomları Bulmak (Maclaurin Serileri)

9–20 alıştırmalarındaki fonksiyonların Maclaurin serilerini bulun.

9. e^{-x}
10. $e^{x/2}$
11. $\dfrac{1}{1 + x}$
12. $\dfrac{1}{1 - x}$
13. $\sin 3x$
14. $\sin \dfrac{x}{2}$

15. $7 \cos(-x)$

16. $5 \cos \pi x$

17. $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

18. $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

19. $x^4 - 2x^3 - 5x + 4$

20. $(x + 1)^2$

Taylor Serilerini Bulmak

21–28 alıştırmalarında f'nin $x = a$'da ürettiği Taylor serisini bulun.

21. $f(x) = x^3 - 2x + 4, \quad a = 2$

22. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 8, \quad a = 1$

23. $f(x) = x^4 + x^2 + 1, \quad a = -2$

24. $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 2, \quad a = -1$

25. $f(x) = 1/x^2, \quad a = 1$

26. $f(x) = x/(1 - x), \quad a = 0$

27. $f(x) = e^x, \quad a = 2$

28. $f(x) = 2^x, \quad a = 1$

Teori ve Alıştırmalar

29.
$$e^x = e^a\left[1 + (x - a) + \frac{(x - a)^2}{2!} + \cdots\right].$$
olduğunu göstermek için. e^x'in $x = a$'da ürettiği Taylor serisini kullanın.

30. (*Alıştırma 29'un devamı.*) e^x'in $x = 1$'de ürettiği Taylor serisini bulun. Yanıtınızı Alıştırma 29'daki formülle karşılaştırın.

31. $f(x)$'in $x = a$'da n mertebesine kadar türevleri var olsun. n. mertebe Taylor polinomunun ve ilk n türevinin $x = a$'daki değerlerinin, f'nin ve ilk n türevinin $x = a$'daki değerlerine eşit olduğunu gösterin.

32. Mertebesi $\leq$ *n* olan bütün polinomlar arasında, *n*. mertebe Taylor polinomu en iyi yaklaşımı verir. $f(x)$'in $x = a$'da merkezlenmiş bir aralıkta türetilebildiğini ve $g(x) = b_0 + b_1(x - a) + \cdots + b_n(x - a)^n$'in, $b_0, \ldots, b_n$ sabit katsayılar olmak üzere n. mertebeden bir polinom olduğunu varsayın. $E(x) = f(x) - g(x)$ olsun. g üzerine

a. $E(a) = 0$ — $x = a$'daki yaklaşım hatası sıfır.

b. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{E(x)}{(x - a)^n} = 0,$ — Hata $(x - a)^n$ ile karşılaştırıldığında ihmal edilebilir.

koşullarını koyarsak,

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

olduğunu gösterin. Yani, $P_n(x)$ Taylor polinomu, $x = a$'da hem hatası sıfır olan, hem de $(x - a)^n$ ile karşılaştırıldığında ihmal edilebilen ve derecesi n'ye eşit veya n'den küçük olan tek polinomdur.

Kuadratik Yaklaşımlar

$x = a$'da iki kere türetilebilen bir $f(x)$ fonksiyonu tarafından üretilen ve mertebesi 2 olan Taylor polinomuna f'nin $x = a$'daki **kuadratik yaklaşımı** denir. 33-38 alıştırmalarında, f'nin $x = 0$'daki **(a)** lineerizasyonunu (mertebesi 1 olan Taylor polinomu) ve **(b)** kuadratik yaklaşımını bulun.

33. $f(x) = \ln(\cos x)$

34. $f(x) = e^{\sin x}$

35. $f(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$

36. $f(x) = \cosh x$

37. $f(x) = \sin x$

38. $f(x) = \tan x$

11.9 Taylor Serisinin Yakınsaklığı; Hata Tahmini

Bu bölüm Bölüm 11.8'de cevapsız bırakılan iki soruyu cevaplamaktadır:

1. Bir Taylor serisi ne zaman üretici fonksiyonuna yakınsar?
2. Bir fonksiyonun Taylor polinomları verilen bir aralıkta, fonksiyona ne kadar iyi bir yaklaşımda bulunurlar?

Taylor Teoremi

Bu soruları aşağıdaki teoremle yanıtlayacağız.

TEOREM 22 Taylor Teoremi

f fonksiyonu ve $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ türevleri $[a, b]$ veya $[b, a]$ aralıklarında sürekli iseler ve $f^{(n)}$ (a, b) veya (b, a) aralığında türetilebiliyorsa, a ile b arasında

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir c sayısı vardır.

Taylor Teoremi Ortalama Değer Teoreminin bir genelleştirilmesidir (Alıştırma 39). Bu bölümün sonunda Taylor teoreminin bir ispatı vardır.

Taylor teoremini uygularken, genellikle a'yı sabit tutup, b'ye bağımsız bir değişken gibi bakmak isteriz. Bu gibi durumlarda, b yerine x yazarsak, Taylor teoremini uygulamak kolaylaşır. Bu değişiklikle teorem şu şekli alır:

Taylor Formülü

a'yı içeren bir I aralığında f'nin her mertebeden türevi varsa, her pozitif n tamsayısı ve I'daki her x için,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \tag{1}$$

dir. Burada

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (c,\ a \text{ ile } b \text{ arasında bir sayı}) \tag{2}$$

dir.

Taylor teoremini bu şekilde ifade ettiğimizde, teorem, her $x \in I$ için

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

olduğunu söyler. $R_n(x)$ fonksiyonu $(n + 1)$. türev olan $f^{(n+1)}$'nin a ve x'e bağlı olan ve bunların arasında bulunan bir c noktasındaki değeri ile tanımlanır. Denklem, istediğimiz herhangi bir n değeri için, hem f'nin o mertebede bir polinom yaklaşımını, hem de I aralığı boyunca o yaklaşımı kullanmanın vereceği hata için bir formül verir.

(1) denklemine **Taylor formülü** denir. $R_n(x)$ fonksiyonuna n. mertebeden kalan veya f'nin I aralığındaki $P_n(x)$ yaklaşımının **hata terimi** denir. Her $x \in I$ için, $n \to \infty$ iken, $R_n(x) \to 0$ ise, f'nin $x = a$'da ürettiği Taylor serisinin I aralığı üzerinde f'ye **yakınsadığını** söyler ve

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

yazarız. Aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi çoğunlukla c'deki değerini bilmeksizin R_n kalanını tahmin edebiliriz.

ÖRNEK 1 e^x için Taylor Serisi, Tekrar

$f(x) = e^x$'in $x = 0$'da ürettiği Taylor serisinin her reel x değerinde $f(x)$'e yakınsadığını gösterin.

Çözüm Fonksiyonun $I = (-\infty, \infty)$ aralığında her mertebeden türevi vardır. $f(x) = e^x$ ve $a = 0$ ile (1) ve (2) denklemleri

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

Bölüm 11.8, Örnek 2'deki polinom

ve

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad 0 \text{ ile } x \text{ arasında bir } c \text{ için}$$

verir. e^x, x'in artan bir fonksiyonu olduğundan, e^c değeri $e^0 = 1$ ile e^x arasında bulunur. x negatifse, c de negatiftir, dolayısıyla $e^c < 1$ olur. x sıfırken, $e^x = 1$ ve $R_n(x) = 0$ olur. x pozitifse, c de pozitiftir ve $e^c < e^x$ olur. Yani,

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad x \leq 0 \text{ için}$$

ve

$$|R_n(x)| < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad x > 0 \text{ için}$$

olur. Son olarak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \qquad \text{her } x \text{ için}$$

Bölüm 11.1

olduğundan $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ olur ve seri her x için e^x'e yakınsar. Böylece,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots \tag{3}$$

bulunur. ■

Kalanı Tahmin Etmek

Çoğunlukla, Örnek 1'de yaptığımız gibi $R_n(x)$'i tahmin etmek mümkündür. Bu tahmin yöntemi o kadar uygundur ki, bunu, daha sonraki kullanımları için bir teorem olarak ifade edeceğiz.

TEOREM 23 **Kalanı Tahmin Teoremi**

x ve a arasındaki her t için $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ olacak şekilde pozitif bir M sabiti varsa, Taylor teoremindeki kalan terim $R_n(x)$

$$|R_n(x)| \leq M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

eşitsizliğini sağlar. Bu koşullar her n için geçerliyse ve f Taylor teoreminin diğer koşullarını sağlıyorsa, seri $f(x)$'e yakınsar.

Artık, Kalan Tahmin Teoreminin ve Taylor Teoreminin, yakınsaklık sorularını yanıtlamak için nasıl kullanıldıklarını gösteren örneklere bakmaya hazırız. Göreceğiniz gibi, bunlar bir fonksiyona Taylor serilerinden biriyle yaklaşım yapılmasının hassaslığını belirlemekte de kullanılırlar.

ÖRNEK 2 sin x'in $x = 0$'daki Taylor Serisi

sin x'in $x = 0$'daki Taylor serisinin her x için x'e yakınsadığını gösterin.

Çözüm Fonksiyon ve türevleri şöyledir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f'(x) &= \cos x, \\ f''(x) &= -\sin x, & f'''(x) &= -\cos x, \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \sin x, & f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^k \cos x \end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$f^{(2k)}(0) = 0 \qquad \text{ve} \qquad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

olur. Serinin sadece tek kuvvetli terimleri vardır ve $n = 2k + 1$ için Taylor teoremi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+1}(x)$$

verir. sin x'in bütün türevlerinin mutlak değerleri 1'den küçük veya 1'e eşittir, dolayısıyla $M = 1$ ile Kalan Tahmin Teoremini uygulayarak

$$|R_{2k+1}(x)| \le 1 \cdot \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}.$$

buluruz. $k \to \infty$ iken, x'in değeri ne olursa olsun, $(|x|^{2k+2}/(2k+2)!) \to 0$ olduğundan, $R_{2k+1}(x) \to 0$ olur ve sin x'in Maclaurin serisi her x için sin x'e yakınsar. Böylece,

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{4}$$

elde edilir. ■

ÖRNEK 3 cos x'in $x = 0$'daki Taylor Serisi, Tekrar

cos x'in $x = 0$'daki Taylor serisinin her x değerinde cos x'e yakınsadığını gösterin.

Çözüm cos x'in Taylor polinomuna (Bölüm 11.8, Örnek 3) kalan terimini ekleyerek $n = 2k$ ile cos x'in Taylor formülünü elde ederiz:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k}(x).$$

Kosinüsün türevlerinin hepsinin mutlak değerleri 1'den küçük veya 1'e eşit olduğundan, $M = 1$ ile Kalan Tahmin Teoremi

$$|R_{2k}(x)| \leq 1 \cdot \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

verir. $k \to \infty$ iken, her x değeri için, $R_{2k} \to 0$ bulunur. Bu nedenle, seri her x için $\cos x$'e yakınsar.

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (5)$$

■

ÖRNEK 4 Değişken Dönüşümü ile bir Taylor Serisi Bulmak

$\cos 2x$'in $x = 0$'daki Taylor serisini bulun.

Çözüm $\cos 2x$'in Taylor serisini $\cos x$'in Taylor serisinde x yerine $2x$ yazarak bulabiliriz:

$$\cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots \qquad x \text{ yerine } 2x \text{ alınmış (5) denklemi}$$

$$= 1 - \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4x^4}{4!} - \frac{2^6x^6}{6!} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}x^{2k}}{(2k)!}$$

(5) denklemi $-\infty < x < \infty$ için geçerlidir, bu da $-\infty < 2x < \infty$ için de geçerli olduğunu gösterir, dolayısıyla yeni yaratılan seri her x için yakınsaktır. Alıştırma 45 serinin neden gerçekten de $2x$'in Taylor serisi olduğunu açıklamaktadır. ■

ÖRNEK 5 Bir Taylor Serisini Çarpımla Bulmak

$x \sin x$'in $x = 0$'daki Taylor serisini bulun.

Çözüm $x \sin x$'in Taylor serisini $\sin x$'in Taylor serisini (Denklem 4) x ile çarparak bulabiliriz.

$$x \sin x = x\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \cdots.$$

$\sin x$ serisi her x için yakınsak olduğundan yeni seri her x için yakınsaktır. Alıştırma 45, serinin neden $x \sin x$'in Taylor serisi olduğunu açıklamaktadır. ■

Kesme Hatası

e^x'in $x = 0$'daki Taylor serisi her x için e^x'e yakınsar. Fakat hala e^x'e, verilen bir hassasiyette yaklaşımda bulunmak için kaç tane terim kullanacağımıza karar vermemiz gerekmektedir. Bu bilgiyi Kalan Tahmin Teoreminden elde ederiz.

ÖRNEK 6 e'yi 10^{-6}'dan daha küçük bir hatayla hesaplayın.

Çözüm $x = 1$ alarak Örnek 1'in çözümünü kullanıp

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n(1)$$

yazabiliriz. Burada

$$R_n(1) = e^c \frac{1}{(n+1)!} \qquad \text{0 ile 1 arasındaki bir } c \text{ için}$$

ile verilir. Bu örneğin amaçları için, $e < 3$ olduğunu bildiğimizi varsayalım. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{(n+1)!} < R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

olduğundan eminiz, çünkü , $0 < c < 1$ için, $1 < e^c < 3$'dür.

Denemeyle, $1/9! > 10^{-6}$ ve $3/10! < 10^{-6}$ olduğunu buluruz. Yani $(n + 1)$'i en az 10 veya n'yi en az 9 almamız gerekir. 10^{-6}'dan küçük bir hatayla

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2.718282$$

buluruz. ■

ÖRNEK 7 Hangi x değerleri için $\sin x$ yerine, büyüklüğü 3×10^{-4}'ten fazla olmayan bir hatayla $x - (x^3/3!)$ yazabiliriz?

Çözüm Burada, $\sin x$'in Taylor serisinin, sıfırdan farklı her x değeri için bir alterne seri olmasının avantajını kullanacağız. Alterne Seriler Tahmin Teoremine göre (Bölüm 11.6)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} \;\vdots\; + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

serisini $(x^3/3!)$'den sonra kesmenin getireceği hata

$$\left|\frac{x^5}{5!}\right| = \frac{|x|^5}{120}$$

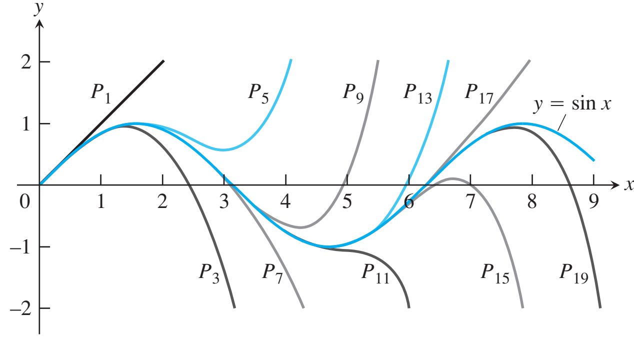
değerinden büyük olmayacaktır. Dolayısıyla,

$$\frac{|x|^5}{120} < 3 \times 10^{-4} \quad \text{veya} \quad |x| < \sqrt[5]{360 \times 10^{-4}} \approx 0.514. \qquad \text{Güvenlik için, aşağı yuvarlanmış}$$

ise, hata 3×10^{-4}'e eşit veya bundan daha küçük olacaktır.

Alterne Seriler Tahmin Teoremi Kalan Tahmin Teoreminin söylemediği bir şeyi daha söyler: yani, $\sin x$ için $x - (x^3/3!)$ tahmini, x pozitif olduğunda gerçek değerden küçük olan bir tahmindir, çünkü $x^5/120$ pozitiftir.

Şekil 11.15 $\sin x$ grafiğiyle birlikte birkaç Taylor polinomu yaklaşımını da göstermektedir. $P_3(x) = x - (x^3/3!)$'in grafiği $-1 \le x \le 1$ iken neredeyse sinüs eğrisinden ayırt edilememektedir.



ŞEKİL 11.15

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

polinomları $n \to \infty$ iken sin x'e yakınsarlar. $P_3(x)$'in $x < 1$ için sinüs eğrisine ne kadar yakın olduğuna dikkat edin (Örnek 7)

Kalan Tahmin Teoreminin verdiği tahminin Alterne Serilen Tahmin Teoreminin verdiği tahminle ne zaman uyuşacağını merak edebilirsiniz.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_3$$

yazarsak, Kalan Tahmin Teoremi, daha kötü bir sonuç olan

$$|R_3| \leq 1 \cdot \frac{|x|^4}{4!} = \frac{|x|^4}{24}$$

değerini verir. Fakat $x - (x^3/3!) = 0 + x + 0x^2 - (x^3/3!) + 0x^4$'ün üçüncü mertebe olduğu kadar dördüncü mertebeden de bir Taylor polinomu olduğunu hatırlarsak,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + 0 + R_4$$

olur ve $M = 1$ ile Kalan Tahmin Teoremi

$$|R_4| \leq 1 \cdot \frac{|x|^5}{5!} = \frac{|x|^5}{120}$$

verir. Bu, Alterne Seriler Tahmin Teoremiyle bulduğumuz sonuçtur. ■

Taylor Serilerini Birleştirmek

Yakınsaklık aralıklarının kesişimlerinde, Taylor serileri toplanabilir, çıkarılabilir, sabitlerle çarpılabilir ve sonuçlar yine Taylor serileri olur. $f(x) + g(x)$'in Taylor serisi $f(x)$ ve $g(x)$'in Taylor serilerinin toplamıdır, çünkü $f + g$'nin $n.$ türevi $f^{(n)} + g^{(n)}$'dir. Böylece $(1 + \cos 2x)/2$'nin Taylor serisini cos $2x$'in Taylor serisine 1 ekleyip, birleştirilmiş sonucu 2'ye bölerek bulabiliriz. sin x + cos x'in Taylor serisi sin x ve cos x'in Taylor serilerinin terim-terim toplanmış halidir.

Euler Özdeşliği

Hatırlayacağınız gibi, bir kompleks (karmaşık) sayı, a ve b reel sayılar ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere, $a + bi$ şeklinde bir sayıdır. e^x'in Taylor serisinde $x = i\theta$ (θ reel) alır ve sonucu basitleştirmek için,

$$i^2 = -1, \qquad i^3 = i^2 i = -i, \qquad i^4 = i^2 i^2 = 1, \qquad i^5 = i^4 i = i,$$

gibi bağıntıları kullanırsak

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Bu, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ olduğunu *ispatlamaz*, çünkü henüz e'nin kompleks bir kuvvetini almanın ne anlama geldiğini tanımlamadık. Fakat $e^{i\theta}$'nın bildiğimiz diğer şeylerle nasıl uyum sağladığını gösterir.

TANIM

Herhangi bir θ reel sayısı için, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$'dır. (6)

Euler özdeşliği denilen (6) denklemi herhangi bir $a + bi$ kompleks sayısı için e^{a+bi}'yi $e^a \cdot e^{bi}$ olarak yazmamızı sağlar. Özdeşliğin bir sonucu

$$e^{i\pi} = -1$$

denklemidir. Bu denklem $e^{i\pi} + 1 = 0$ şeklinde yazıldığında matematikteki en önemli beş sabiti bir araya toplar.

Taylor Teoreminin Bir İspatı

Taylor teoremini $a < b$ olduğunu varsayarak ispatlayacağız. $a > b$ için ispat da aynıdır.

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Taylor polinomu ve bunun ilk n tane türevi, $x = a$'da f fonksiyonuna ve onun ilk n türevine uyarlar. K bir sabit olmak üzere, $K(x - a)^{n+1}$ gibi bir terim eklersek bu uyumu bozmayız, çünkü böyle bir terim ve bu terinim ilk n türevi $x = a$'da sıfırdır. Yeni fonksiyon

$$\phi_n(x) = P_n(x) + K(x - a)^{n+1}$$

ve bunun ilk n türevi $x = a$'da f'ye ve ilk n türevine uyacaktır.

Şimdi $y = \phi_n(x)$ eğrisinin $x = b$'de esas eğri $y = f(x)$'e uymasını sağlayacak özel bir K değeri seçelim. Sembolik olarak,

$$f(b) = P_n(b) + K(b - a)^{n+1}, \quad \text{veya} \quad K = \frac{f(b) - P_n(b)}{(b - a)^{n+1}} \qquad (7)$$

yazılır.

(7) denklemiyle belirlenmiş K ile

$$F(x) = f(x) - \phi_n(x)$$

fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında her x için, orijinal f fonksiyonu ile yaklaşım fonksiyonu ϕ_n arasındaki farkı ölçer.

Şimdi Rolle teoremini kullanacağız (Bölüm 4.2). İlk olarak, $F(a) = F(b) = 0$ olduğundan ve hem F hem de F' türevi $[a, b]$'da sürekli olduklarından

$$(a, b)\text{'deki bir } c_1 \text{ için} \qquad F'(c_1) = 0$$

olduğunu biliyoruz. Sonra, $F'(a) = F'(c_1) = 0$ olduğundan ve hem F' hem de F'' türevleri $[a, c_1]$' de sürekli olduklarından

$$(a, c_1)\text{'deki bir } c_2 \text{ için} \qquad F''(c_2) = 0$$

olduğunu biliyoruz. Rolle Teoremini $F'', F''', \ldots, F^{(n-1)}$'e art arda uygulamak

$$(a, c_2)\text{'de} \qquad F'''(c_3) = 0 \qquad \text{olacak şekilde bir } c_3$$

$$(a, c_3)\text{'de} \qquad F^{(4)}(c_4) = 0 \qquad \text{olacak şekilde bir } c_4$$

$$\vdots$$

$$(a, c_{n-1})\text{'de} \qquad F^{(n)}(c_n) = 0 \qquad \text{olacak şekilde bir } c_n$$

bulunduğunu gösterir. Son olarak, $F^{(n)}$ $[a, c_n]$'de sürekli ve (a, c_n)'de türetilebilir olduğundan ve $F^{(n)}(a) = F^{(n)}(c_n) = 0$ olduğundan Rolle Teoremi, (a, c_n) aralığında

$$F^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0 \tag{8}$$

olacak şekilde bir c_{n+1} sayısı bulunduğunu söyler. $F(x) = f(x) - P_n(x) - K(x-a)^{n+1}$'in toplam $n + 1$ kere türevini alırsak,

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 - (n+1)!K \tag{9}$$

buluruz. (8) ve (9) denklemleri birlikte

$$(a, b)\text{'de bir } c = c_{n+1} \text{ sayısı için} \qquad K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \tag{10}$$

olduğunu gösterir. (7) ve (10) denklemleri ise

$$f(b) = P_n(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

olduğunu gösterir. Bu da ispatı tamamlar. ■

ALIŞTIRMALAR 11.9

Değişken Dönüşümü ile Taylor Serileri

1–6 alıştırmalarındaki fonksiyonların $x = 0$'da Taylor serilerini bulmak için değişken dönüşümü kullanın (Örnek 4'teki gibi).

1. e^{-5x} **2.** $e^{-x/2}$ **3.** $5\sin(-x)$

4. $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ **5.** $\cos\sqrt{x+1}$ **6.** $\cos\left(x^{3/2}/\sqrt{2}\right)$

Daha Fazla Taylor Serisi

7–18 alıştırmalarındaki fonksiyonların $x = 0$'daki Taylor serilerini bulun.

7. xe^x **8.** $x^2 \sin x$ **9.** $\frac{x^2}{2} - 1 + \cos x$

10. $\sin x - x + \frac{x^3}{3!}$ **11.** $x\cos\pi x$ **12.** $x^2\cos(x^2)$

13. $\cos^2 x$ (*İpucu:* $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$.)

14. $\sin^2 x$ **15.** $\dfrac{x^2}{1 - 2x}$ **16.** $x \ln (1 + 2x)$

17. $\dfrac{1}{(1 - x)^2}$ **18.** $\dfrac{2}{(1 - x)^3}$

Hata Tahmini

19. Yaklaşık olarak hangi x değerlerinde $\sin x$ yerine büyüklüğü 5×10^{-4}'ten fazla olmayan bir hatayla $x - (x^3/6)$ yazabilirsiniz? Yanıtınızı açıklayın.

20. $\cos x$ yerine $1 - (x^2/2)$ yazılırsa ve $|x| < 0.5$ ise, hata hakkında ne gibi bir tahmin yapılabilir? $1 - (x^2/2)$ çok mu fazla, yoksa çok mu azdır? Yanıtınızı açıklayın.

21. $|x| < 10^{-3}$ iken, $\sin x = x$ yaklaşımı ne kadar yakındır? Hangi x değerlerinde $x < \sin x$ olur?

22. x küçükken $\sqrt{1 + x} = 1 + (x/2)$ yaklaşımı kullanılır. $|x| < 0.01$ iken hatayı tahmin edin.

23. x küçükken $e^x = 1 + x + (x^2/2)$ yaklaşımı kullanılır. $|x| < 0.1$ iken hatayı tahmin etmek için Kalan Tahmin Teoremini kullanın.

24. (*Alıştırma 23'ün devamı.*) $x < 0$ iken, e^x serisi alterne bir seridir. Alterne Seri Teoremini kullanarak $-0.1 < x < 0$ iken e^x yerine $1 + x + (x^2/2)$ yazmanın vereceği hatayı tahmin edin. Tahmininizi Alıştırma 23'te bulduğunuzla karşılaştırın.

25. $|x| < 0.5$ iken, $\sinh x = x + (x^3/3!)$ yaklaşımının hatasını tahmin edin. (*İpucu*: R_3 değil, R_4 kullanın.)

26. $0 \le h \le 0.01$ iken, e^h yerine büyüklüğü h'nin %0.6'sından büyük olmayan bir hatayla $1 + h$ yazılabileceğini gösterin. $e^{0.01} = 1.01$ alın.

27. Hangi pozitif x değerlerinde $\ln(1 + x)$ yerine, x'in büyüklüğünün en çok %1'i kadar bir hatayla, x yazabilirsiniz?

28. $x = 1$'de $\tan^{-1} x$'in Maclaurin serisini kullanarak $\pi/4$'ü tahmin etmeyi planlıyorsunuz. Alterne Seriler Tahmin Teoremini kullanarak, tahmininizin 2 ondalık basamak doğrulukta olduğundan emin olmak için serinin kaç terimini almanız gerektiğini belirleyin.

29. a. $\sin x$'in Taylor serisini ve Alterne Seriler Tahmin Teoremini kullanarak

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \neq 0$$

olduğunu gösterin.

T **b.** $-5 \le x \le 5$ için $f(x) = (\sin x)/x$ ile $y = 1 - (x^2/6)$ ve $y = 1$ fonksiyonlarının grafiklerini birlikte çizin. Grafikler arasındaki ilişkiyi yorumlayın.

30. a. $\cos x$'in Taylor serisini ve Alterne Seriler Tahmin Teoremini kullanarak

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2}, \quad x \neq 0.$$

olduğunu gösterin. (Bu, Bölüm 2.2, Alıştırma 52'deki eşitsizliktir.)

T **b.** $-9 \le x \le 9$ için $f(x) = (1 - \cos x)/x^2$ ile $y = (1/2) - (x^2/24)$ ve $y = (1/2)$ fonksiyonlarının grafiklerini birlikte çizin. Grafikler arasındaki ilişkiyi yorumlayın.

Maclaurin Serilerini Bulmak ve Tanımlamak

$x = 0$'daki Taylor serisinin bir başka adının Maclaurin serisi olduğunu hatırlayın. 31–34 alıştırmalarındaki serilerden her biri bir $f(x)$ fonksiyonunun bir noktadaki Maclaurin serisidir. Hangi fonksiyon ve hangi nokta? Serinin toplamı nedir?

31. $(0.1) - \dfrac{(0.1)^3}{3!} + \dfrac{(0.1)^5}{5!} - \cdots + \dfrac{(-1)^k(0.1)^{2k+1}}{(2k + 1)!} + \cdots$

32. $1 - \dfrac{\pi^2}{4^2 \cdot 2!} + \dfrac{\pi^4}{4^4 \cdot 4!} - \cdots + \dfrac{(-1)^k(\pi)^{2k}}{4^{2k} \cdot (2k!)} + \cdots$

33. $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi^3}{3^3 \cdot 3} + \dfrac{\pi^5}{3^5 \cdot 5} - \cdots + \dfrac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{3^{2k+1}(2k + 1)} + \cdots$

34. $\pi - \dfrac{\pi^2}{2} + \dfrac{\pi^3}{3} - \cdots + (-1)^{k-1}\dfrac{\pi^k}{k} + \cdots$

35. e^x ve $\sin x$'in Maclaurin serilerini çarparak $e^x \sin x$'in Maclaurin serisinin sıfırdan farklı ilk beş terimini bulun.

36. e^x ve $\cos x$'in Maclaurin serilerini çarparak $e^x \cos x$'in Maclaurin serisinin sıfırdan farklı ilk beş terimini bulun.

37. $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ bağıntısını kullanarak $\sin^2 x$'in Maclaurin serisini bulun. Sonra bu serinin türevini alarak $2 \sin x \cos x$'in Maclaurin serisini bulun. Bunun $\sin 2x$ serisi olup olmadığını kontrol edin.

38. (*Alıştırma 37'nin devamı.*) $\cos^2 x = \cos 2x + \sin^2 x$ bağıntısını kullanarak $\cos^2 x$ için bir kuvvet serisi elde edin.

Teori ve Örnekler

39. Taylor Teoremi ve Ortalama Değer Teoremi Ortalama Değer Teoreminin (Bölüm 4.2, Teorem 4) nasıl Taylor Teoreminin özel bir durumu olduğunu açıklayın.

40. Büküm noktalarında lineerizasyon İki kere türetilebilen bir $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin $x = a$'da bir büküm noktası varsa, f'nin $x = a$'daki lineerizasyonunun aynı zamanda f'nin $x = a$'daki kuadratik yaklaşımı olduğunu gösterin. Bu, teğetlerin büküm noktalarına neden o kadar iyi uyum sağladıklarını açıklar.

41. (İkinci) ikinci türev testi Aşağıdaki testi doğrulamak için

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(c_2)}{2}(x - a)^2$$

denklemini kullanın.

f'nin sürekli birinci ve ikinci türevlerinin var ve $f'(a) = 0$ olduğunu varsayın.

a. İçi a'yı kapsayan bir aralık boyunca $f'' \le 0$ ise, f'nin a'da bir yerel maksimumu vardır;

b. İçi a'yı kapsayan bir aralık boyunca $f'' \ge 0$ ise, f'nin a'da bir yerel minimumu vardır.

42. Kübik bir yaklaşım $a = 0$ ve $n = 3$ ile Taylor formülünü kullanarak $f(x) = 1/(1 - x)$'in $x = 0$'daki kübik yaklaşımını bulun. $|x| \le 0.1$ iken yaklaşımdaki hatanın büyüklüğü için bir üst sınır bulun.

43. a. $n = 2$ ile Taylor formülünü kullanarak $f(x) = (1 + x)^k$'ye (k bir sabit) $x = 0$'daki kuadratik yaklaşımı bulun.

b. $k = 3$ ise, [0, 1] aralığındaki yaklaşık olarak hangi x değerlerinde, kuadratik yaklaşımdaki hata $1/100$'den küçük olur?

44. π'ye yaklaşımları iyileştirmek

a. P, π'ye n ondalık basamak kesinlikte bir yaklaşım olsun. $P + \sin P$'nin $3n$ ondalık basamak kesinlikte bir yaklaşım vereceğini gösterin. (*İpucu: $P = \pi + x$ alın.*)

T **b.** Bunu bir hesap makinesiyle deneyin.

45. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tarafından üretilen Taylor serisi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisidir. Yakınsaklık yarıçapı $c > 0$ olan bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisiyle tanımlanan bir fonksiyonun, $(-c, c)$ aralığının her noktasında fonksiyona yakınsayan bir Taylor serisi vardır. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tarafından üretilen Taylor serisinin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisinin kendisi olduğunu göstererek bunu gösterin.

Bunun hemen görülen bir sonucu, Yakınsak kuvvet serilerin türevlerinin alınması veya integrasyonuyla elde edilen serilerin, temsil ettikleri fonksiyonların ürettiği Taylor serileri olmaları gibi, Taylor serilerini x'in kuvvetleri ile çarpılmasından elde edilen

$$x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \cdots$$

ve

$$x^2 e^x = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \cdots,$$

gibi serilerdir.

46. Çift fonksiyonların ve tek fonksiyonların Taylor serileri (*Bölüm 11.7, Alıştırma 45'in devamı.*) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ fonksiyonunun açık bir $(-c, c)$ aralığındaki her x için yakınsadığını varsayın. Aşağıdakileri gösterin.

a. f çiftse, $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$'dır; yani f'nin serisi sadece x'in çift kuvvetlerini içerir.

b. $a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = 0$'dır; yani f'nin serisi sadece x'in tek kuvvetlerini içerir.

47. Periyodik fonksiyonların Taylor polinomları

a. Her x için $|f(x)| \le M$ olacak şekilde pozitif bir M sabitinin var olduğunu göstererek, her sürekli periyodik $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, fonksiyonunun büyüklüğünün sınırlı olduğunu gösterin.

b. $f(x) = \cos x$'in ürettiği pozitif dereceli her Taylor polinomunun grafiğinin $|x|$ arttıkça $\cos x$'in grafiğinden uzaklaşması gerektiğini gösterin. Bunu Şekil 11.13'te görebilirsiniz. $\sin x$'in Taylor polinomları da benzer şekilde davranır (Şekil 11.15).

T **48. a.** $y = (1/3) - (x^2)/5$ ve $y = (x - \tan^{-1} x)/x^3$ eğrilerinin grafiklerini $y = 1/3$ eğrisiyle birlikte çizin.

b. Gördüklerinizi bir Taylor serisiyle açıklayın.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3}$$

nedir?

Euler Özdeşliği

49. e'nin aşağıdaki kuvvetlerini $a + bi$ şeklinde yazmak için (6) denklemini kullanın.

a. $e^{-i\pi}$ **b.** $e^{i\pi/4}$ **c.** $e^{-i\pi/2}$

50. (6) Denklemini kullanarak

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{ve} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

olduğunu gösterin.

51. Alıştırma 50'deki bağıntıları $e^{i\theta}$ ve $e^{-i\theta}$'nın Taylor serilerini birleştirerek doğrulayın.

52. Aşağıdakileri gösterin.

a. $\cosh i\theta = \cos \theta$, **b.** $\sinh i\theta = i \sin \theta$.

53. e^x ve $\sin x$'in Taylor serilerini çarparak, $e^x \sin x$'in Taylor serisinin x^5'e kadar olan terimlerini bulun. Bu seri

$$e^x \cdot e^{ix} = e^{(1+i)x}$$

serisinin sanal (imajiner) kısmıdır. Bunu yanıtınızı kontrol etmekte kullanın. Hangi x değerleri için bu seri $e^x \sin x$'e yakınsamalıdır?

54. a ve b reel olmak üzere, $e^{(a+ib)x}$'i

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

denklemiyle tanımlarız. Bu denklemin sağ tarafının türevini alarak

$$\frac{d}{dx} e^{(a+ib)x} = (a + ib)e^{(a+ib)x}.$$

olduğunu gösterin. Yani bildiğimiz $(d/dx)e^{kx} = ke^{kx}$ kuralı kompleks k'ler için de geçerlidir.

55. $e^{i\theta}$'nın tanımını kullanarak reel θ, θ_1 ve θ_2 sayıları için aşağıdakileri gösterin.

a. $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$, **b.** $e^{-i\theta} = 1/e^{i\theta}$.

56. Kompleks iki $a + ib$ ve $c + id$ sayısı ancak ve ancak $a = c$ ve $b = d$ ise eşittir. Bunu kullanarak, $C = C_1 + iC_2$ kompleks bir integrasyon sabiti olmak üzere

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx \quad \text{ve} \quad \int e^{ax} \sin bx\, dx$$

eşiğinden

$$\int e^{(a+ib)x}\, dx = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} e^{(a+ib)x} + C$$

integrallerini hesaplayın.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Lineer, Kuadratik ve Kübik Yaklaşımlar

$n = 1$ ve $a = 0$ ile Taylor formülü bir fonksiyonun $x = 0$'daki lineerizasyonunu verir. $n = 2$ ve $n = 3$ ile, standart kuadratik ve kübik yaklaşımları elde ederiz. Bu alıştırmalarda, bu yaklaşımlarla ilgili hataları araştıracağız. İki sorunun yanıtını arıyoruz:

a. Hangi x değerleri için fonksiyon yerine, 10^{-2}'den küçük bir hata ile, söz konusu yaklaşımlar yazılabilir?

b. Belirlenen aralıkta fonksiyon yerine söz konusu yaklaşımları almakla yapacağımız maksimum hata nedir?

Bir BCS kullanarak, 57–62 alıştırmalarında verilen fonksiyonlar ve aralıklar için (a) ve (b)'deki soruları yanıtlamak için aşağıdaki adımları gerçekleştirin.

Adım 1: Fonksiyonu belirtilen aralıkta çizin.

Adım 2: $x = 0$'daki $P_1(x)$, $P_2(x)$ ve $P_3(x)$ Taylor polinomlarını bulun.

Step 3: Her Taylor polinomunun kalanıyla ilişkili olan $(n + 1)$. türevi $f^{(n+1)}(c)$'yi hesaplayın. Türevi, verilen aralıkta c'nin bir fonksiyonu olarak çizin ve maksimum mutlak değeri M'yi tahmin edin.

Step 4: Her polinomun $R_n(x)$ kalanını hesaplayın. $f^{(n+1)}(c)$ yerine Adım 3'teki M tahminini kullanarak, $R_n(x)$'in grafiğini çizin. (a) sorusunu yanıtlayan x değerlerini bulun.

Step 5: Tahmin ettiğiniz hatayı gerçek hata $E_n(x) = |f(x) - P_n(x)|$ ile, $E_n(x)$'in grafiğini belirlenen aralıkta çizerek karşılaştırın. Bu (b) sorusunu yanıtlamaya yardımcı olacaktır.

Step 6: Fonksiyonun ve üç Taylor yaklaşımının grafiklerini birlikte çizin. Grafiklerin 4 ve 5 adımlarında bulduklarınızla ilişkisini tartışın.

57. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}, \quad |x| \le \dfrac{3}{4}$

58. $f(x) = (1 + x)^{3/2}, \quad -\dfrac{1}{2} \le x \le 2$

59. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad |x| \le 2$

60. $f(x) = (\cos x)(\sin 2x), \quad |x| \le 2$

61. $f(x) = e^{-x} \cos 2x, \quad |x| \le 1$

62. $f(x) = e^{x/3} \sin 2x, \quad |x| \le 2$

11.10 Kuvvet Serilerinin Uygulamaları

Bu bölüm kuvvet ve kök bulmada kullanılan binom serilerini tanıtmakta ve bazen serilerin, bir başlangıç değer problemine yaklaşımda bulunmakta, elemanter olmayan integrallerin hesaplanmasında ve belirsiz formlara yol açan limitlerin hesaplanmasında, nasıl kullanıldığını göstermektedir. $\tan^{-1} x$'in Taylor serisinin bir çıkarılışını verecek ve sık kullanılan seriler için bir referans tablosuyla bölümü bitireceğiz.

Kuvvetler ve Kökler İçin Binom Serileri

m bir sabitken, $f(x) = (1 + x)^m$'nin ürettiği Taylor serisi

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k + \cdots. \qquad (1)$$

ile verilir. Binom serisi denilen bu seri $|x| < 1$ için mutlak yakınsaktır. Seriyi türetmek

için, önce fonksiyonu ve türevlerini yazarız:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^m \\ f'(x) &= m(1+x)^{m-1} \\ f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2} \\ f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k}. \end{aligned}$$

Sonra bunları $x = 0$'da hesaplar ve bu değerleri Taylor serisi formülüne koyarak (1) denklemini elde ederiz.

m sıfıra eşit veya sıfırdan büyük bir tamsayı ise, seri $(m + 1)$ terimden sonra durur, çünkü $k = m + 1$'den sonraki terimler sıfırdır.

m pozitif bir tamsayı veya sıfır değilse, seri sonsuzdur ve $|x| < 1$ için yakınsaktır. Nedenini anlamak için, u_k'yı x^k'yı içeren terim olarak alın. Sonra mutlak yakınsaklık için Oran Testini uygulayarak

$$k \to \infty \quad \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{m-k}{k+1}x\right| \to |x|$$

olduğunu görün.

Binom serilerini türetişimiz sadece bunun $(1 + x)^m$ tarafından üretildiğini ve $|x| < 1$ için yakınsadığını göstermektedir. Türetiş serinin $(1 + x)^m$'ye yakınsadığını göstermez. Seri bu fonksiyona yakınsar, fakat bunu ispatsız kabul edeceğiz.

Binom Serisi

$-1 < x < 1$ için

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k,$$

ve

$$\binom{m}{1} = m, \qquad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!},$$

olmak üzere

$$k \geq 3 \text{ için } \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!} \quad \text{dir.}$$

ÖRNEK 1 Binom Serisini Kullanmak

$m = -1$ ise

$$\binom{-1}{1} = -1, \qquad \binom{-1}{2} = \frac{-1(-2)}{2!} = 1,$$

ve

$$\binom{-1}{k} = \frac{-1(-2)(-3)\cdots(-1-k+1)}{k!} = (-1)^k \left(\frac{k!}{k!}\right) = (-1)^k \quad \text{olur.}$$

Bu katsayı değerleri ve x yerine $-x$ ile binom formülü, bildiğimiz

$$(1 + x)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^k x^k + \cdots. \quad \blacksquare$$

geometrik serisini verir.

ÖRNEK 2 Binom Serisini Kullanmak

Bölüm 3.8, Örnek 1'den küçük $|x|$'ler için $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ olduğunu biliyoruz. $m = 1/2$ ile binom serisi, Alterne Seriler Tahmin Teoreminden gelen hata tahminleriyle birlikte, kuadratik ve daha yüksek mertebeden yaklaşımları da verir:

$$\begin{aligned}(1 + x)^{1/2} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 \\ &\quad + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!}x^4 + \cdots \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots.\end{aligned}$$

x'e değişken dönüşümü uygulamak başka yaklaşımları da verir. Örneğin,

Küçük $|x^2|$ için $\sqrt{1-x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}$

Küçük $\frac{1}{x}$ yani büyük $|x|$ için $\sqrt{1-\frac{1}{x}} \approx 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2}$ $\blacksquare$

bulunur.

Diferansiyel Denklemlerin ve Başlangıç Değer Problemlerinin Kuvvet Serisi Çözümleri

Bir başlangıç değer problemi veya diferansiyel denklemin çözümü için basit bir ifade bulamazsak, çözüm hakkında başka yollardan bilgi almaya çalışırız. Bunun bir yolu çözümün bir kuvvet serisi temsilini bulmaya çalışmaktır. Eğer bulabilirsek, hemen çözümün polinom yaklaşımları için bir kaynak elimize geçer, bu da aradığımız tek şey olabilir. İlk örnek (Örnek 3), Bölüm 9.2'nin yöntemleriyle çözülebilecek bir birinci derece lineer diferansiyel denklemle ilgilenmektedir. Örnek, bundan haberimiz yokmuş gibi, denklemi bir kuvvet serisiyle nasıl çözeceğimizi gösterir. İkinci örnek (Örnek 4) daha önce gördüğümüz yöntemlerle çözülemeyen bir denklemle uğraşır.

ÖRNEK 3 Bir Başlangıç Değer Probleminin Seri Çözümü

Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözün.

$$y' - y = x, \qquad y(0) = 1.$$

Çözüm

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n + \cdots. \qquad (2)$$

şeklinde bir çözüm olduğunu varsayarız.

Amacımız, hangi ak katsayıları için, serinin ve

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots \tag{3}$$

birinci türevinin, verilen diferansiyel denklemi ve başlangıç koşulunu sağladığını bulmaktır. $y' - y$ serisi (2) ve (3) denklemlerindeki serilerin farkıdır:

$$\begin{aligned} y' - y = (a_1 - a_0) &+ (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + \cdots \\ &+ (na_n - a_{n-1})x^{n-1} + \cdots \end{aligned} \tag{4}$$

$y' - y = x$ denklemini sağlayacaksa, (4) Denklemindeki seri x'e eşit olmalıdır. Bölüm 11.7, Alıştırma 45'te gördüğünüz gibi, kuvvet serisi temsilleri tek olduğu için, (4) Denklemindeki katsayılar aşağıdaki denklemleri sağlamalıdır:

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &= 0 && \text{Sabit terimler} \\ 2a_2 - a_1 &= 1 && x\text{'in katsayıları} \\ 3a_3 - a_2 &= 0 && x^2\text{'nin katsayıları} \\ &\vdots && \vdots \\ na_n - a_{n-1} &= 0 && x^{n-1}\text{'in katsayıları} \\ &\vdots && \vdots \end{aligned}$$

Ayrıca, (2) Denkleminden $x = 0$ iken, $y = a_0$ olduğunu görebiliriz, yani $a_0 = 1$' dir (bu başlangıç koşuludur). Hepsini bir araya koyarsak,

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = a_0 = 1, \qquad a_2 = \frac{1 + a_1}{2} = \frac{1 + 1}{2} = \frac{2}{2},$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{3!}, \ldots, \qquad a_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{2}{n!}, \ldots$$

buluruz. Bu katsayı değerlerini y denkleminde (2 Denklemi) yerine koymak

$$\begin{aligned} y &= 1 + x + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots + 2 \cdot \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + x + 2 \underbrace{\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \right)}_{e^x - 1 - x\text{'in Taylor serisi}} \\ &= 1 + x + 2(e^x - 1 - x) = 2e^x - 1 - x \end{aligned}$$

verir. Başlangıç değer probleminin çözümü $y = 2e^x - 1 - x$'tir.

Kontrol için,

$$y(0) = 2e^0 - 1 - 0 = 2 - 1 = 1$$

ve

$$y' - y = (2e^x - 1) - (2e^x - 1 - x) = x$$ ■

olduğunu görürüz.

ÖRNEK 4 Bir Diferansiyel Denklemi Çözmek

Aşağıdaki denklemin bir kuvvet serisi çözümünü bulun:

$$y'' + x^2y = 0 \tag{5}$$

Çözüm

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \tag{6}$$

şeklinde bir çözüm olduğunu varsayar ve hangi a_k katsayıları için, serinin ve

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots \tag{7}$$

türevinin (5) denklemini sağladığını buluruz. x^2y serisi x^2 kere (6) denkleminin sağ tarafıdır:

$$x^2y = a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \cdots + a_nx^{n+2} + \cdots \tag{8}$$

$y'' + x^2y$ (7) ve (8) denklemlerindeki serilerin toplamıdır:

$$y'' + x^2y = 2a_2 + 6a_3x + (12a_4 + a_0)x^2 + (20a_5 + a_1)x^3$$
$$+ \cdots + (n(n-1)a_n + a_{n-4})x^{n-2} + \cdots \tag{9}$$

(8) Denkleminde x^{n-2}'nin katsayısının a_{n-4} olduğuna dikkat edin. y ve ikinci türevi y'' (5) Denklemini sağlayacaklarsa, (9) Denkleminin sağ tarafındaki x'in kuvvetlerinin katsayılarının her biri sıfır olmalıdır:

$$2a_2 = 0, \qquad 6a_3 = 0, \qquad 12a_4 + a_0 = 0, \qquad 20a_5 + a_1 = 0, \tag{10}$$

$n \geq 4$ için,

$$n(n-1)\,a_n + a_{n-4} = 0 \tag{11}$$

dır. (6) Denkleminden

$$a_0 = y(0) \qquad a_1 = y'(0)$$

olduğunu görebiliriz. Diğer bir deyişle, serinin ilk iki katsayısı y ve y''nün $x = 0$'daki değerleridir. (10)'daki denklemler ve (11)'deki tekrarlama formülü bütün katsayıları a_0 ve a_1 cinsinden hesaplamamızı sağlar.

(10)'daki denklemlerden ilk ikisi

$$a_2 = 0, \qquad a_3 = 0$$

verir. (11) Denklemi $a_{n-4} = 0$ ise, $a_n = 0$ olacağını gösterir, dolayısıyla

$$a_6 = 0, \qquad a_7 = 0, \qquad a_{10} = 0, \qquad a_{11} = 0$$

ve her $n = 4k + 2$ veya $4k + 3$ olduğunda, $a_n = 0$ olur. Diğer katsayılar için

$$a_n = \frac{-a_{n-4}}{n(n-1)}$$

buluruz, böylece

$$a_4 = \frac{-a_0}{4 \cdot 3}, \qquad a_8 = \frac{-a_4}{8 \cdot 7} = \frac{a_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8}$$

$$a_{12} = \frac{-a_8}{11 \cdot 12} = \frac{-a_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12}$$

ve

$$a_5 = \frac{-a_1}{5 \cdot 4}, \qquad a_9 = \frac{-a_5}{9 \cdot 8} = \frac{a_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9}$$

$$a_{13} = \frac{-a_9}{12 \cdot 13} = \frac{-a_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13}$$

olur.

Yani cevap en iyi olarak iki farklı serinin toplamı biçiminde ifade edilir—biri a_0 ile, diğeri a_1 ile çarpılmış olarak.

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} - \frac{x^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12} + \cdots\right)$$
$$+ a_1\left(x - \frac{x^5}{4\cdot 5} + \frac{x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \frac{x^{13}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13} + \cdots\right)$$

İki seri de, oran testiyle görüleceği gibi, her x için mutlak yakınsaktır. ■

Elemanter Olmayan İntegralleri Hesaplamak

Taylor serileri elemanter olmayan integralleri seriler cinsinden ifade etmekte kullanılabilir. $\int \sin x^2\,dx$ gibi integraller ışığın kırılması incelemelerinde ortaya çıkarlar.

ÖRNEK 5 $\int \sin x^2\,dx$'i bir kuvvet serisi olarak ifade edin.

Çözüm $\sin x$ serisinden

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} - \cdots$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$\int \sin x^2\,dx = C + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \frac{x^{10}}{19\cdot 9!} - \cdots$$ ■

olur.

ÖRNEK 6 Bir Belirli İntegrali Bulmak

$\int_0^1 \sin x^2\,dx$'i 0.001'den küçük bir hatayla bulun.

Çözüm Örnek 5'teki belirsiz integralden

$$\int_0^1 \sin x^2\,dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \frac{1}{15\cdot 7!} + \frac{1}{19\cdot 9!} - \cdots$$

bulunur. Seri alternedir. Deneyerek

$$\frac{1}{11\cdot 5!} \approx 0.00076$$

teriminin sayısal olarak 0.001'den küçük olan ilk terim olduğunu buluruz. Bundan önce gelen iki terimin toplamı

$$\int_0^1 \sin x^2\,dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} \approx 0.310$$

verir. İki terim daha alırsak, 10^{-6}'dan daha küçük bir hatayla

$$\int_0^1 \sin x^2\,dx \approx 0.310268$$

tahmininde bulunabilirdik. Bundan sadece bir terim daha fazla alarak, 1.08×10^{-9} civarında bir hatayla

$$\int_0^1 \sin x^2\,dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} + \frac{1}{6894720} \approx 0.310268303$$

buluruz. Yamuk kuralındaki hata formülüyle bu hassaslığı garantilemek 8.000 alt aralık gerektirirdi. ■

Arktanjantlar

Bölüm 11.7, Örnek 5'te $\tan^{-1} x$ serisini, türev alıp,

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

bularak ve integre edip

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

elde ederek bulmuştuk. Ancak, bu sonucun dayandığı terim terime integrasyon teoremini ispatlamadık. Şimdi bu seriyi, yeniden,

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2} \tag{12}$$

sonlu formülünün iki tarafını da integre ederek bulacağız. Burada son terim, kalan terimleri, ilk terimi $a = (-1)^{n+1}t^{2n+2}$ ve oranı $r = -t^2$ olan bir geometrik seri olarak toplamaktan gelir. (12) Denkleminin iki tarafını da $t = 0$'dan $t = x$'e kadar integre etmek

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x)$$

verir. Burada

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$$

ile verilmektedir. İntegrandın paydası 1'e eşit veya 1'den daha büyüktür; dolayısıyla

$$|R_n(x)| \le \int_0^{|x|} t^{2n+2}\,dt = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

olur. $|x| \le 1$ ise, $n \to \infty$ iken, bu eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra yaklaşır. Dolayısıyla, $|x| \le 1$ ise, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ olur ve

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| \le 1.$$
$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \qquad |x| \le 1 \tag{13}$$

buluruz. $\tan^{-1} x$'in yüksek mertebeden türevlerinin formülleri uygun şekilde düzenlenebilir olmadıklarından, doğrudan Taylor serisini bulmak yerine bu yolu takip ettik. (13) denkleminde $x = 1$ alırsak, **Leibniz formülü**nü elde ederiz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots$$

Seri çok yavaş yakınsadığından fazla sayıda ondalık basamak hassasiyeti ile π'ye yaklaşımlarda kullanılmamaktadır. x'in sıfıra yakın değerlerinde $\tan^{-1} x$'in serisi çok daha hızlı yakınsamaktadır. Bu nedenden dolayı, π'yi hesaplamak için $\tan^{-1} x$'in serisini kullananlar çeşitli trigonometrik özdeşlikler kullanırlar.

Örneğin,

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{2} \qquad \text{and} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{1}{3},$$

ise

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

ve

$$\frac{\pi}{4} = \alpha + \beta = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$$

olur. Şimdi, (13) Denklemi $x = 1/2$ ile $\tan^{-1}(1/2)$'yi ve $x = 1/3$ ile $\tan^{-1}(1/3)$'ü hesaplamakta kullanılabilir. Bu sonuçların toplamının 4 ile çarpımı π'yi verir.

Belirsiz Formları Hesaplamak

Bazen belirsiz formları, içerilen fonksiyonları Taylor serisi olarak ifade ederek hesaplayabiliriz.

ÖRNEK 7 Kuvvet Serisi Kullanılan Limitler

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x - 1}$$

limitini hesaplayın.

Çözüm $\ln x$'i $(x-1)$'in kuvvetleri cinsinden bir Taylor serisi ile temsil ederiz. Bu, $\ln x$'in $x = 1$'de ürettiği Taylor serisini doğrudan hesaplayarak veya Bölüm 11.7, Örnek 6'daki $\ln x$ serisinde x yerine $x - 1$ yazarak yapılabilir. Her iki yoldan da,

$$\ln x = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \cdots$$

elde ederiz ve buradan

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x\to 1}\left(1 - \frac{1}{2}(x - 1) + \cdots\right) = 1$$ ■

buluruz.

ÖRNEK 8 Kuvvet Serisi Kullanılan Limitler

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \tan x}{x^3}$$

limitini hesaplayın.

Çözüm x^5'li terime kadar sin x ve tan x'in Taylor serileri

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \qquad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$$

ile verilir. Buradan

$$\sin x - \tan x = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{8} - \cdots = x^3\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots\right)$$

ve

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots\right)$$
$$= -\frac{1}{2}$$

bulunur.

$\lim_{x\to 0}((1/\sin x) - (1/x))$'i hesaplamak için seri kullanırsak, sadece limiti bulmakla kalmaz, aynı zamanda csc x için bir yaklaşım formülü keşfederiz.

ÖRNEK 9 csc x İçin Yaklaşım Formülü

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$$

limitini hesaplayın.

Çözüm

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{x - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots\right)}{x\cdot\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots\right)}$$

$$= \frac{x^3\left(\dfrac{1}{3!} - \dfrac{x^2}{5!} + \cdots\right)}{x^2\left(1 - \dfrac{x^2}{3!} + \cdots\right)} = x\,\frac{\dfrac{1}{3!} - \dfrac{x^2}{5!} + \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{3!} + \cdots}$$

Dolayısıyla,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(x\,\frac{\dfrac{1}{3!} - \dfrac{x^2}{5!} + \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{3!} + \cdots}\right) = 0$$

olur. Sağdaki bölümden, $|x|$ küçük ise,

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \approx x\cdot\frac{1}{3!} = \frac{x}{6} \qquad \text{veya} \qquad \csc x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{6}$$

olacağını görürüz.

TABLO 11.1 Sık Kullanılan Taylor Serileri

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \qquad -1 < x \le 1$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \tanh^{-1} x = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| < 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| \le 1$$

Binom Serileri

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^k}{k!} + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, \qquad |x| < 1$$

Burada

$$k \ge 3 \text{ için } \binom{m}{1} = m, \qquad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!}, \qquad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$$

ile verilir.

Not: Binom serilerini kapalı olarak yazmak için, $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$ verecek şekilde, $\binom{m}{0}$'ı 1 olarak tanımlamak ve $x^0 = 1$ almak (genellikle dışlanan $x = 0$ durumunda bile) alışkanlık haline gelmiştir. m pozitif bir tamsayıysa, seri x^m'de kesilir ve sonuç her x için yakınsak olur.

ALIŞTIRMALAR 11.10

Binom Serileri

1–10 alıştırmalarındaki fonksiyonların Binom serilerinin ilk dört terimini bulun.

1. $(1+x)^{1/2}$ **2.** $(1+x)^{1/3}$ **3.** $(1-x)^{-1/2}$

4. $(1-2x)^{1/2}$ **5.** $\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-2}$ **6.** $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2}$

7. $(1+x^3)^{-1/2}$ **8.** $(1+x^2)^{-1/3}$

9. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}$ **10.** $\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1/3}$

11–14 alıştırmalarındaki fonksiyonların Binom serilerini bulun.

11. $(1+x)^4$ **12.** $(1+x^2)^3$

13. $(1-2x)^3$ **14.** $\left(1-\frac{x}{2}\right)^4$

Başlangıç Değer Problemleri

15–32 alıştırmalarındaki başlangıç değer problemlerinin seri çözümlerini bulun.

15. $y' + y = 0,\quad y(0) = 1$ **16.** $y' - 2y = 0,\quad y(0) = 1$

17. $y' - y = 1,\quad y(0) = 0$ **18.** $y' + y = 1,\quad y(0) = 2$

19. $y' - y = x,\quad y(0) = 0$ **20.** $y' + y = 2x,\quad y(0) = -1$

21. $y' - xy = 0,\quad y(0) = 1$ **22.** $y' - x^2y = 0,\quad y(0) = 1$

23. $(1-x)y' - y = 0,\quad y(0) = 2$

24. $(1+x^2)y' + 2xy = 0,\quad y(0) = 3$

25. $y'' - y = 0,\quad y'(0) = 1$ ve $y(0) = 0$

26. $y'' + y = 0,\quad y'(0) = 0$ ve $y(0) = 1$

27. $y'' + y = x,\quad y'(0) = 1$ ve $y(0) = 2$

28. $y'' - y = x,\quad y'(0) = 2$ ve $y(0) = -1$

29. $y'' - y = -x,\quad y'(2) = -2$ ve $y(2) = 0$

30. $y'' - x^2y = 0,\quad y'(0) = b$ ve $y(0) = a$

31. $y'' + x^2y = x,\quad y'(0) = b$ ve $y(0) = a$

32. $y'' - 2y' + y = 0,\quad y'(0) = 1$ ve $y(0) = 0$

Yaklaşımlar ve Elemanter Olmayan İntegraller

T 33–36 alıştırmalarında, integralin değerini büyüklüğü 10^{-3}'ten küçük bir hatayla bulmak için seri kullanın. (Yanıt bölümü integrallerin değerlerini 5 ondalık basamağa yuvarlanmış olarak verir.)

33. $\int_0^{0.2} \sin x^2\, dx$ **34.** $\int_0^{0.2} \frac{e^{-x}-1}{x}\, dx$

35. $\int_0^{0.1} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\, dx$ **36.** $\int_0^{0.25} \sqrt[3]{1+x^2}\, dx$

T 37–40 alıştırmalarında, integralin değerini büyüklüğü 10^{-8}'den küçük bir hatayla bulmak için seri kullanın. (Yanıt bölümü integrallerin değerlerini 10 ondalık basamağa yuvarlanmış olarak verir.)

37. $\int_0^{0.1} \frac{\sin x}{x}\, dx$ **38.** $\int_0^{0.1} e^{-x^2}\, dx$

39. $\int_0^{0.1} \sqrt{1+x^4}\, dx$ **40.** $\int_0^{1} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$

41. $\int_0^1 \cos t^2\, dt$ integralinde $\cos t^2$'ye $1 - \frac{t^4}{2} + \frac{t^8}{4!}$ yaklaşımı kullanılırsa, hatayı tahmin edin.

42. $\int_0^1 \cos \sqrt{t}\, dt$ integralinde $\cos \sqrt{t}$'ye $1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4!} - \frac{t^3}{6!}$ yaklaşımı kullanılırsa, hatayı tahmin edin.

43–46 alıştırmalarında, verilen aralıkta büyüklüğü 10^{-3}'ten küçük bir hatayla $F(x)$'e yaklaşımda bulunan bir polinom bulun.

43. $F(x) = \int_0^x \sin t^2\, dt,\quad [0, 1]$

44. $F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2}\, dt,\quad [0, 1]$

45. $F(x) = \int_0^x \tan^{-1} t\, dt,$ **(a)** $[0, 0.5]$ **(b)** $[0, 1]$

46. $F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt,$ **(a)** $[0, 0.5]$ **(b)** $[0, 1]$

Belirsiz Formlar

47–56 alıştırmalarındaki limitleri serilerle hesaplayın.

47. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2}$ **48.** $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

49. $\lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t - (t^2/2)}{t^4}$ **50.** $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta - \theta + (\theta^3/6)}{\theta^5}$

51. $\lim_{y\to 0} \frac{y - \tan^{-1} y}{y^3}$ **52.** $\lim_{y\to 0} \frac{\tan^{-1} y - \sin y}{y^3 \cos y}$

53. $\lim_{x\to\infty} x^2(e^{-1/x^2} - 1)$ **54.** $\lim_{x\to\infty} (x+1)\sin\frac{1}{x+1}$

55. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$ **56.** $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\ln(x-1)}$

Teori ve Örnekler

57. $\ln(1+x)$'in Taylor serisinde x yerine $-x$ yazarak $\ln(1-x)$ serisini bulun. Sonra bunu $\ln(1+x)$'in Taylor serisinden çıkararak, $|x| < 1$ için,

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

olduğunu gösterin.

58. $\ln(1.1)$'i büyüklüğü 10^{-8}'den küçük bir hatayla bulmak için $\ln(1+x)$'in Taylor serisinde kaç terim almalısınız? Yanıtınızı açıklayın.

59. Alterne Seriler Tahmin Teoremine göre, $\pi/4$'ü büyüklüğü 10^{-3}'ten küçük bir hatayla bulduğunuzdan emin olmak için $\tan^{-1} 1$'in Taylor serisinin kaç terimini almanız gerekir? Yanıtınızı açıklayın.

60. $f(x) = \tan^{-1} x$'in Taylor serisinin $|x| > 1$ için ıraksadığını gösterin.

T **61. Pi'yi hesaplamak**

$$\pi = 48\tan^{-1}\frac{1}{18} + 32\tan^{-1}\frac{1}{57} - 20\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

denkleminin sağ tarafındaki her terimi büyüklüğü 10^{-6}'dan küçük bir hatayla hesaplamak için $\tan^{-1} x$'in Taylor serisinin kaç terimini almanız gerekir? Bunun tersine, $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ $\pi^2/6$'ya o kadar yavaş yakınsar ki, 50 terim bile iki ondalık basmak hassaslık vermez.

62. $\tan t$'nin Taylor serisinin sıfırdan farklı ilk üç terimini 0'dan x'e kadar integre ederek, $\ln \sec x$'in Taylor serisinin ilk üç terimini elde edin.

63. a. $\sin^{-1} x$'in Taylor serisinin sıfırdan farklı ilk dört terimini üretmek için Binom serisi ve

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = (1 - x^2)^{-1/2}$$

eşitliğini kullanın. Yakınsaklık yarıçapı nedir?

b. $\cos^{-1} x$ için bir seri (a) şıkkındaki sonucu kullanarak $\cos^{-1} x$'in Taylor serisinin sıfırdan farklı ilk beş terimini bulun.

64. a. $\sinh^{-1} x$ için bir seri

$$\sinh^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

fonksiyonunun Taylor serisinin sıfırdan farklı ilk dört terimini bulun.

T **b.** (a) şıkkındaki serinin ilk *üç* terimini kullanarak $\sinh^{-1} 0.25$'i hesaplayın. Hesaplama hatasının büyüklüğünün bir üst sınırını bulun.

65. $-1/(1+x)$ serisinden $1/(1+x)^2$'in Taylor serisini elde edin.

66. $2x/(1+x^2)^2$ için bir seri bulmak üzere $1/(1+x)^2$'nin Taylor serisini kullanın.

T **67. π'yi hesaplamak** İngiliz matematikçi Wallis

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cdots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cdots}.$$

formülünü keşfetti. Bu formülle π'yi 2 ondalık basamak hassaslıkla bulun.

T **68.** Alıştırma 57'deki formülü kullanarak $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$ için bir doğal logaritma, $\ln n$, tablosu oluşturun fakat, $\ln 4 = 2 \ln 2$, $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$, $\ln 8 = 3 \ln 2$, $\ln 9 = 2 \ln 3$ ve $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$ bağıntılarından yararlanarak işi çok az logaritmanın serisini hesaplamaya indirgeyin. Alıştırma 57'de aşağıdaki değerleri yerine koyarak işe başlayın:

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{13}$$

69. $\sin^{-1} x$ için bir seri $(1 - x^2)^{-1/2}$'nin binom serisini integre ederek, $|x| < 1$ için aşağıdaki eşitliği gösterin.

$$\sin^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

70. $|x| > 1$ için $\tan^{-1} x$ serisi.

$$\tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots, \quad x > 1$$

$$\tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots, \quad x < -1$$

serilerini

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{1 + (1/t^2)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^6} - \frac{1}{t^8} + \cdots$$

serisini birinci durumda x'ten ∞'a, ikincisindeyse $-\infty$'dan x'e kadar integre ederek bulun.

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1}(2/n^2)$'nın değeri

a. İki açının farkının tanjantını kullanarak

$$\tan\left(\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1}(n-1)\right) = \frac{2}{n^2}$$

olduğunu gösterin.

b.

$$\sum_{n=1}^{N} \tan^{-1}\frac{2}{n^2} = \tan^{-1}(N+1) + \tan^{-1} N - \frac{\pi}{4}$$

olduğunu gösterin.

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1}\frac{2}{n^2}$ değerini bulun.

11.11 Fourier Serileri

Tarihsel Biyografi

Jean-Baptiste Joseph Fourier

(1766–1830)

Taylor serilerinin bir f fonksiyonuna polinomlarla yaklaşmak için nasıl kullanılabileceğini gördük. Taylor polinomları özel bir $x = a$ noktası yakınlarında f fonksiyonuna uyan bir elbise verir, fakat uzak noktalarda yaklaşımdaki hata büyük olabilir. Geniş aralıklar üzerinde çoğu kez iyi yaklaşımlar veren ve Taylor polinomlarının işe yaramadığı süreksiz fonksiyonlarda çoğu kez işe yarayan başka bir yöntem vardır. Joseph Fourier tarafından tanıtılan bu yöntem sinüs ve kosinüs fonksiyonları toplamları ile fonksiyonlara yaklaşır. Yöntem, radyo sinyalleri ve alternatif akım gibi periyodik fonksiyonları incelemek, ısı iletimi problemlerini çözmek ve bilimde ve mühendislikteki birçok başka problemi çözmek için çok elverişlidir.

Bir f fonksiyonuna $[0, 2\pi]$ aralığı üzerinde sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının bir toplamı ile yaklaşmak istediğimizi varsayın,

$$f_n(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

veya toplam notasyonu ile

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sabitleri için, $f_n(x)$'i $f(x)$'e "muhtemel en iyi" yaklaşım yapacak, değerler seçmek isteyebiliriz. "Muhtemel en iyi" kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

1. $f_n(x)$ ve $f(x)$, 0'dan 2π'ye integre edildiklerinde aynı değeri verirler.
2. $f_n(x) \cos kx$ ve $f(x) \cos kx$, $(k = 1, \ldots, n)$ 0'dan 2π'ye integre edildiklerinde aynı değeri verirler.
3. $f_n(x) \sin kx$ ve $f(x) \sin kx$, $(k = 1, \ldots, n)$ 0'dan 2π'ye integre edildiklerinde aynı değeri verirler.

f_n üzerine toplam $2n + 1$ koşul koyuyoruz:

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$

$$\int_0^{2\pi} f_n(x) \cos kx\,dx = \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\,dx, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

$$\int_0^{2\pi} f_n(x) \sin kx\,dx = \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\,dx, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Aşağıdaki şekilde devam ederek $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_n$ katsayıları bütün bu koşullar sağlanacak şekilde seçilebilir. $\cos kx$ ve $\sin kx$'in $[0, 2\pi]$ üzerindeki integralleri $k \geq 1$ için sıfır olduğundan (1) Denkleminin iki tarafını 0'dan 2π'ye integre etmek

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)\,dx = 2\pi a_0$$

verir. Sadece a_0 sabit terimi f_n'nin $[0, 2\pi]$ üzerindeki integraline katkıda bulunur. Benzer bir hesaplama bütün diğer terimler için uygulanır. (1) Denkleminin iki tarafını $\cos x$ ile çarpar ve 0'dan 2π'ye integre edersek

$$\int_0^{2\pi} f_n(x) \cos x\,dx = \pi a_1$$

elde ederiz. Bu,

$$\int_0^{2\pi} \cos px \cos px\,dx = \pi$$

ile birlikte p, q ve m tamsayılar ve $p \neq q$ iken

$$\int_0^{2\pi} \cos px \cos qx\,dx = \int_0^{2\pi} \cos px \sin mx\,dx = \int_0^{2\pi} \sin px \sin qx\,dx = 0$$

olmasından elde edilir (9–13 alıştırmaları). (1) Denkleminin iki tarafını sin x ile çarpar ve 0'dan 2π'ye integre edersek

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)\sin x\,dx = \pi b_1$$

elde ederiz.

$$\cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx$$

ile benzer tarzda devam ederek her defasında sıfırdan farklı sadece bir terim, sinüs kare ile veya kosinüs kare ile bir terim, elde ederiz. Özet olarak,

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)\,dx = 2\pi a_0$$

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)\cos kx\,dx = \pi a_k, \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)\sin kx\,dx = \pi b_k, \qquad k = 1, \ldots, n$$

f_n yerine f yazıldığında soldaki integraller aynı kalacak şekilde f_n'yi seçeriz. Dolayısıyla bu eşitlikleri, f'den $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_n$ katsayılarını bulmak için kullanabiliriz:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \tag{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad k = 1, \ldots, n \tag{3}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx, \qquad k = 1, \ldots, n \tag{4}$$

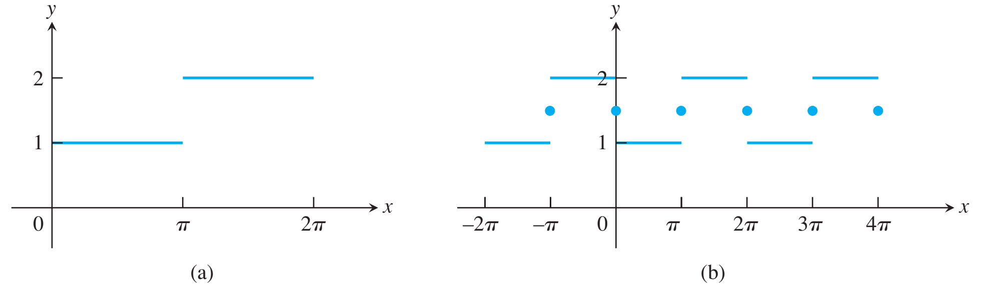
Bu katsayıları bulmak için gerekli tek koşul yukarıdaki integrallerin var olmasıdır. n'yi sonsuza götürür ($n \to \infty$) ve bu kuralları bir sonsuz serinin katsayılarını elde etmek için kullanırsak sonuçta elde edilen toplama $f(x)$'in **Fourier serisi** denir

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \tag{5}$$

ÖRNEK 1 Bir Fourier Serisi Açılımı Bulmak

Fourier serileri, Taylor serileri ile temsil edilemeyen bazı serileri temsil etmek için kullanılabilir. Örneğin Şekil 11.16a'da gösterilen f adım fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi \text{ ise} \\ 2, & \pi < x \le 2\pi \text{ ise} \end{cases}$$



ŞEKİL 11.16 (a)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi \\ 2, & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$$

adım fonksiyonu
(b) f'nin Fourier serisinin grafiği periyodiktir ve her süreksizlik noktasındaki değeri $3/2$ dir (Örnek 1).

f'nin Fourier serisinin katsayıları (2), (3) ve (4) Denklemleri kullanılarak hesaplanır.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2\,dx\right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \cos kx\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2\cos kx\,dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{2\sin kx}{k}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) = 0, \qquad k \ge 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin kx\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2\sin kx\,dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} + \left[-\frac{2\cos kx}{k}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) \\ &= \frac{\cos k\pi - 1}{k\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{k\pi}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$a_0 = \frac{3}{2}, \quad a_1 = a_2 = \cdots = 0,$$

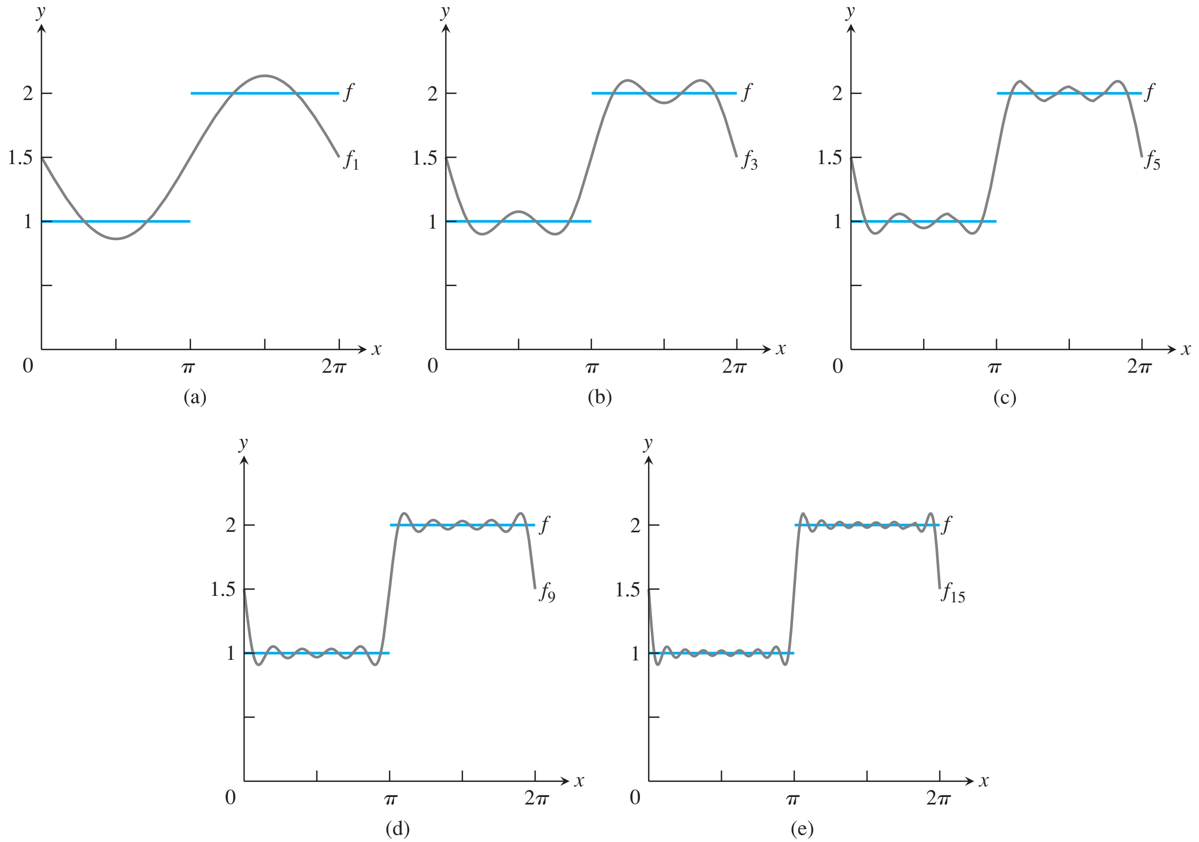
ve

$$b_1 = -\frac{2}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = -\frac{2}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = -\frac{2}{5\pi}, \quad b_6 = 0, \ldots$$

bulunur. Fourier serisi

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right).$$

dir. Şuna dikkat edin; $f(x)$ fonksiyonunun 1'den 2'ye sıçradığı $x = \pi$'de bütün sinüs terimleri ortadan kalkar ve serinin değeri olarak $3/2$ kalır. Bu, $f(\pi) = 1$ olduğundan f'nin π'deki değeri değildir. Fourier serisi ayrıca $x = 0$'da ve $x = 2\pi$'de de $3/2$ değerini alır. Aslında, Fourier serisindeki bütün terimler periyodiktir, 2π periyotlu, ve serinin $x + 2\pi$'deki değeri x'teki değeri ile aynıdır. Elde etmiş olduğumuz seri, tanım kümesi bütün reel sayılar olan ve 2π uzunluğundaki her aralıkta tekrarlanan bir kalıpla Şekil 11.16b'de grafiği çizilen periyodik fonksiyonu temsil etmektedir. Fonksiyon, $x = n\pi$, n = 0, ± 1, ± 2,... de sıçrama yapar ve bu noktalardaki değeri, her iki taraftan tek taraflı limitlerin ortalama değeri olan $3/2$dir. f fonksiyonunun Fourier serisinin yakınsaklığı Şekil 11.17'de gösterilmiştir. ■



ŞEKİL 11.17 Örnek 1'deki $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi \quad \text{ise} \\ 2, & \pi < x \le 2\pi \quad \text{ise} \end{cases}$ fonksiyonunun f_1, f_3, f_5, f_9 ve f_{15} Fourier yaklaşım fonksiyonları.

Fourier Serilerinin Yakınsaklığı

Taylor serileri bir fonksiyon ve türevlerinin tek bir $x = a$ noktasındaki değerlerinden hesaplanır ve Örnek 1'deki f gibi süreksiz fonksiyonların davranışlarını yansıtamazlar. Bir Fourier serisinin böyle fonksiyonları temsil etmekte kullanılabilmesinin nedeni, bir fonksiyonun Fourier serisinin bazı *integrallerin varlığına* dayanmasıdır. Oysa Taylor serisi bir fonksiyonun tek bir nokta civarındaki türevlerine dayanmaktadır. Bir fonksiyon süreksiz olsa bile integrali var olabilir.

Fourier serilerini oluşturmak için kullanılan katsayılar tam olarak, f'ye f_n ile yaklaşımdaki hatanın karesinin integralini minimize edecek şekilde seçilmesi gerekenlerdir. Yani, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_n$ katsayılarını söylediğimiz gibi seçmekle

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - f_n(x)]^2\, dx$$

integrali minimize edilir. Taylor serileri bir nokta civarında bir fonksiyona ve türevlerine yaklaşmak için kullanışlı iken, Fourier serileri bir aralık üzerine dağılmış bir hatayı minimize ederler.

Fourier serilerinin yakınsaklığı ile ilgili bir sonucu ispatsız ifade ediyoruz. Bir fonksiyonun bir I aralığı üzerinde sonlu sayıda süreksizlik noktası varsa ve bu noktalarda her iki taraftan tek-yanlı limitler mevcut ise fonksiyon I aralığı üzerinde **parçalı sürekli** dir. (Bölüm 5, Ek–Alıştırmalar 11–18'e bakın.)

TEOREM 24 $f(x)$, aralığında f ve f''nün parçalı sürekli olduğu bir fonksiyon olsun. Bu durumda f, sürekli olduğu bütün noktalarda kendi Fourier serisine eşittir. f'nin süreksiz olduğu bir noktasında Fourier serisi

$$\frac{f(c^+) + f(c^-)}{2}$$

değerine yakınsar. Burada $f(c^+)$ ve $f(c^-)$ değerleri c'deki tek yanlı limitlerdir.

ALIŞTIRMALAR 11.11

Fourier Serileri Bulmak

1–8 alıştırmalarında, verilen fonksiyonun Fourier serisini bulun. Her bir fonksiyonu çizin.

1. $f(x) = 1 \quad 0 \le x \le 2\pi$.

2. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi \\ -1, & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi \\ x - 2\pi, & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le \pi \\ 0, & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

5. $f(x) = e^x \quad 0 \le x \le 2\pi$.

6. $f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \le x \le \pi \\ 0, & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \le x \le \pi \\ 0, & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le \pi \\ -x, & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

Teori and Örnekler

9–13 alıştırmalarındaki sonuçları gerçekleyin. p ve q pozitif tamsayılardır.

9. $\int_0^{2\pi} \cos px\, dx = 0$ her p için

10. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin px\, dx = 0$ her p için

11. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos px \cos qx\, dx = \begin{cases} 0, & p \neq q \text{ ise} \\ \pi, & \end{cases}$

(*İpucu:* $\cos A \cos B = (1/2)\,[\cos(A + B) + \cos(A - B)]$.)

12. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin px \sin qx\, dx = \begin{cases} 0, & p \neq q \text{ ise} \\ \pi, & \end{cases}$

(*İpucu:* $\sin A \sin B = (1/2)\,[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$.)

13. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin px \cos qx\, dx = 0$ her p ve q için

(*İpucu:* $\sin A \cos B = (1/2)\,[\sin(A + B) + \sin(A - B)]$.)

14. Fonksiyonların toplamlarının Fourier Serileri f ve g Teorem 24'ün koşullarını sağlayan iki fonksiyon ise $f + g$'nin $[0, 2\pi]$'deki Fourier serisi f'nin Fourier serisi ile g'nin Fourier serisinin toplamı mıdır? Cevabınızı açıklayın.

15. Terim-terime türetme

a. Örnek 3'teki $f(x)$'in Fourier serisinin $0 < x < 2\pi$ iken $f(x)$'e yakınsadığını göstermek için Teorem 24'ü kullanın.

b. $f'(x) = 1$ olmasına rağmen, (a)'daki Fourier serisinin terim-terime türetilmesi ile elde edilen serinin ıraksak olduğunu gösterin.

16. Örnek 4'te tanımlanan Fourier serisinin Değerini bulmak için Teorem 24'ü kullanın ve $\dfrac{\pi^2}{6} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ olduğunu gösterin.

Bölüm 11 Bölüm Tekrar Soruları

1. Sonsuz bir dizi nedir? Böyle bir dizinin yakınsaması veya ıraksaması ne anlama gelir? Örnekler verin.
2. Azalmayan bir dizi nedir? Hangi koşullar altında böyle bir dizinin limiti vardır? Örnekler verin.
3. Dizilerin limitlerini hesaplamak için hangi teoremler vardır? Örnekler verin.
4. Hangi teorem bazen bir dizinin limitini hesaplamak için l'Hôpital kuralını kullanmamızı sağlar? Bir örnek verin.
5. Diziler ve serilerle çalışırken, hangi altı dizi limiti karşımıza çıkabilir?
6. Sonsuz bir seri nedir? Böyle bir serinin yakınsaması veya ıraksaması ne anlama gelir? Örnekler verin.
7. Bir geometrik seri nedir? Böyle bir seri ne zaman yakınsar veya ıraksar? Yakınsadığında, toplamı nedir? Örnekler verin.
8. Geometrik serilerin dışında, hangi yakınsak ve ıraksak serileri biliyorsunuz?
9. Iraksaklık için n. Terim Testi nedir? Testin altında hangi fikir yatar?
10. Yakınsak serilerin terim-terime toplamları ve farkları ile ıraksak ve yakınsak serilerin bir sabitle çarpımı hakkında ne söylenebilir?
11. Bir yakınsak seriye sonlu sayıda terim eklerseniz ne olur? Peki ya ıraksak bir seriye? Yakınsak veya ıraksak bir seriden sonlu sayıda terim çıkarırsanız ne olur?
12. Bir seriyi nasıl yeniden indislersiniz? Bunu neden yapmak isteyesiniz?
13. Hangi koşullar altında terimleri negatif olmayan sonsuz bir seri yakınsar veya ıraksar? Neden terimleri negatif olmayan serilerle çalışıyoruz?
14. İntegral Testi nedir? Arkasındaki neden nedir? Kullanımına bir örnek verin.
15. p-serileri ne zaman yakınsar veya ıraksar? Nereden biliyorsunuz? Yakınsak ve ıraksak p-serilerine örnekler verin.
16. Doğrudan Karşılaştırma Testi ve Limit Karşılaştırma Testi nedir? Bu testlerin altında yatan neden nedir? Kullanımlarına örnekler verin.
17. Oran ve Kök Testleri nedir? Her zaman yakınsaklığı veya ıraksaklığı belirleyecek bilgiyi verirler mi? Örnekler verin.
18. Alterne seri nedir? Böyle bir serinin yakınsaklığını belirlemek için hangi teorem vardır?
19. Bir alterne serinin toplamını bulurken yapılan hatayı serinin kısmi toplamlarından biriyle nasıl belirlersiniz? Belirlemenin altında yatan neden nedir?
20. Mutlak yakınsaklık ve koşullu yakınsaklık nedir? İkisi arasındaki ilişki nedir?
21. Mutlak yakınsak veya koşullu yakınsak bir serinin terimlerini yeniden düzenleme hakkında ne biliyorsunuz? Örnek verin.
22. Bir kuvvet serisi nedir? Bir kuvvet serisinin yakınsaklığını nasıl test edersiniz? Olası sonuçlar nedir?
23. Aşağıdakiler hakkındaki temel bilgiler nedir?

    a. Kuvvet serilerinin terim-terime türevinin alınması?

    b. Kuvvet serilerinin terim-terim integrasyonu?

    c. Kuvvet serilerinin çarpımı?

    örnekler verin.
24. Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$'da ürettiği Taylor serisi nedir? Seriyi inşa etmek için f hakkında ne bilmeniz gerekir? Bir örnek verin.
25. Maclaurin serisi nedir?
26. Bir Taylor serisi her zaman üretildiği fonksiyona yakınsar mı? Açıklayın.
27. Taylor polinomları nedir? Yararları nedir?

28. Taylor formülü nedir? Fonksiyonlara yaklaşım yapmak için Taylor polinomlarını kullanmaktan gelen hata hakkında ne söyler? Özel olarak, Taylor formülü bir lineerizasyon ve bir kuadratik yaklaşımdaki hata için ne söyler?

29. Binom serisi nedir? Hangi aralıkta yakınsar? Nasıl kullanılır?

30. Bazen kuvvet serilerini başlangıç değer problemlerini çözmek için nasıl kullanırsınız?

31. Bazen, elemanter olmayan integrallerin değerlerini tahmin etmek için kuvvet serilerini nasıl kullanırsınız?

32. $1/(1-x)$, $1/(1+x)$, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\ln[(1+x)/(1-x)]$ ve $\tan^{-1}x$'in Taylor serileri nedir? Bu seriler yerine kısmi toplamlarını yazmanın getireceği hatayı nasıl tahmin edersiniz?

33. Fourier serisi nedir? $[0, 2\pi]$ aralığında tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonu için $a_0, a_1, a_2, \dots$ ve $b_1, b_2, \dots$ Fourier katsayılarını nasıl hesaplarsınız?

34. f ve f' $[0, 2\pi]$ üzerinde parçalı sürekli iken $f(x)$'in Fourier serisinin yakınsaklığı hakkındaki teoremi ifade edin.

Bölüm 11 Problemler

Yakınsak veya Iraksak Diziler

1–18 problemlerinde n.inci terimleri görülen dizilerin hangileri yakınsar, hangileri ıraksar? Yakınsak her dizinin limitini bulun.

1. $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

2. $a_n = \dfrac{1-(-1)^n}{\sqrt{n}}$

3. $a_n = \dfrac{1-2^n}{2^n}$

4. $a_n = 1 + (0.9)^n$

5. $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$

6. $a_n = \sin n\pi$

7. $a_n = \dfrac{\ln(n^2)}{n}$

8. $a_n = \dfrac{\ln(2n+1)}{n}$

9. $a_n = \dfrac{n+\ln n}{n}$

10. $a_n = \dfrac{\ln(2n^3+1)}{n}$

11. $a_n = \left(\dfrac{n-5}{n}\right)^n$

12. $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$

13. $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n}}$

14. $a_n = \left(\dfrac{3}{n}\right)^{1/n}$

15. $a_n = n(2^{1/n}-1)$

16. $a_n = \sqrt[n]{2n+1}$

17. $a_n = \dfrac{(n+1)!}{n!}$

18. $a_n = \dfrac{(-4)^n}{n!}$

Yakınsak Seriler

19–24 problemlerindeki serilerin toplamlarını bulun.

19. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)(2n-1)}$

20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-2}{n(n+1)}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{(3n-1)(3n+2)}$

22. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{-8}{(4n-3)(4n+1)}$

23. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{4^n}$

Yakınsak veya Iraksak Seriler

25–40 problemlerindeki serilerin hangileri mutlak yakınsak, hangileri koşullu yakınsak ve hangileri ıraksaktır? Yanıtlarınızı açıklayın.

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-5}{n}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^3}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

30. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$

32. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{\ln(\ln n)}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3n^2}{n^3+1}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+1)}{2n^2+n-1}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n!}$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n 3^n}{n^n}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

40. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

Kuvvet Serileri

41–50 problemlerinde, **(a)** serinin yakınsaklık yarıçapı ve aralığını bulun. Sonra serinin **(b)** mutlak yakınsak ve **(c)** koşullu yakınsak olduğu x değerlerini belirleyin.

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n3^n}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n-2}}{(2n-1)!}$

43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(3x-1)^n}{n^2}$

44. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(2x+1)^n}{(2n+1)2^n}$

45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$

46. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$

47. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^{2n-1}}{3^n}$

48. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^{2n+1}}{2n+1}$

49. $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{csch} n)x^n$

50. $\sum_{n=1}^{\infty} (\coth n)x^n$

Maclaurin Serisi

51–56 problemlerindeki serilerin her biri bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki Taylor serisinin belirli bir noktadaki değeridir. Hangi fonksiyon ve hangi nokta? Serinin toplamı nedir?

51. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{4^n} + \cdots$

52. $\frac{2}{3} - \frac{4}{18} + \frac{8}{81} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{2^n}{n3^n} + \cdots$

53. $\pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$

54. $1 - \frac{\pi^2}{9 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{81 \cdot 4!} - \cdots + (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{3^{2n}(2n)!} + \cdots$

55. $1 + \ln 2 + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} + \cdots$

56. $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{45\sqrt{3}} - \cdots$

$+ (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)(\sqrt{3})^{2n-1}} + \cdots$

57–64 problemlerindeki fonksiyonların $x = 0$'daki Taylor serilerini bulun.

57. $\frac{1}{1-2x}$

58. $\frac{1}{1+x^3}$

59. $\sin \pi x$

60. $\sin \frac{2x}{3}$

61. $\cos (x^{5/2})$

62. $\cos \sqrt{5x}$

63. $e^{(\pi x/2)}$

64. e^{-x^2}

Taylor Serileri

65–68 problemlerinde, f'nin $x = a$'da ürettiği Taylor serisinin sıfırdan farklı ilk dört terimini bulun.

65. $f(x) = \sqrt{3 + x^2}$ $\quad x = -1$

66. $f(x) = 1/(1 - x)$ $\quad x = 2$

67. $f(x) = 1/(x + 1)$ $\quad x = 3$

68. $f(x) = 1/x$ $\quad x = a > 0$

Başlangıç Değer Problemleri

69–76 Problemlerindeki başlangıç değer problemlerini çözmek için kuvvet serileri kullanın.

69. $y' + y = 0, \quad y(0) = -1$

70. $y' - y = 0, \quad y(0) = -3$

71. $y' + 2y = 0, \quad y(0) = 3$

72. $y' + y = 1, \quad y(0) = 0$

73. $y' - y = 3x, \quad y(0) = -1$

74. $y' + y = x, \quad y(0) = 0$

75. $y' - y = x, \quad y(0) = 1$

76. $y' - y = -x, \quad y(0) = 2$

Elemanter Olmayan İntegraller

77–80 Problemlerinde, integrallerin değerine büyüklüğü 10^{-8}'den küçük bir hatayla yaklaşım yapmak için seri kullanın. (Yanıt bölümü integrallerin değerlerini 10 ondalık basamağa yuvarlanmış olarak verir.)

77. $\int_0^{1/2} e^{-x^3}\, dx$

78. $\int_0^1 x \sin (x^3)\, dx$

79. $\int_0^{1/2} \frac{\tan^{-1} x}{x}\, dx$

80. $\int_0^{1/64} \frac{\tan^{-1} x}{\sqrt{x}}\, dx$

Belirsiz Formlar

81–86 problemlerinde:

T **a.** Limiti hesaplamak için kuvvet serisi kullanın.

b. Hesabınızı desteklemek için bir grafik çizici kullanın.

81. $\lim_{x \to 0} \frac{7 \sin x}{e^{2x} - 1}$

82. $\lim_{\theta \to 0} \frac{e^\theta - e^{-\theta} - 2\theta}{\theta - \sin \theta}$

83. $\lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{2 - 2\cos t} - \frac{1}{t^2} \right)$

84. $\lim_{h \to 0} \frac{(\sin h)/h - \cos h}{h^2}$

85. $\lim_{z \to 0} \frac{1 - \cos^2 z}{\ln(1 - z) + \sin z}$

86. $\lim_{y \to 0} \frac{y^2}{\cos y - \cosh y}$

87. $\sin 3x$'in bir seri temsilini kullanarak,

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{r}{x^2} + s \right) = 0.$$

olmasını sağlayacak r ve s değerlerini bulun.

88. a. Bölüm 11.10, Örnek 9'daki $\csc x \approx 1/x + x/6$ yaklaşımının $\sin x \approx 6x/(6 + x^2)$ yaklaşımına yol açtığını gösterin.

T **b.** $f(x) = \sin x - x$ ve $g(x) = \sin x - (6x/(6 + x^2))$ fonksiyonlarının grafiklerini karşılaştırarak $\sin x \approx x$ ve $\sin x \approx 6x/(6 + x^2)$ yaklaşımlarının hassaslıklarını karşılaştırın. Bulduklarınızı tanımlayın.

Teori ve Örnekler

89. a.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{2n} - \sin \frac{1}{2n+1} \right)$$

serisinin yakınsadığını gösterin.

T **b.** Serinin toplamına yaklaşım yapmak için sinüslerin $n = 20$'ye kadar toplamının kullanılmasının getireceği hatanın büyüklüğünü bulun. Yaklaşım çok mu büyük, çok mu küçüktür? Yanıtınızı açıklayın.

90. a. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tan \frac{1}{2n} - \tan \frac{1}{2n+1} \right)$ serisinin yakınsadığını gösterin.

T **b.** Serinin toplamına yaklaşım yapmak için tanjantların $-\tan(1/41)$'e kadar toplamının kullanılmasının getireceği hatanın büyüklüğünü bulun. Yaklaşım çok mu büyük, çok mu küçüktür? Yanıtınızı açıklayın.

91. Aşağıdaki serinin yakınsaklık yarıçapını bulun.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot (3n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)} x^n.$$

92. Aşağıdaki serinin yakınsaklık yarıçapını bulun.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}{4 \cdot 9 \cdot 14 \cdot \cdots \cdot (5n-1)} (x-1)^n$$

93. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1-(1/n^2))$ serisinin n. kısmi toplamının bir kapalı-form formülünü bulun ve bunu kullanarak serinin yakınsaklığını veya ıraksaklığını belirleyin.

94. Serinin n. kısmi toplamının $n \to \infty$ iken limitini bularak $\sum_{k=2}^{\infty}(1/(k^2-1))$ toplamını hesaplayın.

95. **a.** Aşağıdaki serinin yakınsaklık aralığını bulun.

$$y = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \cdots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (3n-2)}{(3n)!}x^{3n} + \cdots$$

b. Serinin tanımladığı fonksiyonun

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^a y + b$$

şeklinde bir diferansiyel denklemi sağladığını gösterin ve a ile b sabitlerini bulun.

96. **a.** $x^2/(1+x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisini bulun.

b. Seri $x = 1$'de yakınsar mı? Açıklayın.

97. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ negatif olmayan sayıların yakınsak serileriyse, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

98. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ negatif olmayan sayıların ıraksak serileriyse, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

99. $\{x_n\}$ dizisinin ve $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{k+1}-x_k)$ serisinin ikisinin de yakınsayacağını veya ikisinin de ıraksayacağını ispatlayın.

100. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise ve her n için $a_n > 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/(1+a_n))$ serisinin de yakınsayacağını gösterin.

101. (*Bölüm 4.7, Alıştırma 27'nin devamı*) Bölüm 4.7'deki Alıştırma 27'yi yaptıysanız, pratikte Newyon yönteminin $f(x) = (x-1)^{40}$'ın kökünden, $x = 1$, yararlı bir tahminini veremeyecek kadar uzakta durduğunu görmüşsünüzdür. Yine de $x_0 \neq 1$ olan herhangi bir başlama değeri için, Newton yönteminin ürettiği yaklaşımların $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ dizisinin gerçekten 1'e yakınsadığnı gösterin.

102. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$'nin aşağıdaki koşulları sağlayan pozitif sayılar olduklarını varsayın.

i. $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots;$

ii. $a_2 + a_4 + a_8 + a_{16} + \cdots$ serisi ıraksar.

Aşağıdaki serinin ıraksadığını gösterin.

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots$$

103. Problem 102'deki sonucu kullanarak

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

serisinin ıraksadığını gösterin.

104. $\int_0^1 x^2 e^x\, dx$ 'in değerini çabuk bir şekilde tahmin etmek istediğinizi varsayın. Bunu yapmanın birkaç yolu vardır.

a. $\int_0^1 x^2 e^x\, dx$ 'i tahmin etmek için $n = 2$ ile yamuk kuralını kullanın.

b. x^2e^x'in Taylor serisinin sıfırdan farklı ilk üç terimini yazarak, x^2e^x'in dördüncü Taylor polinomu $P(x)$'i elde edin. $\int_0^1 P(x)\, dx$ için başka bir tahmin elde etmek üzere $\int_0^1 x^2 e^x\, dx$ 'i kullanın.

c. $f(x) = x^2e^x$'in ikinci türevi her $x > 0$ için pozitiftir. Bunun, (a) şıkkında elde edilen yamuk kuralı tahmininin neden çok büyük olduğu sonucuna varmanızı sağladığını açıklayın. (*İpucu*: İkinci türev size bir fonksiyonun grafiği hakkında ne söyler? Bununla, bu grafiğin altında kalan alana yapılan yamuk yaklaşımının ilişkisi nedir?

d. $f(x) = x^2e^x$'in bütün türevleri $x > 0$ için pozitiftir. Bunun neden $f(x)$'e [0, 1] aralığında yapılan bütün Maclaurin polinom yaklaşımlarının çok küçük olduğu sonucuna varmanızı sağladığını açıklayın. (*İpucu*: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.)

e. $\int_0^1 x^2 e^x\, dx$ 'i kısmi integrasyonla hesaplayın.

Fourier Serileri

105–108 problemlerindeki fonksiyonların Fourier serilerini bulun. Her fonksiyonu çizin.

105. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ 1, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

106. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 1, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

107. $f(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 \leq x \leq \pi \\ x - 2\pi, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

108. $f(x) = |\sin x|, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

Bölüm 11 Ek ve İleri Alıştırmalar

Yakınsaklık veya Iraksaklık

1–4 alıştırmalarındaki formüllerle tanımlanan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serilerinin hangileri yakınsak, hangileri ıraksaktır? Yanıtınızı açıklayın.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)^{n+(1/2)}}$ **2.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tan^{-1} n)^2}{n^2+1}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tanh n$ **4.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log_n (n!)}{n^3}$

5–8 alıştırmalarındaki formüllerle tanımlanan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serilerinin hangileri yakınsak, hangileri ıraksaktır? Yanıtınızı açıklayın.

5. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)} a_n$

(*İpucu:* Birkaç terim yazarak, hangi çarpanların sadeleştiğini görün ve genelleştirin.)

6. $a_1 = a_2 = 7, \quad a_{n+1} = \dfrac{n}{(n-1)(n+1)} a_n$ $n \geq 2$ ise

7. $a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$ $n \geq 2$ ise

8. $a_n = 1/3^n$ n tek ise, $a_n = n/3^n$ n çift ise

Taylor Serilerinin Merkezlerini Seçmek

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Taylor formülü f'nin x'teki değerini f'nin ve türevlerinin $x = a$'daki değerleri cinsinden ifade eder. Bundan dolayı, sayısal hesaplamalarda noktasının, f'nin ve türevlerinin değerlerini bildiğimiz bir nokta olması gerekir. Ayrıca, a'nın da f'nin ilgilendiğimiz değerlerine, $(x-a)^{n+1}$'in kalanı ihmal edebileceğimiz kadar küçük olmasını sağlayacak şekilde yakın olmasını isteriz.

9–14 alıştırmalarında, fonksiyonu verilen nokta civarında temsil etmesi için hangi Taylor serisini seçersiniz? (Birden fazla yanıt olabilir.) Seçtiğiniz serinin sıfırdan farklı ilk dört terimini yazın.

9. $\cos x$ $x = 1$ civarında **10.** $\sin x$ $x = 6.3$ civarında

11. e^x $x = 0.4$ civarında **12.** $\ln x$ $x = 1.3$ civarında

13. $\cos x$ $x = 69$ civarında **14.** $\tan^{-1} x$ $x = 2$ civarında

Teori ve Örnekler

15. a ve b, $0 < a < b$ olmak üzere sabitler olsun. $\{(a^n + b^n)^{1/n}\}$ dizisi yakınsar mı? Yakınsarsa, limiti nedir?

16. Aşağıdaki sonsuz serinin limitini bulun.

$$1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \frac{2}{10^7} + \frac{3}{10^8} + \frac{7}{10^9} + \cdots.$$

17. Aşağıdaki seriyi hesaplayın.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

18.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n+1)(2x+1)^n}$$

serisinin mutlak yakınsak olduğu bütün x değerlerini bulun.

19. Euler sabitini genelleştirmek Şekil, ikinci türevi $(0, \infty)$ aralığında pozitif olan iki kere türetilebilen, azalan bir pozitif f fonksiyonunun grafiğini göstermektedir. Her n için A_n sayısı, eğri ile $(n, f(n))$ ve $(n+1, f(n+1))$ noktalarını birleştiren aya benzer bölgenin alanıdır.

a. Şekli kullanarak $\sum_{n=1}^{\infty} A_n < (1/2)(f(1) - f(2))$ olduğunu gösterin.

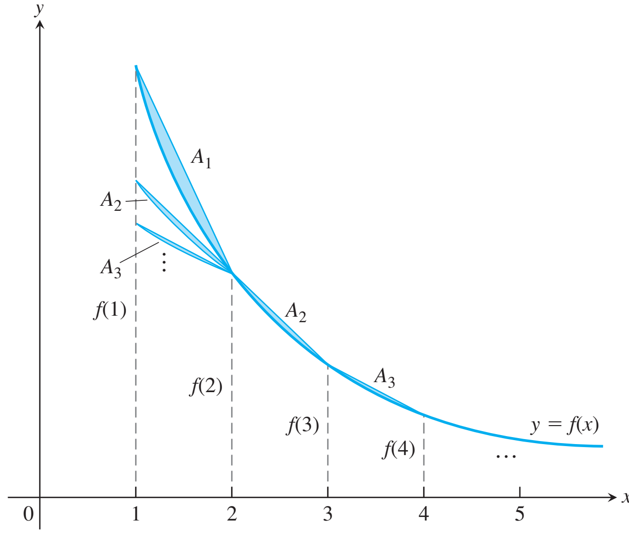
b. Aşağıdaki limitin varlığını gösterin.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f(k) - \frac{1}{2}(f(1) + f(n)) - \int_1^n f(x)\, dx\right].$$

c. Sonra aşağıdaki limitin varlığını gösterin.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\, dx\right].$$

$f(x) = 1/x$ ise, (c) şıkkındaki limit Euler sabitidir (Bölüm 11.3, Alıştırma 41). (Kaynak: "Convergence with Pictures", P .J. Rippon, *American Mathematical Monthly*, Vol. 93, No. 6, 1986, sayfa 476-78.)

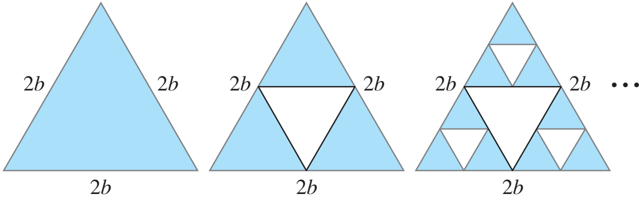


20. Bu alıştırma alt kenarları $2b$ olan "yukarı doğru" eşkenar üçgenle ilgilidir. Şeklin devamının gösterdiği gibi esas üçgenden "aşağı doğru" eşkenar üçgenler çıkarılmaktadır. Esas üçgenden çıkarılan üçgenlerin alanlarının toplamı sonsuz bir seri oluşturur.

a. Bu sonsuz seriyi bulun.

b. Bu sonsuz serinin toplamını ve dolayısıyla esas üçgenden çıkarılan toplam alanı bulun.

c. Esas üçgendeki her nokta çıkarılır mı? Neden çıktığını veya çıkmadığını açıklayın.



T **21. a.** a bir sabit olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\cos(a/n)}{n}\right)^n$$

limiti a'nın değerine bağlı mıdır? Bağlıysa, nasıl?

b. a ve b birer sabit ve $b \neq 0$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\cos(a/n)}{bn}\right)^n$$

limiti b'nin değerine bağlı mıdır? Bağlıysa, nasıl?

c. (a) ve (b)'de bulduklarınızı analizle doğrulayın.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\sin(a_n)}{2}\right)^n$$

serisinin de yakınsak olacağını gösterin.

23.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b^n x^n}{\ln n}$$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını 5 yapacak b değerini bulun.

24. sin x, ln x ve e^x'in polinom olmadığını nereden biliyorsunuz? Yanıtınızı açıklayın.

25.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)-\sin x - x}{x^3}$$

limitinin sonlu olduğu bir a değeri bulun ve limiti hesaplayın.

26.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax)-b}{2x^2}=-1$$

olacak şekilde a ve b değerlerini bulun.

27. Raabe (veya Gauss) testi İspat vermeden göstereceğimiz aşağıdaki test Oran Testi'nin genişletilmişidir.

Raabe testi: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ pozitif sabitlerden oluşan bir seri ise ve her $n \geq N$ için $|f(n)| < K$ olmak üzere

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{C}{n} + \frac{f(n)}{n^2} \qquad (1)$$

olmasını sağlayacak C, K ve N sabitleri varsa, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ serisi, $C > 1$ ise yakınsak ve $C \leq 1$ ise ıraksaktır.

Raabe testinin sonuçlarının $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ serileri hakkında bildiklerinizle uyuştuğunu gösterin.

28. (*Alıştırma 27'nin devamı.*) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ serisinin terimlerinin

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{(2n-1)^2}{(2n)(2n+1)}u_n$$

tekrarlama formülüyle verildiğini varsayın. Serinin yakınsak olup olmadığını belirlemek için Raabe testini kullanın.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise her n için $a_n \neq 1$ ve $a_n > 0$ ise

a. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$ serisinin yakınsak olduğunu gösterin.

b. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/(1-a_n)$ yakınsak mıdır? Açıklayın.

30. (*Alıştırma 29'un devamı*) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise ve her n için $1 > a_n > 0$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-a_n)$'in yakınsak olduğunu gösterin. (*İpucu*: Önce $|\ln(1-a_n)| \leq a_n/(1-a_n)$ olduğunu gösterin.)

31. Nicole Oresme'nin Teoremi Nicole Oresme'nin

$$1+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 3+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}+\cdots = 4$$

olduğunu söyleyen teoremini ispatlayın.
(*İpucu:* $1/(1-x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ denkleminin iki tarafının da türevini alın.))

32. a. $|x| > 1$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{x^n} = \frac{2x^2}{(x-1)^3}$$

bağıntısının iki kere türevin alıp, sonucu x ile çarpıp, x yerine $1/x$ yazarak aşağıdaki eşitliği gösterin.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}$$

b. (a) şıkkını kullanarak

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{x^n}.$$

denkleminin 1'den büyük gerçek çözümünü bulun.

33. $\pi/2$'nin hızlı bir tahmini. Bölüm 11.1'deki Alıştırma 127'yi yaptıysanız, $x_0 = 1$ ile başlayan ve $x_{n+1} = x_n + \cos x_n$ tekrarlama formülüyle üretilen dizinin hızla $\pi/2$'ye yakınsadığını görmüşsünüzdür. Yakınsaklığın süratini açıklamak için, $\epsilon_n = (\pi/2) - x_n$ olsun. (Aşağıdaki şekle bakın.) Bu durumda

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1} &= \frac{\pi}{2} - x_n - \cos x_n \\ &= \epsilon_n - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon_n\right) \\ &= \epsilon_n - \sin \epsilon_n \\ &= \frac{1}{3!}(\epsilon_n)^3 - \frac{1}{5!}(\epsilon_n)^5 + \cdots \end{aligned}$$

olur. Bu eşitliği kullanarak,

$$0 < \epsilon_{n+1} < \frac{1}{6}(\epsilon_n)^3$$

olduğunu gösterin.

34. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif sayılardan oluşan yakınsak bir seriyse, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ 'in yakınsaklığı hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

35. Kalite kontrolü.

a. $1/(1-x)^2$ için bir seri elde etmek üzere

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

serisinin türevini alın.

b. İki zar atıldığında, 7 gelme olasılığı $p = 1/6$'dır. Zarları sürekli olarak atarsanız, ilk olarak n.inci atışta 7 gelme olasılığı $q = 1 - p = 5/6$ olmak üzere $q^{n-1}p$'dir. İlk olarak bir 7 gelene kadar atış sayısının beklenen değeri $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}p$ 'dir. Bu serinin toplamını bulun.

c. Endüstriyel bir operasyona istatistik kontrol uygulayan bir mühendis olarak, oynar kayıştan rastgele alınan parçaları inceliyorsunuz. Örneklenen her parçayı "iyi" veya "kötü" olarak sınıflıyorsunuz. Bir parçanın iyi olma olasılığı p ve kötü olma olasılığı $q = 1 - p$ ise, bulunan ilk kötü parçanın incelenen n.inci parça olma olasılığı $p^{n-1}q$'dur. İlk kötü parçaya kadar (kötü parçayı da içerecek şekilde) incelenen ortalama parça sayısı $\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1}q$ 'dur. $0 < p < 1$ olduğunu varsayarak bu toplamı hesaplayın.

36. Beklenen değer Rastgele bir X değişkeninin 1, 2, 3,… değerlerini p_1, p_2, p_3, … olasılıklarıyla aldığını varsayın. Burada p_k X'in k'ye eşit olma olasılığıdır ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Ayrıca $p_k \geq 0$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ olduğunu da varsayın. $E(X)$ ile gösterilen X'in **beklenen değeri**, serinin yakınsaması koşuluyla, $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k$ sayısıdır. Aşağıdaki her durum için, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ olduğunu gösterin ve varsa $E(X)$'i hesaplayın (*İpucu*: Alıştırma 35'e bakın).

a. $p_k = 2^{-k}$ **b.** $p_k = \dfrac{5^{k-1}}{6^k}$

c. $p_k = \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

T **37. Güvenli ve etkili dozaj** Tek bir ilaç dozundan dolayı kandaki konsantrasyon, zamanla ilaç vucüttan atıldıkça, normalde azalır. Dolayısıyla, konsantrasyonun belirli bir seviyenin altına düşmemesi için, dozların periyodik olarak tekrarlanması gerekebilir. Tekrarlanan dozların etkisi için bir model $(n + 1)$ dozdan hemen önce kalan konsantrasyonu

$$R_n = C_0 e^{-kt_0} + C_0 e^{-2kt_0} + \cdots + C_0 e^{-nkt_0},$$

olarak verir. Burada C_0 tek bir dozun sağladığı konsantrasyon (mg/mL), k *azalma sabiti* (saat^{-1}) ve t_0 da dozlar arasındaki zamandır (saat). Şekle bakın.

a. R_n'yi kapalı formda tek bir kesir olarak yazın ve $R = \lim_{n\to\infty} R_n$ limitini bulun.

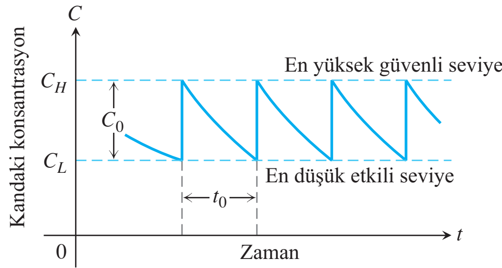
b. $C_0 = 1$ mg/mL, $k = 0.1$ sa^{-1} ve $t_0 = 10$ sa için R_1 ve R_{10}'u hesaplayın. R_{10} R'nin ne kadar iyi bir tahminidir?

c. $k = 0.01$ sa^{-1} ve $t_0 = 10$ sa ise, $R_n > (1/2)\,R$ olmasını sağlayacak en küçük n değerini bulun.

(Kaynak: Prescribing Safe and Effective Dosage, B. Horelick ve S. Koont, COMAP, Inc., Lexington MA.)

38. İki doz arasındaki zaman (*Alıştırma 37'nin devamı*) Eğer bir ilacın bir C_L konsantrasyonunun altında etkisiz, daha yüksek bir C_H konsantrasyonunun üstünde ise zararlı olduğu biliniyorsa, güvenli (C_H'nin üstünde değil), ama etkili (C_L'nin altında değil) bir konsantrasyon sağlayacak C_0 ve t_0 değerlerinin bulunması gerekir. Şekle bakın. Dolayısıyla

$$R = C_L \text{ ve } C_0 + R = C_H$$



Yani, $C_0 = C_H - C_L$ olur. Bu değerler Alıştırma 37'nin (a) şıkkında elde edilen R denklemine koyulursa, ortaya çıkan denklem

$$t_0 = \frac{1}{k}\ln\frac{C_H}{C_L}$$

şeklinde sadeleşir. Etkili bir seviyeye hızlı bir şekilde ulaşmak için, C_H mg/mL'lık bir konsantrasyon üretecek bir "yükleme" dozu verilebilir. Bundan sonra her t_0 saatte bir konsantrasyonu $C_0 = C_H - C_L$ mg/mL miktarında arttıracak bir dozla devam edilebilir.

a. t_0 için yukarıda verilen denklemi doğrulayın.

b. $k = 0.05$ sa^{-1} ve en yüksek güvenli konsantrasyon e kere en düşük etkili konsantrasyon ise, dozlar arasındaki güvenli ve etkili konsantrasyonu garantileyecek zaman uzunluğunu bulun.

c. $C_H = 2$ mg/mL, $C_L = 0.5$ mg/mL ve $k = 0.02$ sa^{-1} ise, ilacı vermek için bir program belirleyin.

d. $k = 0.2$ sa^{-1} olduğunu ve en küçük etkili konsantrasyonun 0.03 mg/mLolduğunu varsayın. 0.1 mg/mL'lik konsantrasyon sağlayan tek bir doz veriliyor. İlaç yaklaşık ne kadar süre etkili kalacaktır?

39. Sonsuz bir çarpım

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n) = (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)\cdots$$

sonsuz çarpımının, çarpımın doğal logaritması alınarak elde edilen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1 + a_n)$$

serisi yakınsaksa, yakınsayacağı söylenir. Her n için, $a_n > -1$ ise ve $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ yakınsak ise çarpımın yakınsak olacağını gösterin. (*İpucu*: $|a_n| < 1/2$ ise

$$|\ln(1 + a_n)| \le \frac{|a_n|}{1 - |a_n|} \le 2|a_n|$$

olduğunu gösterin.)

40. p bir sabitse,

$$1 + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot[\ln(\ln n)]^p} \quad \text{serisinin}$$

a. $p > 1$ ise yakınsayacağını, **b.** $p \le 1$ ise ıraksayacağını gösterin. Genelde, $f_1(x) = x$, $f_{n+1}(x) = \ln(f_n(x))$ ise ve n 1, 2, 3, … değerlerini alıyorsa, $f_2(x) = \ln x$, $f_3(x) = \ln(\ln x)$), … buluruz. $f_n(a) > 1$ ise,

$$\int_a^{\infty}\frac{dx}{f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)(f_{n+1}(x))^p}$$

$p > 1$ ise yakınsar, $p \le 1$ ise ıraksar.

41. a. Şu teoremi ispatlayın: $\{c_n\}$, her $t_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$ toplamının sınırlı olmasını sağlayacak şekilde sayılardan oluşan bir diziyse, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n/n$ serisi yakınsar ve değeri $\sum_{n=1}^{\infty} t_n/(n(n+1))$ 'e eşittir.

İspatın taslağı: c_1 yerine t_1 ve $n \ge 2$ için c_n yerine $t_n - t_{n-1}$ yazın. $s_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} c_k/k$ ise

$$s_{2n+1} = t_1\left(1 - \frac{1}{2}\right) + t_2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + t_{2n}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) + \frac{t_{2n+1}}{2n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n}\frac{t_k}{k(k+1)} + \frac{t_{2n+1}}{2n+1}$$

olduğunu gösterin. Bir M sabiti için, $|t_k| < M$ olduğundan,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t_k}{k(k+1)}$$

serisi mutlak yakınsaktır ve $n \to \infty$ iken s_{2n+1}'in bir limiti vardır. $s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} c_k/k$ ise, $n \to \infty$ iken, $s_{2n+1} - s_{2n} = c_{2n+1}/(2n+1)$ sıfıra yaklaşır, çünkü $|c_{2n+1}| = |t_{2n+1} - t_{2n}| < 2M$'dir. Dolayısıyla $\sum c_k/k$ serisi yakınsar ve limit $\sum_{k=1}^{\infty} t_k/(k(k+1))$ olur.

b. Bahsedilen teoremin aşağıdaki alterne harmonik seriye nasıl uygulanacağını gösterin.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

c.

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \cdots$$

serisinin yakınsadığını gösterin (İlk terimden sonra, işaretleri iki negatif, iki pozitif, iki negatif, iki pozitif şeklinde gider).

42. $-1 < x \leq 1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^{n-1}x^n]/n$ 'nin ln $(1 + x)$'e yakınsaklığı

a. Uzun bölme veya başka bir yolla

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}$$

olduğunu gösterin.

b. (a) şıkkındaki denklemi 0'dan x'e kadar t'ye göre integre ederek

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}$$

olmak üzere,

$$R_{n+1} = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt.$$

olduğunu gösterin.

c. $x \geq 0$ ise,

$$|R_{n+1}| \leq \int_0^x t^{n+1}\, dt = \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

olduğunu gösterin.

(*İpucu:* t, 0'dan x'e değişirken,

$$1 + t \geq 1 \quad \text{ve} \quad t^{n+1}/(1 + t) \leq t^{n+1}$$

ve

$$\left| \int_0^x f(t)\, dt \right| \leq \int_0^x |f(t)|\, dt \text{ olur.})$$

d. $-1 < x < 0$ ise

$$|R_{n+1}| \leq \left| \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1 - |x|}\, dt \right| = \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)(1 - |x|)}$$

olduğunu gösterin.

(*İpucu:* $x < t \leq 0$ ise, $|1 + t| \geq 1 - |x|$ ve

$$\left| \frac{t^{n+1}}{1+t} \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{1 - |x|} \text{ olur.})$$

e. Yapılan tartışmaları kullanarak,

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

serisinin $-1 < x \leq 1$ için, ln $(1 + x)$'e yakınsadığını gösterin.)

Bölüm 11 Teknoloji Uygulama Projeleri

Mathematica/Maple Modülü

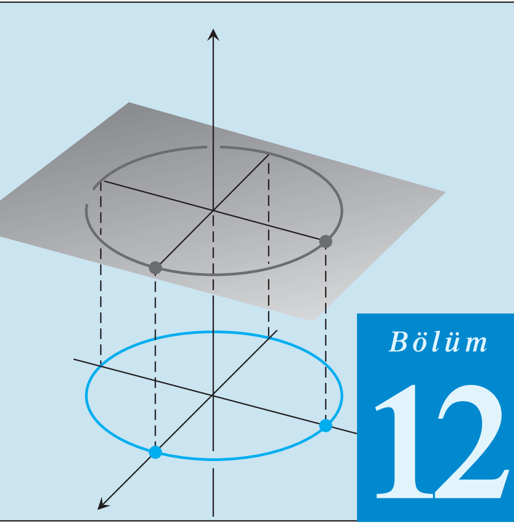
Zıplayan Top

Model, zıplayan bir topun yüksekliğini ve zıplaması sona erene kadar geçen zamanı tahmin eder.

Mathematica/Maple Modülü

Bir Fonksiyonun Taylor Polinomları Yaklaşımları

Bir grafik animasyon, Taylor polinomlarının, tanım kümeleri içindeki bir aralık üzerinde her mertebeden türevleri var olan fonksiyonlara yakınsadıklarını göstermektedir.



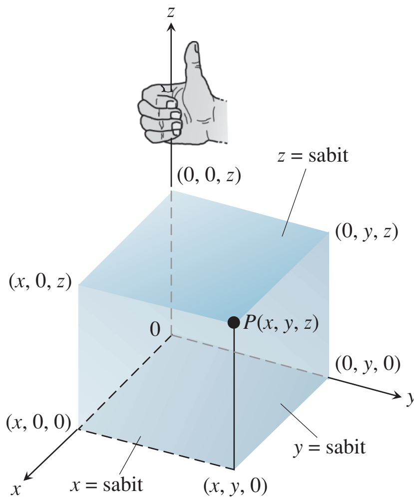
Bölüm 12

Vektörler ve Uzayda Geometri

GİRİŞ Birçok gerçek-dünya probleminde ve yüksek matematikte calculus uygulayabilmek için üç boyutlu uzayın matematiksel bir tanımına gereksinim duyarız. Bu bölümde üç-boyutlu koordinat sistemini ve vektörleri tanıtıyoruz. *xy*-düzleminde koordinatlar hakkındaki bildiklerimize dayanarak, uzaydaki koordinatları, *xy*-düzleminin üstündeki ve altındaki mesafeyi ölçen üçüncü bir eksen ekleyerek kurarız. Vektörler, uzayda doğruları, düzlemleri, yüzeyleri ve eğrileri tanımlamada basit yollar verdiklerinden, uzayın analitik geometrisini incelemek için kullanılırlar. Kitabın geri kalanında bu geometrik kavramları, uzayda hareketi ve çok değişkenli fonksiyonları ve bunların bilimdeki, mühendislikteki, ekonomideki ve yüksek matematikteki çok önemli uygulamalarını incelemek için kullanıyoruz.

12.1 Üç Boyutlu Koordinat Sistemleri

Uzayda noktaların yerlerini belirlemek için, Şekil 12.1'deki gibi düzenlenmiş ikişer ikişer aralarında dik üç tane koordinat ekseni kullanırız. Şekilde gösterilen *Ox*, *Oy* ve *Oz* eksenleri *sağ - el* kuralı ile belirlenmiş bir koordinat sistemi oluştururlar. Sağ elinizi parmaklarınız pozitif *x*-ekseninden pozitif *y*-eksenine doğru kıvrılacak şekilde tutarsanız, başparmağınız *z*-eksenini gösterir. Böylece, *z*-ekseninin pozitif yönünden aşağıya, *xy*-düzlemine baktığınızda, düzlemdeki pozitif açılar, pozitif *z*-ekseni çevresinde pozitif *x*-ekseninden saat yönünün tersine doğru ölçülürler. (*Sol-el* kuralı ile belirlenmiş bir koordinat sisteminde Şekil 12.1'deki *z*-ekseni aşağıyı gösterecekti ve düzlemdeki açılar, pozitif *x*-ekseninden saat yönünde ölçüldüklerinde pozitif olacaklardı. Bu, *xy*-düzlemindeki açıları ölçmek için kullandığımız anlaşma değildir. Sağ-el ve sol-el kuralına göre belirlenmiş koordinat sistemleri özdeş değildirler.)



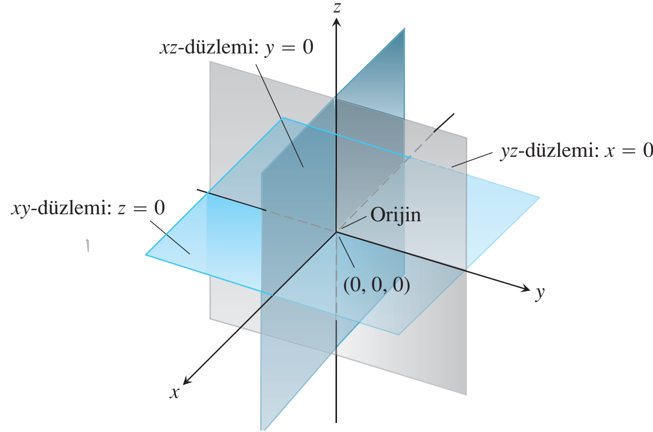
ŞEKİL 12.1 Kartezyen koordinat sistemi sağ el kuralına göredir.

Uzaydaki bir *P* noktasının (x, y, z) Kartezyen koordinatları, *P*'den geçen ve eksenlere dik olan düzlemlerin eksenleri kestikleri noktalardır. Uzayın Kartezyen koordinatlarına, bunları tanımlayan eksenler dik açılarla kesiştiklerinden, **dikdörtgen koordinatlar** da denir. *x*-eksenindeki noktaların *y*- ve *z*-koordinatları sıfıra eşittir. Yani koordinatları $(x, 0, 0)$ şeklindedir. Benzer şekilde, *y*-eksenindeki noktaların koordinatları $(0, y, 0)$ şeklinde ve *z*-eksenindeki noktaların koordinatları da $(0, 0, z)$ şeklindedir.

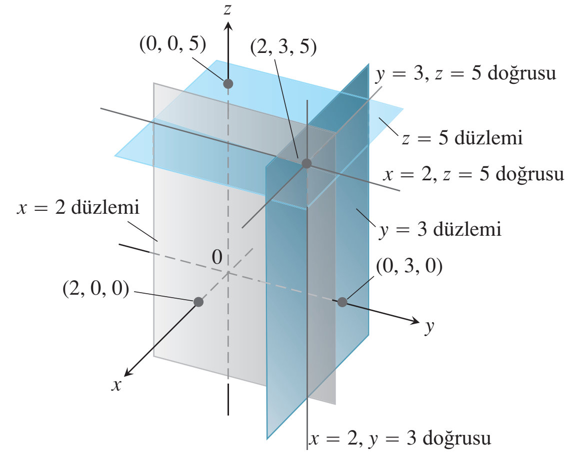
Koordinat eksenleri tarafından belirlenen düzlemler, standart denklemi $z = 0$ olan ***xy*-düzlemi**; standart denklemi $x = 0$ olan ***yz*-düzlemi** ve standart denklemi $y = 0$ olan ***xz*-düzlemi** dir. Bunlar **orijin** $(0, 0, 0)$ da kesişirler (Şekil 12.2). Orijin ayrıca basit olarak sadece 0 ile ve bazen *O* harfi ile tanımlanır.

Üç **koordinat düzlemi** $x = 0$, $y = 0$ ve $z = 0$ uzayı **sekizde bir bölge** adı verilen sekiz hücereye bölerler. Nokta koordinatlarının hepsinin pozitif olduğu sekizde bir bölgeye **birinci sekizde bir bölge** denir, diğer yedi bölge için belirli bir sayılama yoktur.

x-eksenine dik bir düzlemdeki noktaları hepsinin x-koordinatı, düzlemin x-eksenini kestiği sayı olan aynı x-koordinatıdır. y- ve z- koordinatları herhangi sayılar olabilir. Benzer şekilde, y-eksenine dik bir düzlemdeki noktaların ortak bir y-koordinatı, z-eksenine dik bir düzlemdeki noktaların da ortak bir z-koordinatı vardır. Bu düzlemlerin denklemlerini yazmak için, ortak koordinatıyla isimlendiririz. $x = 2$ düzlemi x-eksenine $x = 2$'de dik olan düzlemdir. $y = 3$ düzlemi y-eksenine $y = 3$'te dik olan düzlemdir. $z = 5$ düzlemi z-eksenine $z = 5$'te dik olan düzlemdir. Şekil 12.3 $x = 2$, $y = 3$ ve $z = 5$ düzlemlerini, kesişim noktaları (2, 3, 5) ile birlikte göstermektedir.



ŞEKİL 12.2 $x = 0$, $y = 0$ ve $z = 0$ düzlemleri uzayı sekiz tane sekizde bir bölgeye bölerler.



ŞEKİL 12.3 $x = 2$, $y = 3$ ve $z = 5$ düzlemleri (2, 3, 5) noktasından geçen üç doğru belirlerler.

Şekil 12.3'teki $x = 2$ ve $y = 3$ düzlemleri z-eksenine paralel bir doğruda kesişirler. Bu doğru x = 2, y = 3 denklem *çiftiyle* tanımlanır. Bir (x, y, z) noktası ancak ve ancak $x = 2$ ve $y = 3$ ise bu doğru üzerindedir. Aynı şekilde, y = 3 ve z = 5 düzlemlerinin kesişim doğrusu $y = 3$, $z = 5$ denklem çiftiyle tanımlanır. Bu doğru x eksenine paraleldir. $x = 2$ ve $z = 5$ düzlemlerinin y-eksenine paralel olan kesişim doğrusu $x = 2$, $z = 5$ denklem çiftiyle tanımlanır.

Aşağıdaki örneklerde, koordinat denklemlerini ve eşitsizliklerini tanımladıkları nokta kümeleri ile eşliyoruz.

ÖRNEK 1 Denklem ve Eşitsizlikleri Geometrik Olarak Yorumlamak

(a) $z \geq 0$ — xy-düzleminin üzerinde ve yukarısındaki noktalardan oluşan yarı uzay.

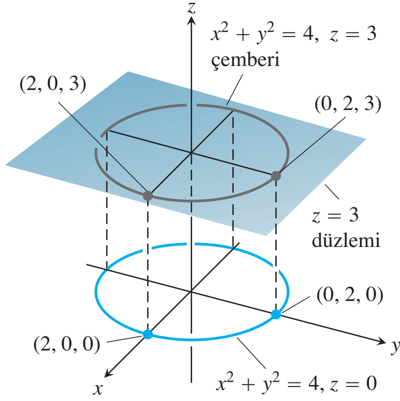
(b) $x = -3$ — x-eksenine $x = -3$'te dik olan düzlem. Düzlem yz-düzleminin 3 birim gerisinde ve ona paraleldir.

(c) $z = 0, x \leq 0, y \geq 0$ — xy-düzleminin ikinci dörtte bir bölgesi.

(d) $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ — Birinci sekizde bir bölge.

(e) $-1 \leq y \leq 1$ — $y = -1$ ve $y = 1$ düzlemleri arasındaki dilim (düzlemler dahil).

(f) $y = -2, z = 2$ — $y = -2$ ve $z = 2$ düzlemlerinin kesiştikleri doğru. Başka bir deyişle, (0, –2, 2) noktasından geçen x-eksenine paralel doğru. ■



ŞEKİL 12.4 $z = 3$ düzlemi içindeki $x^2 + y^2 = 4,\ z = 3$ çemberi (Örnek 2)

ÖRNEK 2 Denklemleri Çizmek

Hangi $P(x, y, z)$ noktaları aşağıdaki denklemleri sağlar?

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{ve} \quad z = 3$$

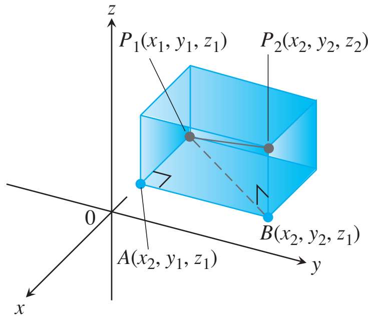
Çözüm Noktalar yatay $z = 3$ düzleminde bulunurlar ve bu düzlemde $x^2 + y^2 = 4$ çemberini oluştururlar. Bu nokta kümesine "$z = 3$ düzlemindeki $x^2 + y^2 = 4$ çemberi" veya daha da basit olarak "$x^2 + y^2 = 4,\ z = 3$ çemberi" deriz (Şekil 12.4). ■

Uzayda Uzaklık ve Küreler

xy-düzleminde iki nokta arasındaki uzaklık formülü uzaydaki noktalara genişletilir.

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2(x_2, y_2, z_2)$ Arasındaki Uzaklık

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



ŞEKİL 12.5 P_1 ve P_2 arasındaki uzaklığı P_1AB ve P_1BP_2 dik üçgenlerine Pisagor teoremini uygulayarak buluruz.

İspat Yüzleri koordinat düzlemlerine paralel, P_1 ve P_2 noktaları karşı köşelerde olan bir dikdörtgensel kutu kurarız (Şekil 12.5). Kutunun şekilde gösterilen köşeleri $A(x_2, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_1)$' ise kutunun üç kenarı, P_1A, AB) ve BP_2'nin uzunlukları

$$|P_1A| = |x_2 - x_1|, \qquad |AB| = |y_2 - y_1|, \qquad |BP_2| = |z_2 - z_1|$$

dir.
P_1BP_2 ve P_1AB üçgenlerinin her ikisi de dik açılı olduğundan Pisagor teoremini iki defa uygulamak

$$|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BP_2|^2 \qquad \text{ve} \qquad |P_1B|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2$$

verir (Şekil 12.5'e bakın).
Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
|P_1P_2|^2 &= |P_1B|^2 + |BP_2|^2 \\
&= |P_1A|^2 + |AB|^2 + |BP_2|^2 \qquad |P_1B|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2 \text{ yazın} \\
&= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 \\
&= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2
\end{aligned}$$

Bu yüzden

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

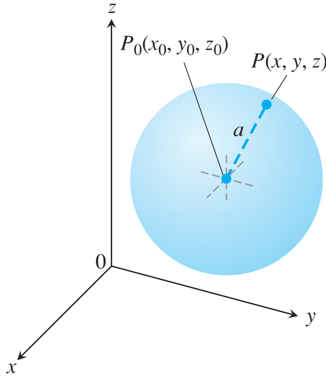
dir. ■

ÖRNEK 3 İki Nokta Arasındaki Uzaklığı Bulmak

$P_1(2, 1, 5)$ ve $P_2(-2, 3, 0)$ arasındaki uzaklık

$$\begin{aligned}
|P_1P_2| &= \sqrt{(-2 - 2)^2 + (3 - 1)^2 + (0 - 5)^2} \\
&= \sqrt{16 + 4 + 25} \\
&= \sqrt{45} \approx 6.708
\end{aligned}$$

olarak bulunur. ■



ŞEKİL 12.6 (x_0, y_0, z_0) merkezli ve a yarıçaplı kürenin standart denklemi şöyledir:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$

Uzaklık formülünü uzayda küre denklemleri yazmak için kullanabiliriz (Şekil 12.6). Bir $P(x, y, z)$ noktası, sadece $|P_0P| = a$ veya

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$

olduğunda, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ merkezli, a yarıçaplı bir kürenin üzerindedir.

Yarıçapı a ve Merkezi (x_0, y_0, z_0) Olan Kürenin Standart Denklemi

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$$

ÖRNEK 4 Bir Kürenin Merkezini ve Yarıçapını Bulmak

Aşağıdaki kürenin merkezini ve yarıçapını bulun.

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4z + 1 = 0.$$

Çözüm Bir kürenin merkezini ve yarıçapını bir çemberin merkezini ve yarıçapını bulduğumuz gibi buluruz. x-, y- ve z-terimlerini gerekli olduğu şekilde kareye tamamlarız ve her kuadratiği karesi alınmış lineer bir ifade olarak yazarız. Sonra, standart şekildeki denklemden, merkez ve yarıçapı okuruz. Elimizdeki küre için

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4z + 1 = 0$$

$$(x^2 + 3x) + y^2 + (z^2 - 4z) = -1$$

$$\left(x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + y^2 + \left(z^2 - 4z + \left(\frac{-4}{2}\right)^2\right) = -1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-4}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = -1 + \frac{9}{4} + 4 = \frac{21}{4}.$$

buluruz. Bu standart formdan $x_0 = -3/2$, $y_0 = 0$, $z_0 = 2$, ve $a = \sqrt{21}/2$ ' i okuruz. Merkez $(-3/2, 0, 2)$ ve yarıçap $\sqrt{21}/2$ 'dir. ■

ÖRNEK 5 Denklemleri ve Eşitsizlikleri Yorumlamak

(a) $x^2 + y^2 + z^2 < 4$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresinin içi.
(b) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresiyle sınırlanan katı top. Başka bir deyişle, içiyle birlikte $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresi.
(c) $x^2 + y^2 + z^2 > 4$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresinin dışı.
(d) $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \leq 0$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresinden xy-düzlemiyle ($z = 0$ düzlemi) kesilmiş alt yarım küre.

■

Kutupsal koordinatların, xy-düzleminde noktaları yerleştirmek için başka bir yol vermesi gibi (Bölüm 10.5), üç boyutlu uzay için de, burada geliştirilen Kartezyen Koordinat sisteminden farklı alternatif koordinat sistemleri vardır. Bu koordinat sistemlerinden ikisini Bölüm 15.6'da inceleyeceğiz.

ALIŞTIRMALAR 12.1

Kümeler, Denklemler ve Eşitsizlikler

1–12 alıştırmalarında koordinatları, verilen denklem çiftlerini sağlayan, uzaydaki nokta kümelerinin geometrik tanımını verin.

1. $x = 2, \quad y = 3$
2. $x = -1, \quad z = 0$
3. $y = 0, \quad z = 0$
4. $x = 1, \quad y = 0$
5. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0$
6. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = -2$
7. $x^2 + z^2 = 4, \quad y = 0$
8. $y^2 + z^2 = 1, \quad x = 0$
9. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x = 0$
10. $x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad y = -4$
11. $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25, \quad z = 0$
12. $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4, \quad y = 0$

13–18 alıştırmalarında, koordinatları verilen eşitsizlikleri veya denklem ve eşitsizlik kombinasyonlarını sağlayan uzaydaki nokta kümelerini tanımlayın.

13. **a.** $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z = 0$ **b.** $x \geq 0, \quad y \leq 0, \quad z = 0$
14. **a.** $0 \leq x \leq 1$ **b.** $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$
c. $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$
15. **a.** $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ **b.** $x^2 + y^2 + z^2 > 1$
16. **a.** $x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = 0$ **b.** $x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = 3$
c. $x^2 + y^2 \leq 1$, z'de kısıtlama yok.
17. **a.** $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$
b. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad z \geq 0$
18. **a.** $x = y, \quad z = 0$ **b.** $x = y$ z'de kısıtlama yok.

19-28 alıştırmalarında, verilen kümeyi tek bir denklem veya bir denklem çiftiyle tanımlayın.

19. Aşağıdaki verilenlere dik düzlem
a. (3, 0, 0)'da x-eksenine dik **b.** (0, –1, 0)'da y-eksenine dik
c. (0, 0, –2)'de z-eksenine dik
20. 20. (3, –1, 2)'den geçen ve aşağıdakilere dik düzlem
a. x-ekseni **b.** y-ekseni **c.** z-ekseni
21. 21. (3, –1, 1)'den geçen ve aşağıdakilere paralel düzlem
a. xy-düzlemi **b.** yz-düzlemi **c.** xz-düzlemi
22. 22. (0, 0, 0) merkezli, 2 yarıçaplı şu düzlemlerdeki çember
a. xy-düzlemi **b.** yz-düzlemi **c.** xz-düzlemi
23. 23. (0, 2, 0) merkezli, 2 yarıçaplı şu düzlemlerdeki çember
a. xy-düzlemi **b.** yz-düzlemi **c.** $y = 2$ düzlemi
24. 24. (–3, 4, 1) merkezli, 1 yarıçaplı ve şu düzlemlere paralel çember
a. xy-düzlemi **b.** yz-düzlemi **c.** xz-düzlemi
25. (1, 3, –1)'den geçen ve aşağıdakilere paralel doğru
a. x-ekseni **b.** y-ekseni **c.** z-ekseni
26. Uzayda orijinden ve (0, 2, 0) noktasından eşit uzaklıklı noktalar kümesi.
27. (1, 1, 3) noktasından geçen ve z-eksenine dik düzlemle, merkezi orijinde olan 5 yarıçaplı kürenin kesiştiği çember.
28. 28. Uzayda (0, 0, 1) noktasından 2 birim ve, aynı zamanda, (0, 0, –1) noktasından 2 birim uzakta bulunan noktalar kümesi.

29–34 alıştırmalarındaki kümeleri tanımlayacak eşitsizlikleri yazın.

29. $z = 0$ ve $z = 1$ düzlemleriyle sınırlı dilim (düzlemler dahil).
30. Birinci sekizde bir bölgede, koordinat düzlemleri ve $x = 2$, $y = 2$ ve $z = 2$ düzlemleriyle sınırlı katı küp.
31. xy-düzleminde ve altında bulunan noktalardan oluşan yarım uzay.
32. Merkezi orijinde olan 1 yarıçaplı kürenin üst yarıküresi.
33. Merkezi (1, 1, 1)'de olan 1 yarıçaplı kürenin **(a)** içi ve **(b)** dışı.
34. Merkezleri orijinde olan 1 ve 2 yarıçaplı kürelerle sınırlı kapalı bölge. (*Kapalı* kürelerin de dahil edilmesi gerektiği anlamına gelir. Küreleri dışarıda bırakmak isteseydik, kürelerle sınırlı *açık* bölgeyi isterdik. Bu *açık* ve *kapalı* aralıkları tanımlamamıza benzer: *kapalı* uç noktalar dahil, *açık* uç noktalar dışarıda bırakılmış anlamına gelir. Kapalı kümeler sınırları içerir, açık kümeler bunları dışarıda bırakır.)

Uzaklık

35–40 alıştırmalarında, P_1 ve P_2 noktaları arasındaki uzaklığı bulun.

35. $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(3, 3, 0)$
36. $P_1(-1, 1, 5)$, $P_2(2, 5, 0)$
37. $P_1(1, 4, 5)$, $P_2(4, -2, 7)$
38. $P_1(3, 4, 5)$, $P_2(2, 3, 4)$
39. $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(2, -2, -2)$
40. $P_1(5, 3, -2)$, $P_2(0, 0, 0)$

Küreler

41–44 alıştırmalarındaki kürelerin merkezlerini ve yarıçaplarını bulun.

41. $(x + 2)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 8$
42. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{4}$
43. $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 + \left(z + \sqrt{2}\right)^2 = 2$
44. $x^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{29}{9}$

45–48 alıştırmalarında merkez ve yarıçapları verilmiş olan kürelerin denklemlerini bulun.

	Merkez	Yarıçap
45.	(1, 2, 3)	$\sqrt{14}$
46.	(0, −1, 5)	2
47.	(−2, 0, 0)	$\sqrt{3}$
48.	(0, −7, 0)	7

49–52 alıştırmalarındaki kürelerin merkez ve yarıçaplarını bulun.

49. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4z = 0$

50. $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 8z = 0$

51. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x + y + z = 9$

52. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2y - 2z = 9$

Teori ve Örnekler

53. $P(x, y, z)$ noktasından aşağıdakilere olan uzaklığın formülünü bulun.

a. x-ekseni **b.** y-ekseni **c.** z-ekseni

54. $P(x, y, z)$ noktasından aşağıdakilere olan uzaklığın formülünü bulun.

a. xy-düzlemi **b.** yz-düzlemi **c.** xz-düzlemi

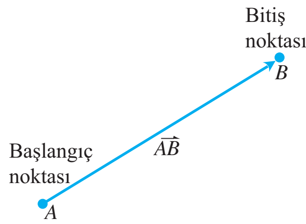
55. Köşeleri, $A(-1, 2, 1)$, $B(1, -1, 3)$ ve $C(3, 4, 5)$ olan üçgenin çevresini bulun.

56. $P(3, 1, 2)$ noktasının $A(2, -1, 3)$ ve $B(4, 3, 1)$ noktalarına eşit uzaklıkta olduğunu gösterin.

12.2 Vektörler

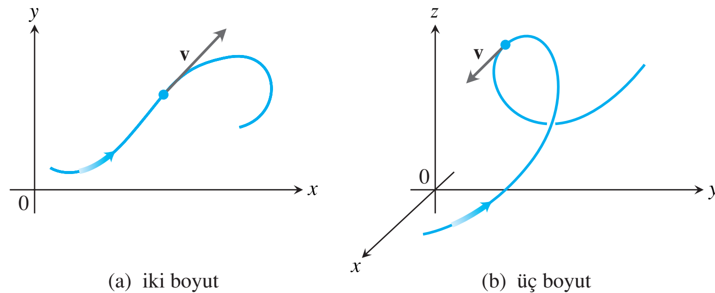
Ölçtüğümüz şeylerin bazıları büyüklükleriyle belirlenirler. Örneğin, kütle, uzunluk veya zamanı kaydetmek için, sadece bir sayı yazmamız ve uygun bir ölçüm birimi adlandırmamız gerekir. Fakat bir kuvveti, yer değiştirmeyi veya hızı tanımlamak için daha fazla bilgiye ihtiyacımız var. Bir kuvveti tanımlamak için, ne kadar büyük olduğunun yanı sıra, hangi yönde etkidiğini de kaydetmemiz gerekir. Bir cismin yer değiştirmesini tanımlamak için, ne kadar uzağa gittiğinin yanı sıra, hangi yönde yer değiştirdiğini de bilmemiz gereklidir. Bir cismin hızını tanımlamak için, ne kadar süratli gittiğinin yanı sıra, ne tarafa gittiğini de bilmemiz gereklidir.

Bileşen Formu

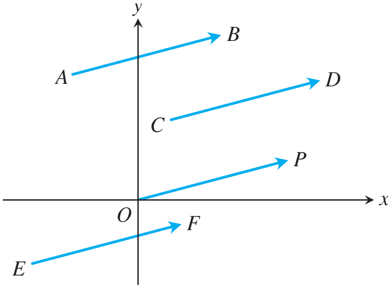


ŞEKİL 12.7 $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçası

Kuvvet, yer değiştirme veya hız gibi bir nicelik *vektör* olarak adlandırılır ve bir **yönlü doğru parçası** ile temsil edilir (Şekil 12.7). Ok hareketin yönünü işaret eder. Uzunluğu da uygun şekilde seçilmiş bir birimle hareketin büyüklüğünü verir. Örneğin, bir kuvvet vektörü kuvvetin etkidiği yönü gösterir; uzunluğu da kuvvetin gücünün bir ölçüsüdür; bir hız vektörü hareketin yönünü gösterir, uzunluğu da hareket eden cismin süratidir. Şekil 12.8, düzlemde veya uzayda bir yol boyunca hareket eden bir parçacığın belirli bir noktadaki hız vektörü **v**'yi göstermektedir. (Vektörlerin bu uygulaması Bölüm 13'te incelenmektedir.)



ŞEKİL 12.8 (a) düzlemde (b) uzayda bir yol boyunca hareket eden bir parçacığın hız vektörü. Yol içindeki ok parçacığın hareketinin yönünü göstermektedir.



ŞEKİL 12.9 Burada gösterilen düzlemdeki dört ok (yönlü doğru parçaları) aynı uzunlukta ve yöndedir. Dolayısıyla aynı vektörü temsil ederler ve

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{EF}$$

yazarız.

TANIMLAR Vektör, Başlangıç ve Bitiş Noktası, Uzunluk

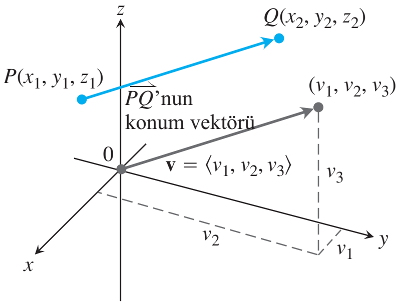
Düzlemde bir **vektör** yönlü bir doğru parçasıdır. $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasının **başlangıç noktası** A ve **bitiş noktası** B dir; uzunluğu $|\overrightarrow{AB}|$ ile gösterilir. İki vektörün yönleri ve büyüklükleri aynıysa, bu vektörler **eşittir**.

Vektörleri çizerken kullandığımız okların uzunlukları aynıysa, paralelseler ve aynı yönü gösteriyorlarsa, başlangıç noktalarına bakılmaksızın, aynı vektörü temsil ettikleri anlaşılır (Şekil 12.9).

Ders kitaplarda, vektörler genellikle küçük, koyu harflerle yazılırlar. Örneğin, **u**, **v** ve **w** gibi. Bazen, bir kuvvet vektörünü belirtmek için **F** gibi büyük, koyu harfler kullanırız. El yazısında, harflerin üzerine küçük oklar çizmek gelenek olmuştur. Örneğin, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ve $\vec{F}$ gibi.

Bir vektörün yönü konusunda daha emin olabilmek için, vektörleri cebirsel olarak temsil etmenin bir yoluna gereksinim duyarız.

$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ olsun. $\overrightarrow{PQ}$'ya eşit ve başlangıç noktası orijinde olan yalnız bir doğru parçası vardır (Şekil 12.10). Bu doğru parçası, **v**'nin **standart konumdaki** temsilcisi ve normalde **v** vektörünü temsil etmek için kullanacağımız vektördür. Standart konumda olduğunda **v**'yi bitiş noktasının (v_1, v_2, v_3) koordinatlarını yazarak belirtebiliriz. Düzlemde bir **v** vektörünün (v_1, v_2) bitiş noktasının iki koordinatı vardır.



ŞEKİL 12.10 Standart konumdaki bir $\overrightarrow{PQ}$ vektörünün başlangıç noktası orijindedir. $\overrightarrow{PQ}$ yönlü doğru parçası ve **v** paralel ve aynı yöndedirler.

TANIMLAR Bileşen Formu

v vektörü düzlemde, başlangıç noktası orijinde ve bitiş noktası (v_1, v_2)'de olan vektöre eşit, **iki-boyutlu** bir vektör ise **v**'nin **bileşen formu**

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$$

dir. **v** vektörü, başlangıç noktası orijinde ve bitiş noktası (v_1, v_2, v_3)'de olan vektöre eşit, **üç-boyutlu** bir vektör ise **v**'nin bileşen formu

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

dir.

Dolayısıyla, iki boyutlu bir vektör bir $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ reel sayı ikilisi, üç boyutlu bir vektör bir $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ reel sayı üçlüsüdür. v_1, v_2 ve v_3 sayılarına **v**'nin bileşenleri denir.

Şunu gözleyin, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vektörü, başlangıç noktası $P(x_1, y_1, z_1)$ ve bitiş noktası olan $Q_2(x_2, y_2, z_2)$ yönlü doğru parçası ile temsil edilirse $x_1 + v_1 = x_2$, $y_1 + v_2 = y_2$ ve $z_1 + v_3 = z_2$ dir (Şekil 12.10'a bakın). Böylece, $\overrightarrow{PQ}$'nun bileşenleri $v_1 = x_2 - x_1$, $v_2 = y_2 - y_1$ ve $v_3 = z_2 - z_1$ dir.

Özet olarak, $P(x_1, y_1, z_1)$ ve $Q(x_2, y_2, z_2)$, noktaları verildiğinde $\overrightarrow{PQ}$ 'ya eşit standart konumdaki vektör

$$\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2, -z_1 \rangle$$

dir. Düzlemde $P(x_1, y_1)$ ve $Q(x_2, y_2)$ noktaları ile iki boyutlu bir **v** vektörü için $\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$ dir. Düzlemsel vektörlerin üçüncü bileşenleri yoktur. Bu anlayış ile vektör cebrini üç boyutlu vektörler için geliştireceğiz ve iki boyutlu vektörler (düzlemsel bir vektör) için basitçe üçüncü bileşeni sileceğiz.

İki vektör ancak ve yalnız standart konum vektörleri özdeş ise eşittir. Böylece, $\langle u_1, u_2, u_3\rangle$ ve $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ ancak ve yalnız $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ ve $u_3 = v_3$ ise eşittir.

$\overrightarrow{PQ}$ vektörünün **büyüklüğü** veya **uzunluğu**, kendisini temsil eden herhangi bir yönlü doğru parçasının uzunluğudur. Özel olarak, $\overrightarrow{PQ}$ vektörünün standart konum vektörü $\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$ ise uzaklık formülü **v**'nin, $|\mathbf{v}|$ veya $\|\mathbf{v}\|$ ile gösterilen, büyüklüğünü veya uzunluğunu verir.

> $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ vektörünün **büyüklüğü** veya **uzunluğu** negatif olmayan
>
> $$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
>
> reel sayısıdır. (Şekil 12.10'a bakın.)

Uzunluğu sıfır olan tek vektör sıfır vektör $\mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle$ veya $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0\rangle$ dır. Bu vektör aynı zamanda belirli bir yönü olmayan tek vektördür.

ÖRNEK 1 Bir Vektörün Bileşen Formu ve Uzunluğu

Başlangıç noktası $P(-3, 4, 1)$ ve $Q(-5, 2, 2)$ bitiş noktası olan vektörün **(a)** bileşen formunu ve **(b)** uzunluğunu bulunuz.

Çözüm

(a) $\overrightarrow{PQ}$'yu temsil eden **v** standart konum vektörünün bileşenleri

$$v_1 = x_2 - x_1 = -5 - (-3) = -2, \qquad v_2 = y_2 - y_1 = 2 - 4 = -2$$

ve

$$v_3 = z_2 - z_1 = 2 - 1 = 1$$

dir. $\overrightarrow{PQ}$'nun bileşen formu

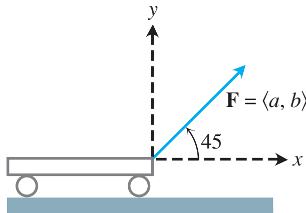
$$\mathbf{v} = \langle -2, -2, 1\rangle$$

dir.

(b) $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$'nun büyüklük veya uzunluğu

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

dir. ■



ŞEKİL 12.11 Arabayı öne doğru çeken kuvvet yatayla (pozitif x-ekseni) 45°'lik açı yapan 20 lb'lik bir **F** vektörü ile temsil edilmektedir (Örnek 2).

ÖRNEK 2 Bir Arabayı Hareket Ettiren Kuvvet

Küçük bir araba, düzgün yatay bir zemin üzerinde zeminle 45°'lik açı yapan 20 lb'lik bir **F** kuvvetiyle çekiliyor (Şekil 12.11). Arabayı ileri doğru çeken etkin kuvvet nedir?

Çözüm Etkin kuvvet, $\mathbf{F} = \langle a, b\rangle$'nin

$$a = |\mathbf{F}| \cos 45° = (20)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 14.14 \text{ lb}.$$

ile verilen yatay bileşenidir. **F**'nin iki boyutlu bir vektör olduğuna dikkat edin. ■

Vektör Cebri İşlemleri

Vektörleri içeren iki temel işlem *vektör toplamı* ve *skaler çarpım* dır. Bir **skaler** basit olarak bir reel sayıdır. Vektörlerden farkını vurgulamak istediğimizde bu şekilde adlandırılır. Skalerler pozitif, negatif veya sıfır olabilirler.

TANIMLAR Vektör Toplamı ve bir Vektörün bir Skalerle çarpımı

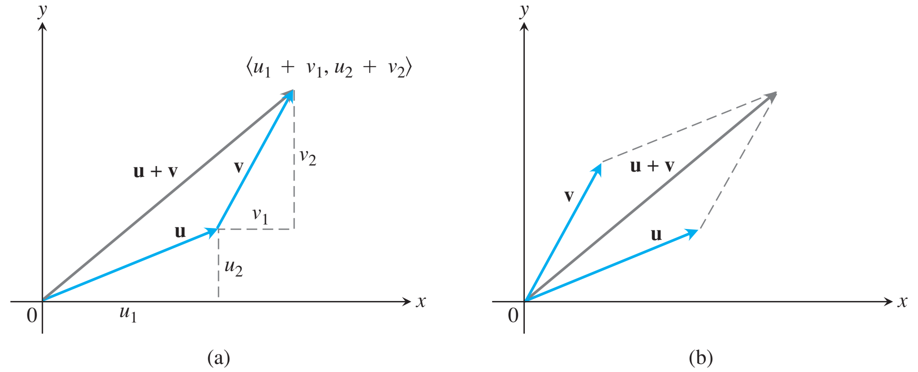
$\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ ve $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vektörler, k bir skaler olsun.

Toplama: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3 \rangle$

Skalerle Çarpım: $k\mathbf{u} = \langle ku_1, ku_2, ku_3 \rangle$

Vektörleri, karşılıklı bileşenlerini toplayarak toplarız. Bir vektörü bir skalerle çarpmak için vektörün her bileşenini bu skalerle çarparız. Tanımlar düzlemsel vektörlere de uygulanır. Fark sadece iki bileşenin olmasıdır; $\langle u_1, u_2 \rangle$ ve $\langle v_1, v_2 \rangle$.

Vektör toplama tanımı Şekil 12.12a'da geometrik olarak gösterilmiştir. Burada bir vektörün başlangıç noktası diğerinin bitiş noktasına yerleştirilmiştir. Başka bir yorum Şekil 12.12b'de gösterilmiştir (toplamın **paralelkenar kuralı**). Toplam vektöre **sonuç vektör** denir ve paralelkenarın köşegenidir. Fizikte kuvvetler, hızlar, ivmeler v.s. vektörel olarak toplanırlar. Böylece, elektrik ve yer çekiminden dolayı bir parçacığa etki eden kuvvet bu iki kuvvet vektörünü toplayarak elde edilir.

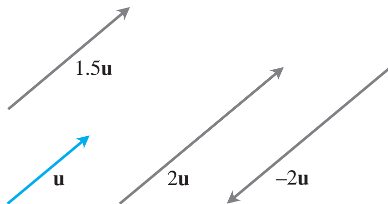


ŞEKİL 12.12 (a) Vektör toplamının geometrik yorumu (b) Vektör toplamının paralelkenar kuralı.

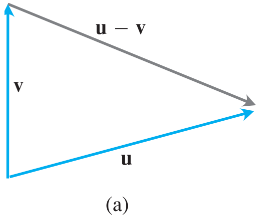
Şekil 12.13 **u** vektörünün ve k skalerinin $k\,\mathbf{u}$ çarpımının bir geometrik yorumunu göstermektedir. $k > 0$ ise $k\,\mathbf{u}$'nun yönü **u**'nun yönü ile aynıdır; $k < 0$ ise $k\mathbf{u}$'nun yönü **u**'nun yönü ile terstir. **u** ile $k\mathbf{u}$'nun uzunluklarını karşılaştırdığımızda

$$|k\mathbf{u}| = \sqrt{(ku_1)^2 + (ku_2)^2 + (ku_3)^2} = \sqrt{k^2(u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2)}$$
$$= \sqrt{k^2}\sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2} = |k|\,|\mathbf{u}|$$

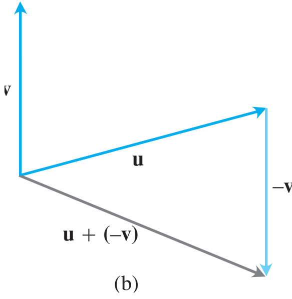
olduğunu görürüz. k **u**'nun uzunluğu k skalerinin mutlak değeri defa **u** vektörünün uzunluğudur. $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ vektörünün uzunluğu **u** vektörünün uzunluğu ile aynı fakat yönü **u**'nun yönü ile terstir.



ŞEKİL 12.13 **u**'nun skaler katları.



(a)



(b)

ŞEKİL 12.14 (a) **u** – **v** vektörü, **v**'ye eklendiğinde **u**'yu verir.
(b) **u** – **v** = **u** + (–**v**)

İki vektörün **u** – **v** **farkı** ile

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$$

ifadesini kastediyoruz. $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ ve $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ise

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3 \rangle$$

dir. $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{u}$ olduğuna ve dolayısıyla **v** vektörüne (**u** – **v**) vektörünü eklemenin **u** vektörünü verdiğine dikkat edin (Şekil 12.14a).

Şekil 12.14b, **u** – **v** farkını **u** + (–**v**) toplamı olarak göstermektedir.

ÖRNEK 3 Vektörler Üzerinde İşlemler

$\mathbf{u} = \langle -1, 3, 1 \rangle$ ve $\mathbf{v} = \langle 4, 7, 0 \rangle$ verilsin.

(a) $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ **(b)** $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ **(c)** $\left|\frac{1}{2}\mathbf{u}\right|$

vektörlerini bulunuz.

Çözüm

(a) $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = 2\langle -1, 3, 1 \rangle + 3\langle 4, 7, 0 \rangle = \langle -2, 6, 2 \rangle + \langle 12, 21, 0 \rangle = \langle 10, 27, 2 \rangle$

(b) $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle -1, 3, 1 \rangle - \langle 4, 7, 0 \rangle = \langle -1 - 4, 3 - 7, 1 - 0 \rangle = \langle -5, -4, 1 \rangle$

(c) $\left|\frac{1}{2}\mathbf{u}\right| = \left|\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{11}.$ ■

Sıradan aritmetiğin bir çok özelliği vektör işlemleri için de geçerlidir. Bu özellikler vektör toplamı ve bir skalerle çarpım tanımları kullanılarak kolayca gerçeklenebilir.

Vektör İşlemlerinin Özellikleri

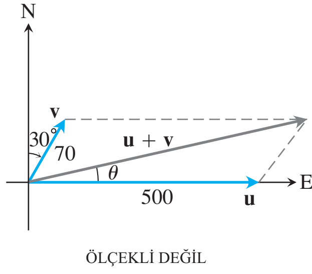
u, **v**, **w** vektörler ve a, b skalerler olsun.

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
5. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
6. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
7. $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
8. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
9. $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$

Vektör işlemlerinin önemli bir uygulaması havacılıkta ortaya çıkar.

ÖRNEK 4 Yere Göre Sürat ve Yön Bulmak

Durgun havada doğuya doğru 500-mil/sa ile uçmakta olan bir Boeing® 767® uçağı, doğunun 60° kuzeyi yönünde 70-mil/sa ile esen bir kuyruk rüzgarı ile karşılaşıyor. Uçak pusulasını doğuyu gösterir şekilde tutuyor, fakat rüzgardan dolayı yeni bir sürat ve yön kazanıyor. Bunlar nelerdir?



ŞEKİL 12.15 Örnek 4'te uçağın **u** ve rüzgarın **v** hızlarını temsil eden vektörler.

Çözüm **u** = uçağın hızı ve **v** = kuyruk rüzgarının hızı ise, $|\mathbf{u}| = 500$ ve $|\mathbf{v}| = 70$ tir (Şekil 12.15). Uçağın yere göre hızı, **u** + **v** *sonuç vektörü*nün büyüklüğü ve yönü ile verilmiştir. Pozitif x-ekseni ile doğuyu ve pozitif y-ekseni ile kuzeyi temsil edersek, **u** ve **v**'nin bileşen formları

$$\mathbf{u} = \langle 500, 0 \rangle \qquad \text{ve} \qquad \mathbf{v} = \langle 70\cos 60°, 70\sin 60° \rangle = \langle 35, 35\sqrt{3} \rangle$$

olur. Bu nedenle

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 535, 35\sqrt{3} \rangle$$

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = \sqrt{535^2 + (35\sqrt{3})^2} \approx 538.4$$

ve

$$\theta = \tan^{-1} \frac{35\sqrt{3}}{535} \approx 6.5° \qquad \text{Şekil 12.15}$$

olur. Uçağın yere göre yeni sürati yaklaşık olarak 538.4 mil/sa ve yeni yönü 6.5° kuzey doğu dur. ■

Birim Vektörler

Uzunluğu 1 olan bir **v** vektörüne **birim vektör** denir. Standart birim vektörler

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \qquad \text{ve} \qquad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

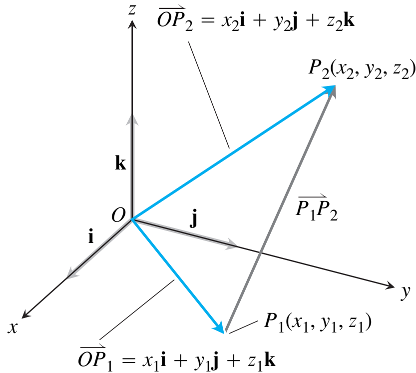
dir. Herhangi bir $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vektörü, standart birim vektörlerin bir *lineer birleşimi* olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle &= \langle v_1, 0, 0 \rangle + \langle 0, v_2, 0 \rangle + \langle 0, 0, v_3 \rangle \\ &= v_1\langle 1, 0, 0 \rangle + v_2\langle 0, 1, 0 \rangle + v_3\langle 0, 0, 1 \rangle \\ &= v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}. \end{aligned}$$

v_1 skalerine (veya sayısına) **v** vektörünün **i-bileşeni**, v_2'ye **j-bileşeni** ve v_3'e **k-bileşeni** deriz. Bileşen formunda $P_1\langle x_1, y_1, z_1 \rangle$'den $P_2\langle x_2, y_2, z_2 \rangle$'ye vektörü

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

dir (Şekil 12.16).



ŞEKİL 12.16 P_1'den P_2'ye vektörü $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$ dır.

$\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ise, uzunluğu $|\mathbf{v}|$ sıfır değildir ve

$$\left| \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} \right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|}|\mathbf{v}| = 1$$

olur. Yani, $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ vektörü **v** yönünde bir birim vektördür. Bu vektöre sıfırdan farklı **v** vektörünün **yönü** denir.

ÖRNEK 5 Bir Vektörün Yönünü Bulmak

$P_1(1, 0, 1)$'den $P_2(3, 2, 0)$'a giden vektör yönünde bir **u** birim vektörü bulun.

Çözüm $\overrightarrow{P_1P_2}$'yi uzunluğuyla böleriz:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (3-1)\mathbf{i} + (2-0)\mathbf{j} + (0-1)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} = \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{3} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}$$

u birim vektörü $\overrightarrow{P_1P_2}$'nin yönüdür. ■

ÖRNEK 6 Hız'ı Süratin ve Yönün Çarpımı Olarak İfade Etmek

$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ bir hız vektörü ise, **v**'yi uzunluğunun ve hareket yönündeki bir birim vektörü çarpımı olarak ifade edin.

Çözüm Sürat, **v**'nin büyüklüğü (uzunluğu) dur:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ birim vektörü **v** ile aynı yöndedir:

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{5} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}.$$

Dolayısıyla,

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = \underbrace{5}_{\text{Uzunluk (Sürat)}}\underbrace{\left(\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}\right)}_{\text{Hareketin yönü}}$$ ■

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Hermann Grassmann
(1809–1877)

Özet olarak, $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ yazarak sıfırdan farklı herhangi bir **v** vektörünü, iki önemli özelliği, uzunluk ve yönü cinsinden ifade edebiliriz.

> $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ise,
>
> **1.** $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ **v**, yönünde bir birim vektördür;
>
> **2.** $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ vektörü **v**'yi uzunluğu ve yönü cinsinden ifade eder.

ÖRNEK 7 Bir Kuvvet Vektörü

6 Newton'luk bir kuvvet $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ vektörü yönünde uygulanıyor. **F** kuvvetini büyüklüğünün ve yönünün bir çarpımı olarak ifade edin.

Çözüm Kuvvet vektörünün büyüklüğü 6 ve yönü $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ dir. Dolayısıyla,

$$\mathbf{F} = 6\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = 6\frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 6\frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{3}$$

$$= 6\left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}\right)$$

dir. ■

Bir Doğru Parçasının Orta Noktası

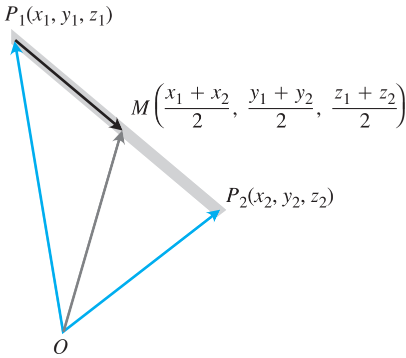
Vektörler çoğunlukla geometride faydalıdırlar. Örneğin, bir doğru parçasının orta noktasının koordinatları ortalama almakla bulunur.

> $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2(x_2, y_2, z_2)$ noktalarını birleştiren doğru parçasının orta noktası M
>
> $$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$
>
> noktasıdır.

Nedenini anlamak için,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP}_1 + \frac{1}{2}(\overrightarrow{P_1P_2}) = \overrightarrow{OP}_1 + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}_2 - \overrightarrow{OP}_1)\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2)\\ &= \frac{x_1 + x_2}{2}\mathbf{i} + \frac{y_1 + y_2}{2}\mathbf{j} + \frac{z_1 + z_2}{2}\mathbf{k}\end{aligned}$$

olduğunu gözleyin (Şekil 12.17).



ŞEKİL 12.17 Orta noktasının koordinatları, P_1 ve P_2 koordinatlarının ortalamasıdır.

ÖRNEK 8 Orta Noktaları Bulmak

$P_1(3, -2, 0)$ ve $P_2(7, 4, 4)$ noktalarını birleştiren doğru parçasının orta noktası

$$\left(\frac{3 + 7}{2}, \frac{-2 + 4}{2}, \frac{0 + 4}{2}\right) = (5, 1, 2)$$

noktasıdır. ■

ALIŞTIRMALAR 12.2

Düzlemde Vektörler

1–8 alıştırmalarında $\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle$ ve $\mathbf{v} = \langle -2, 5\rangle$ olsun. Vektörün **(a)** bileşen formunu ve **(b)** büyüklüğünü (uzunluğunu) bulun.

1. $3\mathbf{u}$

2. $-2\mathbf{v}$

3. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

4. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

5. $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$

6. $-2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$

7. $\frac{3}{5}\mathbf{u} + \frac{4}{5}\mathbf{v}$

8. $-\frac{5}{13}\mathbf{u} + \frac{12}{13}\mathbf{v}$

9–16 alıştırmalarında vektörün bileşen formunu bulun.

9. $P = (1, 3)$ ve $Q = (2, -1)$ olmak üzere $\overrightarrow{PQ}$, vektörü

10. O orijin ve P, $R = (2, -1)$ ve $S = (-4, 3)$ noktalarını birleştiren RS doğru parçasının orta noktası olmak üzere, $\overrightarrow{OP}$ vektörü

11. $A = (2, 3)$ noktasından orijine olan vektör

12. $A = (1, -1)$, $B = (2, 0)$, $C = (-1, 3)$ ve $D = (-2, 2)$ olmak üzere $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ 'nin toplamı

13. Pozitif x-ekseni ile $\theta = 2\pi/3$ açısını yapan birim vektör

14. Pozitif x-ekseni ile $\theta = -3\pi/4$ açısını yapan birim vektör

15. $\langle 0, 1\rangle$ vektörünü orijin etrafında saat yönünün tersine 120° çevirmekle elde edilen birim vektör

16. $\langle 1, 0\rangle$ vektörünü orijin etrafında saat yönünün tersine 135° çevirmekle elde edilen birim vektör

Uzayda Vektörler

17–22 alıştırmalarında her vektörü $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ formunda ifade edin.

17. $P_1 = (5, 7, -1)$ noktası ve $P_2 = (2, 9, -2)$ noktası ise $\overrightarrow{P_1P_2}$

18. $P_1 = (1, 2, 0)$ noktası ve $P_2 = (-3, 0, 5)$ noktası ise $\overrightarrow{P_1P_2}$

19. $A = (-7, -8, 1)$ noktası ve $B = (-10, 8, 1)$ noktası ise $\overrightarrow{AB}$

20. $A = (1, 0, 3)$ noktası ve $B = (-1, 4, 5)$ noktası ise $\overrightarrow{AB}$

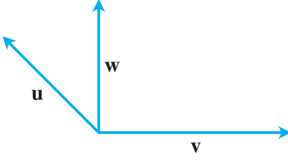
21. $\mathbf{u} = \langle 1, 1, -1\rangle$ ve $\mathbf{v} = \langle 2, 0, 3\rangle$ ise $5\mathbf{u} - \mathbf{v}$

22. $\mathbf{u} = \langle -1, 0, 2\rangle$ ve $\mathbf{v} = \langle 1, 1, 1\rangle$ ise $-2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$

Geometri ve Hesaplama

23–24 alıştırmalarında belirtilen vektörü çizmek için vektörleri gerektiği şekilde uç uca ekleyin.

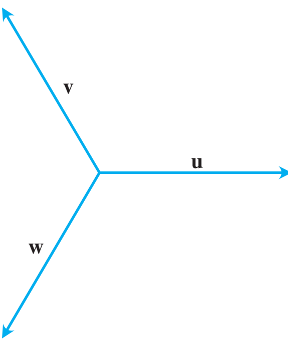
23.



a. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ **b.** $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$

c. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ **d.** $\mathbf{u} - \mathbf{w}$

24.



a. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ **b.** $\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}$

c. $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ **d.** $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$

Uzunluk ve Yön

25–30 alıştırmalarında her vektörü uzunluğunun ve yönünün bir çarpımı olarak ifade edin.

25. $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ **26.** $9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

27. $5\mathbf{k}$ **28.** $\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{k}$

29. $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$ **30.** $\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$

31. Uzunluğu ve yönü verilen vektörleri bulun. Hesaplamayı, yazmadan yapmayı deneyin.

Uzunluk	Yön
a. 2	$\mathbf{i}$
b. $\sqrt{3}$	$-\mathbf{k}$
c. $\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}$
d. 7	$\frac{6}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}$

32. Uzunluğu ve yönü verilen vektörleri bulun. Hesaplamayı, yazmadan yapmayı deneyin.

Uzunluk	Yön
a. 7	$-\mathbf{j}$
b. $\sqrt{2}$	$-\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{k}$
c. $\frac{13}{12}$	$\frac{3}{13}\mathbf{i} - \frac{4}{13}\mathbf{j} - \frac{12}{13}\mathbf{k}$
d. $a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$

33. $\mathbf{v} = 12\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$ yönünde, büyüklüğü 7 olan bir vektör bulun.

34. $\mathbf{v} = (1/2)\mathbf{i} - (1/2)\mathbf{j} - (1/2)\mathbf{k}$'nın ters yönünde, büyüklüğü 3 olan bir vektör bulun.

Noktalarla Belirlenen Vektörler; Orta Noktalar

35–38 alıştırmalarında

a. $\overrightarrow{P_1P_2}$'nin yönünü ve

b. P_1P_2 doğru parçasının orta noktasını bulun.

35. $P_1(-1, 1, 5)$ $P_2(2, 5, 0)$

36. $P_1(1, 4, 5)$ $P_2(4, -2, 7)$

37. $P_1(3, 4, 5)$ $P_2(2, 3, 4)$

38. $P_1(0, 0, 0)$ $P_2(2, -2, -2)$

39. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ve $B = (5, 1, 3)$ ise A'yı bulun.

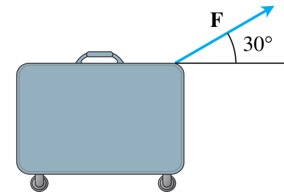
40. $\overrightarrow{AB} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ ve $A = (-2, -3, 6)$ ise B'yi bulun.

Teori ve Uygulamalar

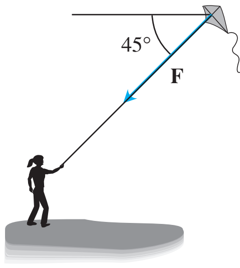
41. Lineer Birleşim $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ve $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ olsun. $\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$ olacak şekilde a ve b skalerleri bulun.

42. Lineer Birleşim $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ve $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ olsun $\mathbf{u}_1$ vektörü $\mathbf{v}$'ye paralel $\mathbf{u}_2$ vektörü $\mathbf{w}$'ya paralel olmak üzere $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ olarak yazın (Alıştırma 41'e bakın).

43. Kuvvet vektörü Bir bavulu (aşağıda çizili) büyüklüğü $|\mathbf{F}| = 10$ lb olan bir kuvvetle çekiyorsunuz. $\mathbf{F}$'nin $\mathbf{i}$- ve $\mathbf{j}$- bileşenlerini bulun.



44. Kuvvet vektörü Bir uçurtma ipi, uçurtmaya yatayla 45°'lik bir açı yapan 12 lb'luk ($|\mathbf{F}| = 12$) bir kuvvet uygulamaktadır. $\mathbf{F}$'nin yatay ve dikey bileşenlerini bulun.



45. Hız Bir uçak kuzeyin 25° batısı yönünde 800 km/sa ile uçuyor. Pozitif x-ekseninin doğuyu ve pozitif y-ekseninin kuzeyi gösterdiğini kabul ederek uçağın hızının bileşen formunu bulun.

46. Hız Bir uçak güneyin 10° doğusu yönünde 600 km/sa ile uçuyor. Pozitif x-ekseninin doğuyu ve pozitif y-ekseninin kuzeyi gösterdiğini kabul ederek uçağın hızının bileşen formunu bulun.

47. Konum Bir kuş yuvasından doğunun 60° kuzeyi yönünde 5 km uçuyor ve buradaki bir ağaçta durup dinleniyor. Sonra 10 km güneydoğuya uçarak bir telefon direğinde duruyor. Orijini kuşun yuvası olan, x-ekseninin doğuyu, y-ekseninin kuzeyi gösterdiği bir xy-koordinat sistemi çizin.

a. Ağaç hangi noktadadır?

b. Telefon direği hangi noktadadır?

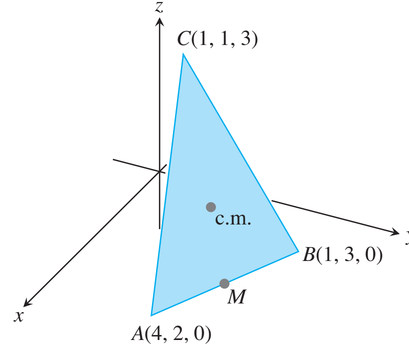
48. $P_1(x_1, y_1, z_1)$ noktasından $P_2(x_2, y_2, z_2)$ noktasına olan doğru parçasını $p/q = r$ oranı ile iki uzunluğa bölen Q noktasının koordinatlarını bulmak için benzer üçgenler kullanın.

49. Bir üçgenin kenarortayları A, B ve C'nin aşağıda gösterilen sabit yoğunluklu ince üçgen plakanın köşe noktaları olduğunu varsayın.

a. C'den AB kenarının orta noktası M'ye giden vektörü bulun.

b. C'den, CM kenarortayında C'den M'ye olan uzaklığın üçte ikisinde bulunan noktaya giden vektörü bulun.

c. ΔABC'nin kenarortalarının kesiştikleri noktanın koordinatlarını bulun. Bölüm 6.4, Alıştırma 29'a göre, bu nokta plakanın kütle merkezidir.



50. Orijinden, köşeleri

$$A(1, -1, 2),\ B(2, 1, 3) \text{ ve } C(-1, 2, -1)$$

olan üçgenin kenarortalarının kesiştikleri noktaya giden vektörü bulun.

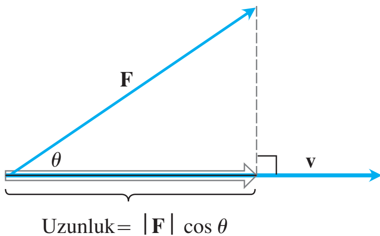
51. $ABCD$ uzayda genel, düzlemsel olması gerekmeyen bir dört kenarlı olsun. $ABCD$'nin karşılıklı kenarlarının orta noktalarını birleştiren iki doğrunun birbirlerini kestiğini gösterin. (*İpucu*: Doğru parçalarının orta noktalarının aynı olduğunu gösterin.)

52. Düzlemde, düzgün bir n-kenarlı çokgenin merkezinden çokgenin köşelerine vektörler çiziliyor. Vektörlerin toplamının sıfır olduğunu gösterin. (*İpucu*: Çokgeni, merkezi etrafında döndürdüğünüzde toplam ne olur?)

53. A, B ve C'nin bir üçgenin köşeleri olduğunu ve a, b ve c'nin, sırasıyla bunların karşılarındaki kenarların orta noktaları olduğunu varsayın. $\overrightarrow{Aa} + \overrightarrow{Bb} + \overrightarrow{Cc} = \mathbf{0}$ olduğunu gösterin.

54. Düzlemde birim vektörler Düzlemde bir birim vektörün, $\mathbf{i}$ vektörünü saat yönünün tersine θ açısı kadar çevirmekle elde edilen $\mathbf{u} = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}$ vektörü olarak yazılabileceğini gösterin.

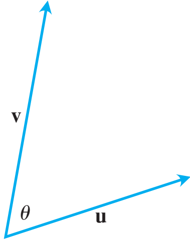
12.3 Nokta Çarpımı (Skaler Çarpım)



ŞEKİL 12.18 **F** kuvvetinin **v** vektörü yönündeki büyüklüğü, **F**'nin **v** vektörü üzerine izdüşümünün $|\mathbf{F}|\cos\theta$ uzunluğudur.

Bir yol boyunca hareket eden bir parçacığa bir **F** kuvveti uygulandığında, çoğunlukla kuvvetin hareket yönündeki büyüklüğünü bilmek ihtiyacını duyarız. **v** vektörü **F**'nin uygulandığı noktada yol'un teğet doğrusuna paralel ise **F**'nin **v** yönündeki büyüklüğünü isteriz. Şekil 12.18 aradığımız skalerin, **F** ile **v** vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere, $|\mathbf{F}|\cos\theta$, uzunluğu olduğunu göstermektedir.

Bu bölümde, iki vektör arasındaki açının, bileşenlerinden doğrudan nasıl kolayca hesaplanabileceğini göstereceğiz. Hesaplamanın anahtar parçası, *nokta çarpımı* denen bir ifadedir. Nokta çarpımlarına ayrıca, çarpımın sonucunun vektör değil skaler olmasından dolayı, *iç* veya *skaler* çarpımlar da denir. Nokta çarpımını inceledikten sonra, bunu bir vektörün başka bir vektör üzerine izdüşümünü (Şekil 12.18'de gösterildiği gibi) bulmak için ve bir yer değiştirme boyunca etki eden sabit bir kuvvetin yaptığı işi bulmak için kullanacağız.



ŞEKİL 12.19 **u** ve **v** vektörleri arasındaki açı.

Vektörler Arasındaki Açı

Sıfırdan faklı iki **u** ve **v** vektörü başlangıç noktaları çakışacak şekilde yerleştirildiğinde, $0 \le \theta \le \pi$ ölçülü bir θ açısı oluştururlar (Şekil 12.19). Vektörler aynı doğru üzerinde değil ise θ açısı her iki vektörü de içeren düzlem içinde ölçülür. Aynı doğru üzerinde iseler ve aynı yönü gösteriyorlarsa aralarındaki açı 0, ters yönü gösteriyorlarsa aralarındaki açı π'dir. θ açısı **u** ile **v** arasındaki açıdır. Teorem 1 bu açıyı belirlemek için bir formül verir.

TEOREM 1 İki Vektör Arasındaki Açı

Sıfırdan farklı $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ ve $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vektörleri arasındaki θ açısı

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}\right)$$

ile verilir.

Teorem 1'i ispat etmeden önce (Kosinüs Teoreminin bir sonucudur) dikkatimizi $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$'nın hesaplanmasındaki θ ifadesine odaklayalım.

TANIM Nokta Çarpımı

$\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ ve $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vektörlerinin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ("**u** nokta **v**") **nokta çarpımı**

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

dir.

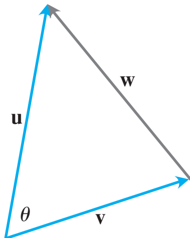
ÖRNEK 1 Nokta Çarpımını Bulmak

(a) $\langle 1, -2, -1 \rangle \cdot \langle -6, 2, -3 \rangle = (1)(-6) + (-2)(2) + (-1)(-3)$
$= -6 - 4 + 3 = -7$

(b) $\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) \cdot (4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2}\right)(4) + (3)(-1) + (1)(2) = 1$ ■

İki boyutlu bir vektör çiftinin nokta çarpımı benzer tarzda tanımlanır:

$$\langle u_1, u_2 \rangle \cdot \langle v_1, v_2 \rangle = u_1v_1 + u_2v_2$$



ŞEKİL 12.20 Vektörlerin toplamı için paralelkenar kuralı $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ verir.

Teorem 1'in ispatı Şekil 12.20'deki üçgene Kosinüs Teoremini (Bölüm 1.6, Denklem (6)) uygulayarak

$$|\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta \qquad \text{Kosinüs Teoremi}$$

$$2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{w}|^2$$

buluruz.

w = **u** – **v** olduğundan **w**'nun bileşen formu $\langle u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3\rangle$ tür. Dolayısıyla,

$$|\mathbf{u}|^2 = \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\right)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

$$|\mathbf{v}|^2 = \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\right)^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

$$|\mathbf{w}|^2 = \left(\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}\right)^2$$

$$= (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2$$

$$= u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2 + u_3^2 - 2u_3v_3 + v_3^2$$

ve

$$|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{w}|^2 = 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$$

bulunur. Bu nedenle,

$$2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{w}|^2 = 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$$

$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

$$\cos\theta = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

Dolayısıyla

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)$$ ■

bulunur.

Nokta çarpımı notasyonu ile **u** ve **v** vektörleri arasındaki açı

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)$$

olarak yazılabilir.

ÖRNEK 2 Uzaydaki İki Vektör Arasındaki Açıyı Bulmak

u = **i** – 2**j** – 2**k** ile **v** = 6**i** + 3**j** + 2**k** arasındaki açıyı bulun.

Çözüm Yukarıdaki formülü kullanırız:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (1)(6) + (-2)(3) + (-2)(2) = 6 - 6 - 4 = -4$$

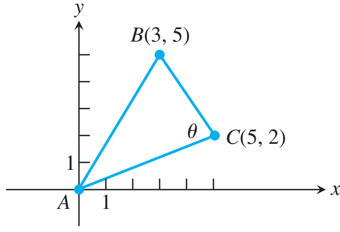
$$|\mathbf{u}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(6)^2 + (3)^2 + (2)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{-4}{(3)(7)}\right) \approx 1.76 \text{ radyan}$$ ■

Açı formülü iki boyutlu vektörlere de uygulanabilir.



ŞEKİL 12.21 Örnek 3'teki üçgen.

ÖRNEK 3 Bir Üçgenin Bir Açısını Bulmak

$A = (0, 0)$, $B = (3, 5)$ ve $C = (5, 2)$ noktaları ile belirlenen ABC üçgenindeki (Şekil 12.21) θ açısını bulun.

Çözüm θ açısı, $\overrightarrow{CA}$ ve $\overrightarrow{CB}$ vektörleri arasındaki açıdır. Bu iki vektörün bileşen formları

$$\overrightarrow{CA} = \langle -5, -2 \rangle \qquad \text{ve} \qquad \overrightarrow{CB} = \langle -2, 3 \rangle$$

tür. Önce bu iki vektörün nokta çarpımını ve büyüklüklerini hesaplarız.

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-5)(-2) + (-2)(3) = 4$$

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

$$|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$

Sonra, açı formülünü uygulayarak

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{4}{(\sqrt{29})(\sqrt{13})}\right)$$

$$\approx 78.1° \qquad \text{veya} \qquad 1.36 \text{ radyan}$$

buluruz. ■

Dik (Ortogonal) Vektörler

Sıfırdan farklı **u** ve **v** vektörleri, aralarındaki açı $\pi/2$ ise dik veya **ortogonal**dirler. Bu tip vektörler için, otomatik olarak $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ olur, çünkü $\cos(\pi/2) = 0$'dır. Tersi de doğrudur. **u** ve **v**, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta = 0$ ile sıfırdan farklı vektörlerse, $\cos\theta = 0$ ve $\theta = \cos^{-1} 0 = \pi/2$ olur.

> **TANIM** **Ortogonal Vektörler**
> **u** ve **v** vektörleri ancak ve yalnız $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ise **ortogonal**dirler (veya diktirler).

ÖRNEK 4 Diklik Tanımını Uygulamak

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (3)(4) + (-2)(6) = 0$ olduğundan $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle$ ve $\mathbf{v} = \langle 4, 6 \rangle$ vektörleri ortogonaldir.

(b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (3)(0) + (-2)(2) + (1)(4) = 0$ olduğundan $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ve $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ vektörleri ortogonaldir.

(c) **0** vektörü her **u** vektörüne ortogonaldir:

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = \langle 0, 0, 0 \rangle \cdot \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

$$= (0)(u_1) + (0)(u_2) + (0)(u_3)$$

$$= 0$$ ■

Nokta Çarpım Özellikleri ve İzdüşüm Vektörleri

Nokta çarpımı, reel sayıların (skalerlerin) sıradan çarpma kuralları için sağlanan bir çok kurala uyar.

> **Nokta Çarpımının Özellikleri**
>
> **u**, **v** ve **w** herhangi vektörler ve c bir skaler ise
>
> **1.** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$
>
> **2.** $(c\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$
>
> **3.** $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$
>
> **4.** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$
>
> **5.** $\mathbf{0}\cdot\mathbf{u} = 0.$

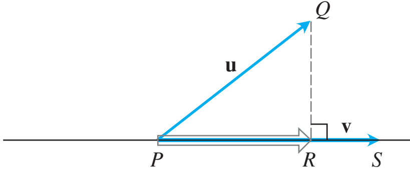
TARİHSEL BİYOGRAFİ

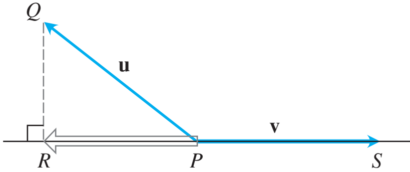
Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

1 ve 3 Özelliklerinin İspatları Tanımı kullanarak özellikleri ispatlamak kolaydır. Örneğin, 1 ve 3 Özelliklerinin ispatları aşağıdadır.

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$

3.
$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \langle u_1, u_2, u_3\rangle\cdot\langle v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3\rangle \\ &= u_1(v_1+w_1) + u_2(v_2+w_2) + u_3(v_3+w_3) \\ &= u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2 + u_3v_3 + u_3w_3 \\ &= (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) + (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3) \\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\end{aligned}$$
■





ŞEKİL 12.22 **u**'nun **v** üzerine iz düşüm vektörü.

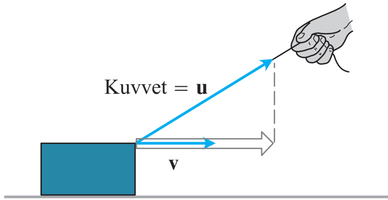
Şimdi, bu bölümün başında sözü edilen, bir vektörün bir diğeri üzerine iz düşürülmesi problemine dönüyoruz. $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$'nun sıfırdan farklı $\mathbf{v} = \overrightarrow{PS}$ vektörü üzerine **iz düşüm vektörü** (Şekil 12.22), Q'dan PS doğrusuna çizilen dik doğru ile belirlenen $\overrightarrow{PR}$ vektörüdür. Bu vektör için notasyon

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u} \quad (\text{“}\mathbf{u}\text{'nun } \mathbf{v} \text{ üzerine iz düşüm vektörü”})$$

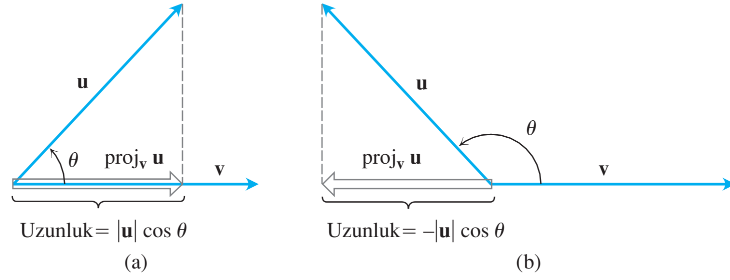
u vektörü bir kuvveti temsil ediyorsa $\text{proj}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$ vektörü **v** yönündeki etkili kuvveti temsil eder (Şekil 12.23).

u ve **v** arasındaki θ açısı dar açı ise $\text{proj}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$'nun uzunluğu $|\mathbf{u}|\cos\theta$ ve yönü $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ dir (Şekil 12.24). θ açısı geniş açı ise, $\cos\theta < 0$ ve $\text{proj}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$'nun uzunluğu $-|\mathbf{u}|\cos\theta$ yönü $-\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ dır. Her iki durumda

$$\begin{aligned}\text{proj}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u} &= (|\mathbf{u}|\cos\theta)\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \\ &= \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \qquad |\mathbf{u}|\cos\theta = \frac{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \\ &= \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}.\end{aligned}$$



ŞEKİL 12.23 Kutuyu **u** kuvveti ile çekersek, kutuyu **v** yönünde hareket ettiren etkili kuvvet **u**'nun **v** üzerine izdüşüm vektörüdür.



ŞEKİL 12.24 $\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$'nun uzunluğu (a) $\cos\theta \geq 0$ ise $|\mathbf{u}|\cos\theta$ ve (b) $\cos\theta < 0$ ise $-|\mathbf{u}|\cos\theta$ dır.

$|\mathbf{u}|\cos\theta$ sayısına **u**'nun **v yönündeki skaler bileşeni** denir. Özet olarak,

u'nun **v** üzerine izdüşüm vektörü:

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v} \qquad (1)$$

u'nun **v** yönündeki skaler bileşeni:

$$|\mathbf{u}|\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \mathbf{u}\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \qquad (2)$$

u'nun **v** üzerine iz düşüm vektörünün ve **u**'nun **v** yönündeki skaler bileşeninin ikisinin de sadece **v**'nin yönüne bağlı olduğuna uzunluğuna bağlı olmadığına dikkat edin (çünkü **u**'yu **v**'nin yönü olan $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ ile çarpıyoruz).

ÖRNEK 5 İz Düşüm Vektörü Bulmak

$\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$'nin $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ üzerine izdüşüm vektörünü ve **u**'nun **v** yönündeki skaler bileşenini bulun.

Çözüm $\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$'yu (1) denkleminden buluruz

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v} = \frac{6-6-4}{1+4+4}(\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k})$$

$$= -\frac{4}{9}(\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}) = -\frac{4}{9}\mathbf{i} + \frac{8}{9}\mathbf{j} + \frac{8}{9}\mathbf{k}$$

u'nun **v** yönündeki skaler bileşenini (2) denkleminden buluruz:

$$|\mathbf{u}|\cos\theta = \mathbf{u}\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = (6\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k})\cdot\left(\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$$

$$= 2 - 2 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$$

■

(1) ve (2) denklemleri iki boyutlu vektörlere de uygulanır.

ÖRNEK 6 İz Düşüm Vektörü ve Skaler Bileşeni Bulmak

Bir $\mathbf{F} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ kuvvetinin $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ üzerine iz düşüm vektörünü ve **F**'nin **v** yönündeki skaler bileşenini bulun.

Çözüm İz düşüm vektörü

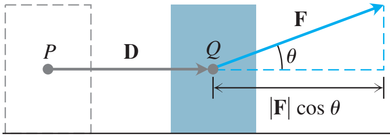
$$\begin{aligned}\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{F} &= \left(\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v} \\ &= \frac{5-6}{1+9}(\mathbf{i}-3\mathbf{j}) = -\frac{1}{10}(\mathbf{i}-3\mathbf{j}) \\ &= -\frac{1}{10}\mathbf{i} + \frac{3}{10}\mathbf{j}.\end{aligned}$$

dir. F'nin v yönündeki skaler bileşeni

$$|\mathbf{F}|\cos\theta = \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{5-6}{\sqrt{1+9}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

dir. ■

İş



ŞEKİL 12.25 Bir **D** yerdeğiştirmesi sırasında sabit bir **F** kuvvetinin yaptığı iş $(|\mathbf{F}|\cos\theta)\,|\mathbf{D}|$'dir.

Bölüm 6'da, büyüklüğü F olan sabit bir kuvvetin bir cismi bir d mesafesi boyunca hareket ettirirken yaptığı işi $W = Fd$ olarak hesapladık. Bu formül sadece kuvvet hareket doğrultusunda yönlenmişse geçerlidir. Bir cismi bir $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ yer değiştirmesi boyunca hareket ettiren bir **F** kuvvetinin başka bir yönü varsa, iş **F**'nin **D** yönündeki bileşeni tarafından yapılır. θ, **F** ile **D** arasındaki açıysa (Şekil 12.25),

$$\begin{aligned}\text{İş} &= \begin{pmatrix}\mathbf{F}\text{'nin } \mathbf{D} \text{ yönündeki} \\ \text{skaler bileşeni}\end{pmatrix}(\mathbf{D}\text{'nin uzunluğu}) \\ &= (|\mathbf{F}|\cos\theta)\,|\mathbf{D}| \\ &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{D}\end{aligned}$$

olur.

> **TANIM** **Sabit Kuvvetin Yaptığı İş**
>
> Bir $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ yer değiştirmesi boyunca etkiyen sabit bir **F** kuvvetinin yaptığı **iş**, θ **F** ile **D** arasındaki açı olmak üzere
>
> $$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D} = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{D}|\cos\theta,$$
>
> olarak bulunur.

ÖRNEK 7 İş Tanımını Uygulamak

$|\mathbf{F}| = 40$ N (newton), $|\boldsymbol{D}| = 3$ m ve $\theta = 60°$ ise, P'den Q'ya kadar etkiyen **F**'nin yaptığı iş

$$\begin{aligned}\text{İş} &= |\mathbf{F}|\,|\mathbf{D}|\cos\theta && \text{Tanım} \\ &= (40)(3)\cos 60° && \text{Verilen değerler} \\ &= (120)(1/2) \\ &= 60 \text{ J (Jul)}\end{aligned}$$

olarak bulunur. ■

Bölüm 16'da, değişken bir kuvvetin uzaydaki bir yol boyunca yaptığı işi bulmayı öğrenirken daha zor bir problemle karşılaşıyoruz.

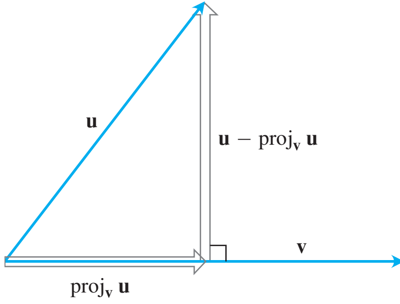
Bir Vektörü Ortogonal Vektörlerin Bir Toplamı Olarak Yazmak

Bir $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ veya $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ vektörünü iki ortogonal vektörün bir toplamı olarak yazmak için bir yol biliyoruz.:

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} \qquad \text{veya} \qquad \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + (u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k})$$

($\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$ olduğundan).

Halbuki, bazen **u**'yu farklı bir toplam olarak yazmak daha bilgilendiricidir. Örneğin, mekanikte, çoğunlukla bir **u** vektörünü verilen bir **v** vektörüne paralel ve **v** vektörüne dik iki vektörün toplamı olarak yazma gereksinimi duyarız. Bir örnek olarak, düzlemde (veya uzayda) bir yol üzerinde hareket eden bir parçacığın hareketinin incelenmesinde, ivme vektörünün yolun (bir noktada) teğeti yönündeki ve yolun normali yönündeki bileşenlerinin bilinmesi arzu edilen bir şeydir (İvmenin bu *teğetsel* ve *normal* bileşenleri Bölüm 13.4'te incelenmektedir). Bu durumda ivme vektörü teğetsel ve normal (vektör) bileşenleri cinsinden ifade edilebilir (bu ifade yolun özellikleri hakkında, burulma gibi, önemli geometrik özelliklerini *yansıtır*). Hız ve ivme vektörleri sonraki bölümde incelenmektedir.



ŞEKİL 12.26 **u** vektörünü **v** vektörüne paralel ve dik vektörlerin toplamı olarak yazmak.

Genel olarak, **u** ve **v** vektörleri için

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$$

vektörünün (**v** ile aynı yönde olan) $\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ iz düşüm vektörüne ortogonal olduğu Şekil 12.26'dan kolayca görülebilir. Aşağıdaki hesaplama bu gözlemi doğrulamaktadır:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}) \cdot \text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} &= \left(\mathbf{u} - \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v} && \text{Denklem (1)} \\
&= \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) - \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)^2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) && \text{Skaler çarpım özellikleri 2 ve 3} \\
&= \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2}{|\mathbf{v}|^2} - \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2}{|\mathbf{v}|^2} && \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2 \text{ kısalır} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$\mathbf{u} = \text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} + (\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u})$$

denklemi **u** vektörünü ortogonal vektörlerin bir toplamı olarak ifade eder.

u'yu v'ye Paralel Bir Vektör Artı v'ye Ortogonal Bir Vektör Olarak Yazmak

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} + (\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}) \\
&= \underbrace{\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}}_{\mathbf{v}\text{'ye paralel}} + \underbrace{\left(\mathbf{u} - \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}\right)}_{\mathbf{v}\text{'ye ortogonal}}
\end{aligned}$$

ÖRNEK 8 Bir Uzay Aracına Etkiyen Kuvvet

Hız vektörü $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ olan bir uzay aracına bir $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ kuvveti etkimektedir. **F**'yi **v**'ye paralel bir vektör ve **v**'ye ortogonal bir vektörün toplamı olarak yazın.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{F} + (\mathbf{F} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{F}) \\
&= \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v} + \left(\mathbf{F} - \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}\right) \\
&= \left(\frac{6-1}{9+1}\right)\mathbf{v} + \left(\mathbf{F} - \left(\frac{6-1}{9+1}\right)\mathbf{v}\right) \\
&= \frac{5}{10}(3\mathbf{i} - \mathbf{j}) + \left(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k} - \frac{5}{10}(3\mathbf{i} - \mathbf{j})\right) \\
&= \left(\frac{3}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) + \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\right).
\end{aligned}$$

$(3/2)\mathbf{i} - (1/2)\mathbf{j}$ kuvveti, **v** hızına paralel olan etkin kuvvettir. $(1/2)\mathbf{i} + (3/2)\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ kuvveti **v**'ye ortogonaldir. Bu vektörün **v**'ye ortogonal olduğunu kontrol etmek için skaler çarpımı buluruz:

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\right)\cdot(3\mathbf{i} - \mathbf{j}) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0.$$ ■

ALIŞTIRMALAR 12.3

Skaler Çarpım ve İz Düşümler

1–8 alıştırmalarında, aşağıda istenenleri bulun.

a. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$, $|\mathbf{v}|$, $|\mathbf{u}|$

b. **v** ile **u** arasındaki açının kosinüsü,

c. **u**'nun **v** yönündeki skaler bileşeni

d. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ vektörü.

1. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \sqrt{5}\mathbf{k}, \quad \mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \sqrt{5}\mathbf{k}$

2. $\mathbf{v} = (3/5)\mathbf{i} + (4/5)\mathbf{k}, \quad \mathbf{u} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$

3. $\mathbf{v} = 10\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{u} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

4. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 11\mathbf{k}, \quad \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

5. $\mathbf{v} = 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

6. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{u} = \sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

7. $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \sqrt{17}\mathbf{j}$

8. $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle, \quad \mathbf{u} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$

T Vektörler Arasındaki Açılar

9–12 alıştırmalarındaki vektörlerin arasındaki açıları bir radyanın yüzde biri hassaslıkla bulun.

9. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

10. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$

11. $\mathbf{u} = \sqrt{3}\mathbf{i} - 7\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

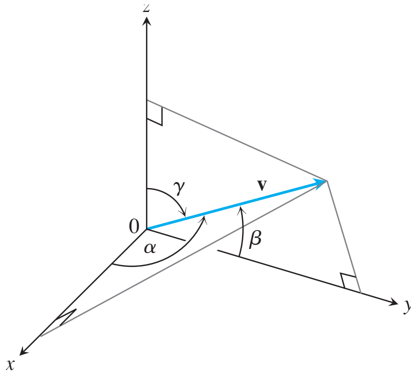
12. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

13. Üçgen Köşeleri $A = (-1, 0)$, $B = (2, 1)$ ve $C = (1, -2)$ olan üçgenin iç açılarının ölçülerini bulun.

14. Dikdörtgen Köşeleri $A = (1, 0)$, $B = (0, 3)$, $C = (3, 4)$ ve $D = (4, 1)$ olan dikdörtgenin köşegenleri arasındaki açılarının ölçülerini bulun.

15. Doğrultu açıları ve doğrultu kosinüsleri Bir $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ vektörünün *doğrultu açıları* α, β ve γ aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

α, **v** ile pozitif x-ekseni arasındaki açıdır $(0 \le \alpha \le \pi)$,
β, **v** ile pozitif y-ekseni arasındaki açıdır $(0 \le \beta \le \pi)$,
γ, **v** ile pozitif z-ekseni arasındaki açıdır $(0 \le \gamma \le \pi)$,



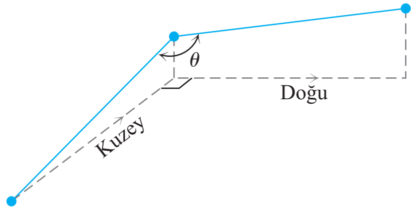
a.

$$\cos\alpha = \frac{a}{|\mathbf{v}|}, \qquad \cos\beta = \frac{b}{|\mathbf{v}|}, \qquad \cos\gamma = \frac{c}{|\mathbf{v}|}$$

ve $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ olduğunu gösterin. Bu kosinüslere **v**'nin **doğrultu kosinüsleri** denir.

b. Birim vektörler doğrultu kosinüslerinden oluşurlar $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ bir birim vektörse a, b ve c'nin **v**'nin doğrultu kosinüsleri olduğunu gösterin.

16. Su borusu inşaası Bir su borusu kuzey yönünde %20' lik, doğu yönünde de %10'luk bir eğimle kurulacaktır. Su borusunun kuzeyden doğuya dönmesi için gerekli θ açısını bulun.



Vektörleri Ayrıştırmak

17–19 alıştırmalarında, **u**'yu **v**'ye paralel bir vektör ve **v**'ye ortogonal bir vektörün toplamı olarak yazın.

17. $\mathbf{u} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

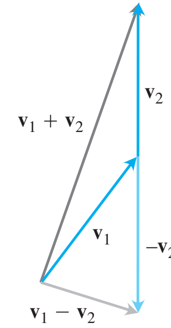
18. $\mathbf{u} = \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

19. $\mathbf{u} = 8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 12\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

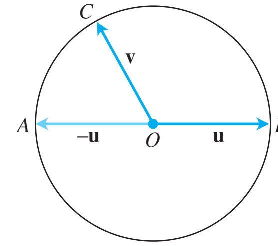
20. Vektör toplamı $\mathbf{u} = \mathbf{i} + (\mathbf{j} + \mathbf{k})$ vektörü zaten **i**'ye paralel bir vektörle **i**'ye ortogonal bir vektörün toplamıdır. $\mathbf{u} = \text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} + (\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u})$ ayrışımında $\mathbf{v} = \mathbf{i}$ kullanırsanız $\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \mathbf{i}$ ve $(\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ bulurmusunuz? Deneyin ve bulun.

Geometri ve Örnekler

21. Toplam ve farklar Şekilde, sanki $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ ile $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ ortogonal gibi görünmektedir? Bu sadece bir tesadüf müdür, yoksa iki vektörün toplamının farklarına ortogonal olmalarını bekleyebileceğimiz durumlar mı vardır? Yanıtınızı açıklayın.



22. Bir çember üzerinde ortogonallik AB'nin, merkezi O'da olan bir çemberin çapı ve C'nin de A ve B'yi birleştiren iki yaydan birinin üzerindeki bir nokta olduğunu varsayın. $\overrightarrow{CA}$ ve $\overrightarrow{CB}$'nin ortogonal olduğunu gösterin.

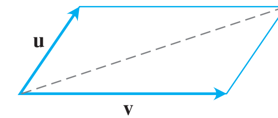


23. Bir eşkenar dörtgenin köşegenleri Bir eşkenar dörtgenin (kenarları eşit uzunluklu paralelkenar) köşegenlerinin dik olduklarını gösterin.

24. Dik köşegenler Sadece karelerin dik köşegenli dikdörtgenler olduklarını gösterin.

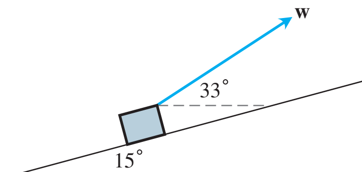
25. Paralelkenarlar ne zaman dikdörtgendirler Bir paralelkenarın ancak ve yalnız köşegenlerinin uzunlukları eşit ise bir dikdörtgen olduğunu ispatlayın (Bu gerçeği marangozlar sıkça kullanır).

26. Paralelkenarın köşegeni **u** ve **v** vektörleriyle belirlenen paralelkenarın belirtilen köşegeninin $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$ ise **u** ile **v** arasındaki açıyı ikiye böleceğini gösterin.



27. Mermi hareketi Çıkış hızı 1200 ft/s olan bir silah yataydan 8° yukarıya ateşleniyor. Hız'ın yatay ve düşey bileşenlerini bulun.

28. Eğik düzlem Bir kutunun, şekilde gösterildiği gibi, eğik bir düzlemde yukarıya çekildiğini varsayın. Eğik düzleme paralel bileşeninin 2,5 lb olması için gereken **w** kuvvetini bulun.

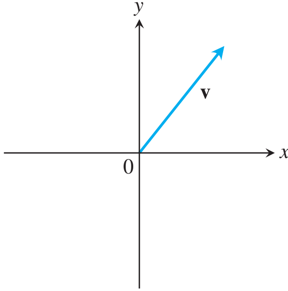


Teori ve Örnekler

29. **a.** **Cauchy-Schwartz eşitsizliği** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$ eşitliğini kullanarak herhangi **u** ve **v** vektörleri için $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$ eşitsizliğinin sağlandığını gösterin.

b. Hangi koşullar altında, varsa, $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|\ |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ dir? cevabınızı açıklayın.

30. Aşağıda gösterilen eksenleri ve vektörü kopyalayın. $(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot \mathbf{v} \leq 0$ olmasını sağlayan (x, y) noktalarını renklendirin. Yanıtınızı savunun.



31. **Ortogonal birim vektörler** $\mathbf{u}_1$ ve $\mathbf{u}_2$ ortogonal birim vektörlerse ve $\mathbf{v} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$ ise $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1$'i bulun.

32. **Nokta çarpımlarda sadeleştirme** Reel sayı çarpımında, $uv_1 = uv_2$ ve $u \neq 0$ ise, u'ları sadeleştirir ve $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ olduğu sonucuna varırız. Aynı kural vektör çarpımı için de geçerli midir: Şayet $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ise $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ olduğu sonucuna varabilir miyiz? Yanıtınızı açıklayın.

Düzlemdeki Doğruların Denklemleri

33. **Bir vektöre dik doğru** $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ vektörünün $ax + by = c$ doğrusuna dik olduğunu, **v**'nin eğiminin, verilen doğrunun eğiminin çarpmaya göre tersinin negatifi olduğunu ispatlayarak gösterin.

34. **Bir vektöre paralel doğru** $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ vektörünün $bx - ay = c$ doğrusuna paralel olduğunu, **v**'yi temsil eden doğru parçasının eğiminin verilen doğrunun eğimiyle aynı olduğunu ispatlayarak gösterin.

35–38 alıştırmalarında, Alıştırma 33'ün sonucunu kullanarak P'den geçen ve **v**'ye dik olan doğrunun denklemini bulun. Sonra doğruyu çizin. Çiziminize **v**'yi *orijinden başlayan bir vektör* olarak ekleyin.

35. $P(2, 1), \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

36. $P(-1, 2), \quad \mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

37. $P(-2, -7), \quad \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

38. $P(11, 10), \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

39–42 Alıştırmalarında, Alıştırma 34'ün sonucunu kullanarak P'den geçen ve **v**'ye paralel olan doğrunun denklemini bulun. Sonra doğruyu çizin. Çiziminize **v**'yi *orijinden başlayan bir vektör* olarak ekleyin.

39. $P(-2, 1), \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

40. $P(0, -2), \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

41. $P(1, 2), \quad \mathbf{v} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

42. $P(1, 3), \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

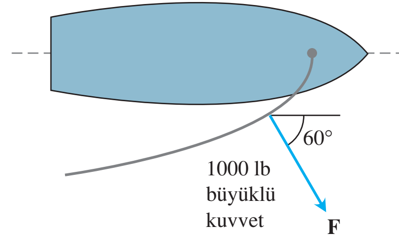
İş

43. **Bir doğru boyunca iş** Bir cismi orijinden (1, 1) noktasına giden doğru üzerinde hareket ettiren bir $\mathbf{F} = 5\mathbf{i}$ (büyüklüğü 5 N) kuvvetinin yaptığı işi bulun (mesafe birimi metre).

44. **Lokomotif** Union Pacific'in *Big Boy* lokomotifi 602.148 N'luk (135.375 lb) çekici bir kuvvetle (çekme) 6000 tonluk trenleri çekebilmektedir. Bu kuvvet seviyesinde, *Big Boy* San Fransisco'dan Los Angeles'a yaptığı (yaklaşık olarak düz) 605 km'lik seyahatte yaklaşık ne kadar iş yapmıştır?

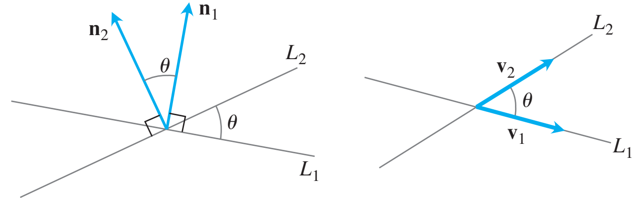
45. **Eğik düzlem** Bir yükleme limanı boyunca bir sandığı yatayla 30° açı yapan 200 N'luk bir kuvvetle çekerek 20 m kaydırmak için ne kadar iş yapılmıştır?

46. **Yelkenli** Bir teknenin yelkeninden geçen rüzgar aşağıda gösterildiği gibi 1000 lb'lik bir **F** kuvveti uygulamıştır. Rüzgar tekneyi 1 mil ilerletmek için ne kadar iş yapmıştır? Yanıtınızı ayak-pound olarak verin.



Düzlemdeki Doğrular Arasındaki Açılar

Birbirini dik açılarla kesmeyen kesişen doğruların arasındaki dar açı doğrulara normal veya paralel olan vektörlerin belirlediği açılarla aynıdır.



Bunu ve Alıştırma 33 veya 34'ün sonuçlarını kullanarak, 47–52 alıştırmalarındaki doğruların arasındaki açıları bulun.

47. $3x + y = 5, \quad 2x - y = 4$

48. $y = \sqrt{3}x - 1, \quad y = -\sqrt{3}x + 2$

49. $\sqrt{3}x - y = -2, \quad x - \sqrt{3}y = 1$

50. $x + \sqrt{3}y = 1, \quad \left(1 - \sqrt{3}\right)x + \left(1 + \sqrt{3}\right)y = 8$

51. $3x - 4y = 3, \quad x - y = 7$

52. $12x + 5y = 1, \quad 2x - 2y = 3$

Türetilebilir Eğriler Arasındaki Açılar

Bir kesişim noktasında türetilebilen eğriler arasındaki açılar eğrileri-

nin bu noktalardaki teğetlerinin arasındaki açılardır. 53-56 alıştırmalarındaki eğrilerin arasındaki açıları bulun. $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ düzlemde bir vektör ise bu vektörün eğiminin, $a \neq 0$ olması koşulu ile b/a olduğuna dikkat edin.

53. $y = (3/2) - x^2, \quad y = x^2$ (iki kesişim noktası)

54. $x = (3/4) - y^2, \quad x = y^2 - (3/4),$ (iki kesişim noktası)

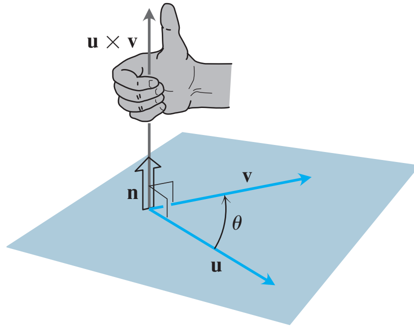
55. $y = x^3, \quad x = y^2,$ (iki kesişim noktası)

56. $y = -x^2, \quad y = \sqrt{x}$ (iki kesişim noktası)

12.4 Vektörel Çarpım

Düzlemdeki doğruları incelerken, bir doğrunun nasıl eğildiğini tanımlamak zorunda kalmıştık ve bunu eğim ve eğim açısı kavramlarıyla gerçekleştirmiştik. Uzayda, bir *düzlem*'in nasıl eğildiğini tanımlayabilmemiz gerekir. Bunu düzlemdeki iki vektörü çarpıp düzleme dik üçüncü bir vektör elde ederek yaparız. Bu üçüncü vektörün yönü bize düzlemin "eğilimini" söyler. Vektörleri çarpmak için kullandığımız yöntem, analizde çalıştığımız iki vektör çarpımından ikincisi olan *vektörel çarpımı*dır.

Vektörel çarpımlar elektrik, manyetizma, akışkan akışları ve yörünge mekaniğinde kuvvetlerin etkilerini tanımlamakta yaygın olarak kullanılırlar. Bu bölüm vektörel çarpımının bu alanlarda kullanımını sağlayan matematiksel özellikleri sunmaktadır.



ŞEKİL 12.27 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$'nin oluşturulması.

Uzaydaki İki Vektörün Vektörel Çarpımı

Uzayda, sıfırdan farklı iki **u** ve **v** vektörüyle işe başlarız. **u** ve **v** paralel değillerse, bir düzlem belirlerler. **Sağ-el kuralıyla** düzleme dik bir **n** birim vektörü seçeriz. Bu, **n**'yi parmaklarınız **u**'dan **v**'ye giden θ açısı yönünde kıvrılırken başparmağınızın gösterdiği yöndeki birim (normal) vektör olarak seçtiğimiz anlamına gelir (Şekil 12.27). Artık $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ **vektörel çarpımını** ("**u** çarpı **v**") aşağıda verilen vektör olarak tanımlarız.

TANIM **Vektörel Çarpım**

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin\theta)\, \mathbf{n}$$

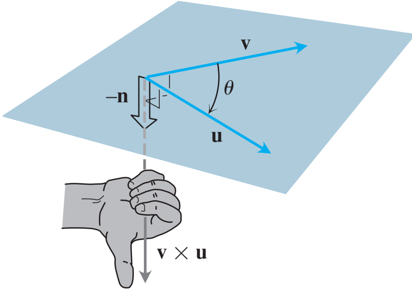
Skaler çarpımın aksine, vektörel çarpım bir vektördür. Bu nedenle aynı zamanda **u** ve **v**'nin vektör çarpımı da denir ve *sadece* uzaydaki vektörler uygulanır. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektörü hem **u**'ya hem de **v**'ye diktir, çünkü **n**'nin bir skaler katıdır.

Hem 0'ın ve hem de π'nin sinüsleri sıfır olduğundan, sıfırdan farklı iki paralel vektörün vektörel çarpımını **0** olarak tanımlamak mantıklıdır. **u** ve **v**'nin biri veya ikisi de sıfırsa, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$'yi yine sıfır olarak tanımlarız. Böylece, **u** ve **v** gibi iki vektörün vektörel çarpımı ancak ve yalnız **u** ve **v** paralelse, veya biri ya da ikisi birden sıfırsa, sıfır olur.

Paralel Vektörler

Sıfırdan farklı **u** ve **v** vektörleri ancak ve yalnız $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$ ise paraleldir.

Vektörel çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar.



ŞEKİL 12.28 **v** × **u**'nun oluşturulması

Vektörel Çarpım Özellikleri

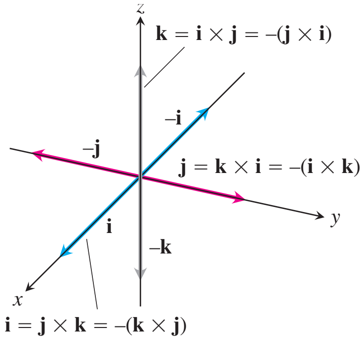
u, **v** ve **w** herhangi vektörler ve *r, s* skalerler ise

1. $(r\mathbf{u}) \times (s\mathbf{v}) = (rs)(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$
3. $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{w} \times \mathbf{u}$
4. $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
5. $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Örneğin, Özellik 4'ü gözünüzde canlandırmak için, parmaklarınız **v**'den **u**'ya giden θ açısı yönünde kıvrılırken başparmağınız ters yönü gösterdiğine ve **v** × **u**'yu oluştururken seçtiğimiz birim vektörün **u** × **v**'yi oluştururken seçtiğimizin negatifi olduğuna dikkat edin (Şekil 12.28).

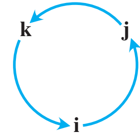
Özellik 1, eşitliğin her iki tarafına vektörel çarpım tanımını uygulamak ve sonuçları karşılaştırmakla gerçeklenebilir. Özellik 2, Ek 6 da ispatlanmıştır. Özellik 3, Özellik 2' deki eşitliğin her iki yanını –1 ile çarpmak ve Özellik 4'ü kullanarak çarpımların sırasını değiştirmekle elde edilir. Özellik 5 bir tanımdır. Bir kural olarak vektörel çarpım *birleşme* özelliğini sağlamaz. Dolayısıyla, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ genel olarak $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$'ye eşit değildir. (Ek Alıştırmalar 15'e bakın.)

Tanımı **i**, **j** ve **k**'nin ikişer ikişer vektörel çarpımlarını bulmak için kullandığımızda (Şekil 12.29)



ŞEKİL 12.29 **i**, **j**, ve **k**'nin ikişer ikişer vektörel çarpımları.

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) = \mathbf{k}$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i}$$
$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) = \mathbf{j}$$



Bu çarpımları hatırlamak için diyagram

ve

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

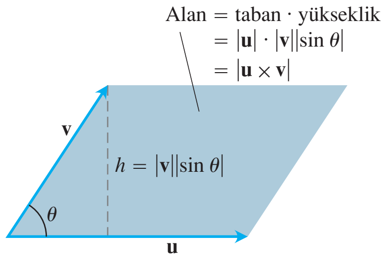
buluruz.

$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ Bir Paralelkenarın Alanıdır

n bir birim vektör olduğundan, **u** × **v**'nin büyüklüğü

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\,|\sin\theta|\,|\mathbf{n}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta$$

olur. Bu, $|\mathbf{u}|$ paralelkenarın tabanı ve $|\mathbf{v}||\sin\theta|$ da yüksekliği olmak üzere **u** ve **v** tarafından belirlenen paralelkenardır (Şekil 12.30).



ŞEKİL 12.30 **u** ve **v**'nin belirlediği paralelkenar.

u × v İçin Determinant Formülü

Bir sonraki amacımız **u** × **v**'yi bir Kartezyen koordinat sistemine göre **u** ile **v**'nin bileşenlerinden hesaplamaktır.

Determinantlar

2×2 ve 3×3 determinantlar aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ÖRNEK

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (1)(-4) = 6 + 4 = 10$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

ÖRNEK

$$\begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-5)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -5(1 - 3) - 3(2 + 4) + 1(6 + 4)$$

$$= 10 - 18 + 10 = 2$$

(Daha fazla bilgi için **www.aw-bc.com/thomas** web sayfasına bakın.)

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \qquad \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}.$$

olduğunu varsayın. Bu durumda dağılma ve **i**, **j** ve **k**'nın çarpım kuralları bize aşağıdakileri söyler:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \times (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) \\
&= u_1v_1\mathbf{i} \times \mathbf{i} + u_1v_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + u_1v_3\mathbf{i} \times \mathbf{k} \\
&\quad + u_2v_1\mathbf{j} \times \mathbf{i} + u_2v_2\mathbf{j} \times \mathbf{j} + u_2v_3\mathbf{j} \times \mathbf{k} \\
&\quad + u_3v_1\mathbf{k} \times \mathbf{i} + u_3v_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + u_3v_3\mathbf{k} \times \mathbf{k} \\
&= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Son satırdaki terimler

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

sembolik determinantının açılımındaki terimlerle aynıdır. Dolayısıyla aşağıdaki kuralı elde ederiz.

Determinantları Kullanarak Vektörel Çarpım Hesaplamak

$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ve $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, ise

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

olur.

ÖRNEK 1 Determinantlarla Vektörel Çarpım Hesaplamak

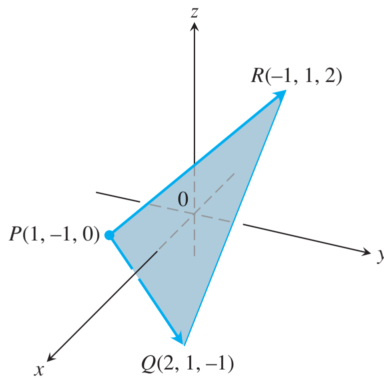
$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ve $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ise $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ve $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$'yu bulun.

Çözüm

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$$ ■



ŞEKİL 12.31 *PQR* üçgeninin alanı $|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|$'nin yarısıdır (Örnek 2).

ÖRNEK 2 Bir Düzleme Dik Vektörler Bulmak

$P(1, -1, 0)$, $Q(2, 1, -1)$ ve $R(-1, 1, 2)$'nin düzlemine dik bir vektör bulun (Şekil 12.31)

Çözüm $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ vektörü düzleme diktir, çünkü iki vektöre de diktir. Bileşenler cinsinden

$$\overrightarrow{PQ} = (2-1)\mathbf{i} + (1+1)\mathbf{j} + (-1-0)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PR} = (-1-1)\mathbf{i} + (1+1)\mathbf{j} + (2-0)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= 6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}$$

olarak bulunur. ■

ÖRNEK 3 Bir Üçgenin Alanını Bulmak

Köşeleri $P(1, -1, 0)$, $Q(2, 1, -1)$ ve $R(-1, 1, 2)$ olan üçgenin alanını bulun (Şekil 12.31).

Çözüm P, Q ve R tarafından belirlenen paralelkenarın alanı

$$|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = |6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}| \qquad \text{Örnek 2'teki değerler}$$

$$= \sqrt{(6)^2 + (6)^2} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2}$$

olarak bulunur. Üçgenin alanı bunun yarısı veya $3\sqrt{2}$'dir. ■

ÖRNEK 4 Bir Düzleme Birim Normal Bulmak

$P(1, -1, 0)$, $Q(2, 1, -1)$ ve $R(-1, 1, 2)$'nin düzlemine dik bir birim vektör bulun.

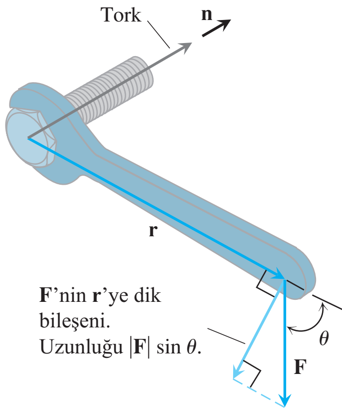
Çözüm $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ düzleme dik olduğundan yönü, **n**, düzleme dik bir birim vektördür. Örnek 2 ve 3'teki değerleri kullanarak

$$\mathbf{n} = \frac{\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|} = \frac{6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

buluruz. ■

Vektörel çarpımı determinantlarla hesaplamada kolaylık için vektörleri genellikle $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ gibi üçlüler olarak yazmak yerine $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ olarak yazarız.

Tork



ŞEKİL 12.32 Tork vektörü **F** kuvvetinin cıvatayı ileri itme eğilimini gösterir.

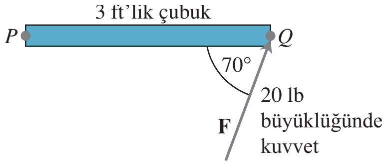
Bir ingiliz anahtarına bir **F** kuvveti uygulayarak bir civatayı döndürürsek (Şekil 12.32), ürettiğimiz tork civatanın ekseni boyunca civatayı ileri itecek şekilde etkir. Torkun büyüklüğü kuvvetin anahtar üzerinde ne kadar ileriye uygulandığına ve uygulama noktasında kuvvetin ne kadarının dik olduğuna bağlıdır. Torkun büyüklüğünü ölçmek için kullandığımız sayı kol uzunluğu **r** ile **F**'nin **r**'ye dik skaler bileşeninin çarpımıdır. Şekil 12.32'nin gösteriminde,

$$\text{Tork vektörünün büyüklüğü} = |\mathbf{r}|\,|\mathbf{F}| \sin\theta$$

veya $|\mathbf{r} \times \mathbf{F}|$ olur. **n**'yi torkun yönünde civatanın ekseni boyunca olan birim vektör olarak alırsak, tork vektörünün tam bir tanımı $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ veya

$$\text{Tork vektörü} = (|\mathbf{r}|\,|\mathbf{F}|\,\sin\theta)\,\mathbf{n}$$

olur. **u** ve **v** paralelken $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$'yi **0** olarak tanımladığımızı hatırlayın. Bu tork yorumuyla da uyuşmaktadır. Şekil 12.32'deki **F** kuvveti anahtara paralelse, yani civatayı anahtarın kolunun doğrusu boyunca iterek veya çekerek çevirmeye çalışıyorsak, üretilen tork sıfırdır.



ŞEKİL 12.33 P de **F** tarafından uygulanan torkun büyüklüğü 56.4 ft-lb civarındadır (Örnek 5).

ÖRNEK 5 Bir Torkun Büyüklüğünü Bulmak

Şekil 12.33'teki mil noktası P çevresinde uygulanan **F** kuvvetinin yarattığı tork

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F}| &= |\overrightarrow{PQ}|\,|\mathbf{F}|\,\sin 70° \\ &\approx (3)(20)(0.94) \\ &\approx 56.4 \text{ ft-lb}\end{aligned}$$

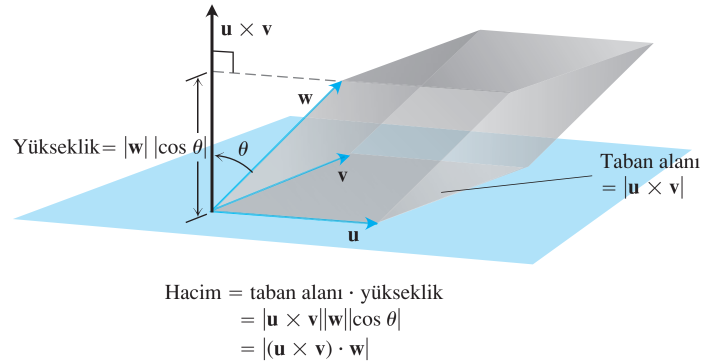
olarak bulunur. ■

Üçlü Skaler veya Kutu Çarpımı

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ çarpımına **u**, **v** ve **w**'nun (bu sırada) **üçlü skaler çarpımı** denir.

$$|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}| = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,|\cos\theta|$$

formülünden de görülebileceği gibi, çarpımın mutlak değeri **u**, **v** ve **w** tarafından belirlenen paralelyüzlünün (yüzleri paralelkenar olan kutu) hacmidir (Şekil 12.34). $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ sayısı tabandaki paralelkenarın alanıdır. $|\mathbf{w}|\,|\cos\theta|$ sayısı ise paralelyüzlünün yüksekliğidir. Bu geometri yüzünden, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$'ya ayrıca **u**, **v** ve **w**'nun **kutu çarpımı** da denir.



ŞEKİL 12.34 $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$ sayısı bir paralelyüzlünün hacmidir.

Bir üçlü skaler çarpımda, değeri değiştirilmeden nokta ve vektörel çarpımların yeri değiştirilebilir.

v ile **w**'nun ve **w** ile **u**'nun düzlemlerini, **u**, **v** ve **w** tarafından belirlenen paralelyüzlünün taban düzlemleri olarak alırsak,

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$$

olduğunu görürüz. Skaler çarpımı komütatif olduğundan, ayrıca

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

elde ederiz.

Üçlü çarpım bir determinant olarak hesaplanabilir:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \left[\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}\right]\cdot\mathbf{w}$$

$$= w_1\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Üçlü Skaler Çarpımın Hesaplanması

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

ÖRNEK 6 Bir Paralelyüzlünün Hacmini Bulmak

$\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ ve $\mathbf{w} = 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ tarafından belirlenen kutunun (paralelyüzlü) hacmini bulun.

Çözüm

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -23$$

Hacim $|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}| = 23$ birim küptür. ■

ALIŞTIRMALAR 12.4

Vektörel Çarpım Hesaplanmaları

1–8 Alıştırmalarında, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ ve $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$'nın uzunluk ve yönünü (tanımlı olduğunda) bulun.

1. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$
2. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$
3. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
4. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
5. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{v} = -3\mathbf{j}$
6. $\mathbf{u} = \mathbf{i}\times\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}\times\mathbf{k}$
7. $\mathbf{u} = -8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
8. $\mathbf{u} = \frac{3}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

9–14 alıştırmalarında, koordinat eksenlerini çizin ve çiziminize orijinden başlayan vektörler olarak $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$'yi de ekleyin.

9. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$
10. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$
11. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$
12. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
13. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
14. $\mathbf{u} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i}$

Uzayda Üçgenler

15–18 alıştırmalarında:

a. *P, Q* ve *R* noktaları tarafından belirlenen üçgenin alanını bulun.

b. *PQR* düzlemine dik bir birim vektör bulun.

15. $P(1, -1, 2)$, $Q(2, 0, -1)$, $R(0, 2, 1)$

16. $P(1, 1, 1)$, $Q(2, 1, 3)$, $R(3, -1, 1)$

17. $P(2, -2, 1)$, $Q(3, -1, 2)$, $R(3, -1, 1)$

18. $P(-2, 2, 0)$, $Q(0, 1, -1)$, $R(-1, 2, -2)$

Üçlü Skaler Çarpımlar

19-22 alıştırmalarında, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$ olduğunu doğrulayın ve **u**, **v** ve **w** tarafından belirlenen paralelyüzlünün (kutunun) hacmini bulun.

	u	**v**	**w**
19.	$2\mathbf{i}$	$2\mathbf{j}$	$2\mathbf{k}$
20.	$\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$	$2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$	$-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
21.	$2\mathbf{i} + \mathbf{j}$	$2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$	$\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$
22.	$\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$	$-\mathbf{i} - \mathbf{k}$	$2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

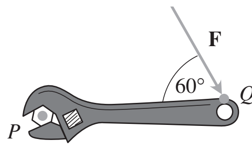
Teori ve Örnekler

23. Paralel ve dik vektörler $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -15\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ olsun. Varsa, hangi vektörler (a) dik, (b) paraleldir? Yanıtlarınızı açıklayın.

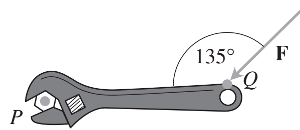
24. Paralel ve dik vektörler $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r} = -(\pi/2)\mathbf{i} - \pi\mathbf{j} + (\pi/2)\mathbf{k}$ olsun. Varsa, hangi vektörler **(a)** dik, **(b)** paraleldir? Yanıtlarınızı açıklayın.

39 ve 40 alıştırmalarında, $|\overrightarrow{PQ}| = 8$ inç ve $|\mathbf{F}| = 30$ lb ise, **F** kuvveti tarafından P'deki cıvataya uygulanan torkun büyüklüğünü bulun. Ayak-pound olarak yanıtlayın.

25.



26.



27. Aşağıdakilerin hangileri *her zaman doğru* ve hangileri *her zaman doğru değildir?* Yanıtlarınızı açıklayın.

a. $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ **b.** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|$

c. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ **d.** $\mathbf{u} \times (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

e. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$

f. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

g. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$

h. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

28. Aşağıdakilerden hangileri *her zaman doğru* ve hangileri *her zaman doğru* değildir? Yanıtlarınızı açıklayın.

a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ **b.** $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

c. $(-\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

d. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ (her c sayısı için)

e. $c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$ (her c sayısı için)

f. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$ **g.** $(\mathbf{u} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0$

h. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

29. Sıfırdan farklı **u**, **v** ve **w** vektörleri verilmişse, aşağıdakileri tanımlamak için, nokta veya vektörel çarpım gösterimini, hangisi uygunsa, kullanın.

a. **u**'nın **v** üzerine izdüşüm vektörü

b. **u** ve **v**'ye ortogonal bir vektör

c. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ve **w**'ya dik bir vektör

d. **u**, **v** ve **w** tarafından tanımlanan paralelyüzlünün hacmi

30. Sıfırdan farklı **u**, **v** ve **w** vektörleri verilmişse, aşağıdakileri tanımlamak için, nokta veya vektörel çarpım gösterimini kullanın.

a. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ve $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$'ya ortogonal bir vektör

b. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ve $\mathbf{u} - \mathbf{v}$'ye ortogonal bir vektör.

c. **v** yönünde $|\mathbf{u}|$ uzunluğunda bir vektör

d. **u** ve **w** tarafından tanımlanan paralelkenarın alanı.

31. **u**, **v** ve **w** vektör olsunlar. Aşağıdakilerden hangileri anlamlı, hangileri anlamsızdır? Yanıtlarınızı açıklayın

a. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ **b.** $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

c. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ **d.** $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

32. Üç vektörün vektörel çarpımı Dejenere durumlar dışında, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ **u** ile **v**'nin düzleminde bulunurken, $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$'nin **v** ile **w**'nin düzleminde bulunduğunu gösterin. Dejenere durumlar nedir?

33. Vektörel çarpımlarda sadeleştirme $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ ve $\mathbf{u} \neq 0$ ise, $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ mudur? Yanıtınızı açıklayın.

34. Çifte sadeleştirme $\mathbf{u} \neq 0$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ ve $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ ise, $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ mudur? Yanıtınızı açıklayın.

Düzlemde Alan

35–38 alıştırmalarında köşeleri verilen paralelkenarların alanlarını bulun.

35. $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$

36. $A(0, 0)$, $B(7, 3)$, $C(9, 8)$, $D(2, 5)$

37. $A(-1, 2)$, $B(2, 0)$, $C(7, 1)$, $D(4, 3)$

38. $A(-6, 0)$, $B(1, -4)$, $C(3, 1)$, $D(-4, 5)$

39–42 alıştırmalarında köşeleri verilen üçgenlerin alanlarını bulun.

39. $A(0, 0)$, $B(-2, 3)$, $C(3, 1)$

40. $A(-1, -1)$, $B(3, 3)$, $C(2, 1)$

41. $A(-5, 3)$, $B(1, -2)$, $C(6, -2)$

42. $A(-6, 0)$, $B(10, -5)$, $C(-2, 4)$

43. Üçgen alanı xy-düzleminde, köşeleri $(0, 0)$, (a_1, a_2) ve (b_1, b_2)'de olan üçgenin alanı için bir formül bulun. Yaptıklarınızı açıklayın.

44. Üçgen alanı Köşeleri (a_1, a_2), (b_1, b_2) ve (c_1, c_2)'de bulunan üçgenin alanı için kısa bir formül bulun.

12.5 Uzayda Doğrular ve Düzlemler

Tek değişkenli fonksiyonların analizinde, düzlemdeki eğrileri incelemek için doğrular hakkındaki bilgilerimizi kullandık. Teğetleri inceledik ve yüksek derecede büyütüldüklerinde diferansiyellenebilir eğrilerin etkin olarak lineer olduklarını gördük.

Bir sonraki bölümde, çok değişkenli fonksiyonların analizini çalışmak için düzlemler ve düzlemler hakkındaki bilgilerimizin, uzayda fonksiyonların grafikleri olan yüzeyleri incelemek üzere, nasıl kullanılacağı ile başlıyoruz.

Bu bölüm, uzaydaki doğrular, doğru parçaları ve düzlemlerin formüllerinin yazılması için skaler ve vektörel çarpımların nasıl kullanılacağını göstermektedir.

Uzayda Doğrular ve Doğru Parçaları

Düzlemde, bir doğru, bir nokta ve doğrunun eğimini veren bir sayı ile belirlenir. Uzayda ise bir doğru, bir nokta ve doğrunun *yönünü* veren bir vektör ile belirlenir.

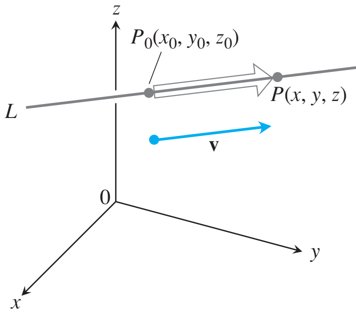
L'nin uzayda bir $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve bir $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ vektörüne paralel olan bir doğru olduğunu varsayın. Bu durumda L, $\overrightarrow{P_0P}$'nin $\mathbf{v}$'ye paralel olmasını sağlayacak bütün $P(x, y, z)$ noktalarının kümesidir (Şekil 12.35). Böylece, bir skaler t parametresi için $\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}$ dir. t'nin değeri P noktasının doğru üzerindeki konumuna bağlıdır ve t'nin tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ dur. $\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}$ denkleminin açılmış hali

$$(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k} = t(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k})$$

dır ve bu eşitlik

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} + x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} + t(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) \tag{1}$$

olarak yeniden yazılabilir.



ŞEKİL 12.35 Bir P noktası ancak ve yalnız, $\overrightarrow{P_0P}$ vektörü $\mathbf{v}$'nin bir skaler katıysa, P_0'dan geçen ve $\mathbf{v}$'ye paralel olan doğrunun üzerindedir.

$\mathbf{r}(t)$ doğru üzerindeki bir $P(x, y, z)$ noktasının konum vektörü ve $\mathbf{r}_0$ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasının konum vektörü ise Denklem (1), uzaydaki bir doğrunun denklemi için aşağıdaki vektör formunu verir:

Bir Doğrunun Vektörel Denklemi

$P_0(x_0, y_0, z_0)$'dan Geçen ve v'ye Paralel Olan L Doğrusunun Vektörel Denklemi

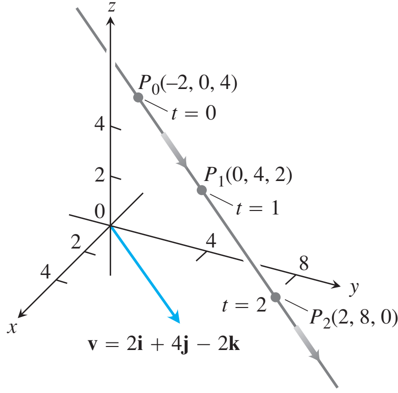
$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \qquad -\infty < t < \infty \tag{2}$$

dir. Burada $\mathbf{r}$ L üzerindeki bir $P(x, y, z)$ noktasının konum vektörü, $\mathbf{r}_0$ da $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasının konum vektörüdür.

Denklem (1)'in iki tarafının karşılıklı bileşenlerini eşitlemek, t parametresini içeren üç skaler denklem verir:

$$x = x_0 + tv_1, \qquad y = y_0 + tv_2, \qquad z = z_0 + tv_3$$

Bu denklemler, $-\infty < t < \infty$ parametre aralığı için doğrunun standart parametrizasyonunu verir.



ŞEKİL 12.36 $x = -2 + 2t$, $y = 4t$, $z = 4 - 2t$ doğrusunun üzerindeki seçilmiş noktalar ve parametre değerleri. Oklar artan t yönünü göstermektedir (Örnek 1).

Bir Doğrunun Parametrik Denklemleri

$P_0(x_0, y_0, z_0)$'dan Geçen ve $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$'ye paralel olan doğrunun standart parametrizasyonu

$$x = x_0 + tv_1, \quad y = y_0 + tv_2, \quad z = z_0 + tv_3, \quad -\infty < t < \infty \qquad (3)$$

dur.

ÖRNEK 1 Bir Noktadan Geçen ve Bir Vektöre Paralel Olan Doğruyu Parametrelemek

$(-2, 0, 4)$'ten geçen ve $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$'ye paralel doğrunun parametrik denklemlerini bulun (Şekil 12.36).

Çözüm $P_0(x_0, y_0, z_0) = (-2, 0, 4)$ ve $v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ olmak üzere, (3) denklemleri

$$x = -2 + 2t, \quad y = 4t, \quad z = 4 - 2t$$

■

ÖRNEK 2 İki Noktadan Geçen Bir Doğruyu Parametrelemek

$P(-3, 2, -3)$ ve $Q(1, -1, 4)$'ten geçen doğrunun parametrik denklemlerini bulun.

Çözüm

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= (1 - (-3))\mathbf{i} + (-1 - 2)\mathbf{j} + (4 - (-3))\mathbf{k} \\ &= 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k} \end{aligned}$$

vektörü doğruya paraleldir ve $(x_0, y_0, z_0) = (-3, 2, -3)$ ile (3) Denklemleri

$$x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 7t$$

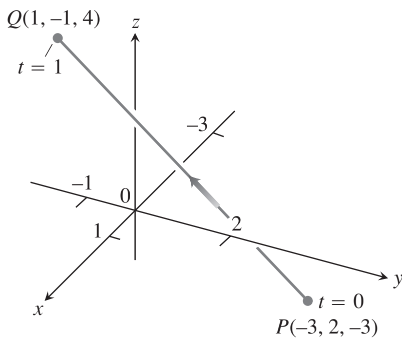
verirler. $Q(1, -1, 4)$'ü "taban noktası" olarak seçip

$$x = 1 + 4t, \quad y = -1 - 3t, \quad z = 4 + 7t$$

yazabilirdik. Bu denklemler de birinciler kadar iyi iş görürler; sadece sizi verilmiş bir t değerinde farklı bir yere götürürler. ■

Parametrizasyonların tek olmadığına dikkat edin. Sadece "taban noktası" değil parametre de değişebilir. $x = -3 + 4t^3$, $y = 2 - 3t^3$ ve $z = -3 + 7t^3$ denklemleri de Örnek 2'deki doğruyu parametreler.

İki noktayı birleştiren bir doğru parçasını parametrize etmek için, önce noktalardan geçen doğruyu parametrize ederiz. Sonra uç noktalar için t-değerlerini bulur ve t'yi bu değerlerle sınırlanmış kapalı aralığa kısıtlarız. Bu ek kısıtlamayla birlikte doğru denklemleri doğru parçasını parametrize ederler.



ŞEKİL 12.37 Örnek 3, PQ doğru parçasının bir parametrizasyonunu türetir. Ok artan t yönünü göstermektedir.

ÖRNEK 3 Bir Doğru Parçasını Parametrelemek

$P(-3, 2, -3)$ ve $Q(1, -1, 4)$ noktalarını birleştiren doğru parçasının parametreleyin (Şekil 12.37)

Çözüm İşe, bu seferlik Örnek 2'den aldığımız, P ve Q'dan geçen doğrunun denklemleriyle başlarız:

$$x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 7t$$

$$(x, y, z) = (-3 + 4t, 2 - 3t, -3 + 7t)$$

noktasının $t = 0$'da $P(-3, 2, -3)$'ten ve $t = 1$'de $Q(1, -1, 4)$'ten geçtiğini gözlemleriz. Doğru parçasını parametrelemek için $0 \le t \le 1$ kısıtlamasını ekleriz:

$$x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 7t, \quad 0 \le t \le 1$$ ■

Uzaydaki bir doğruyu, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ konumundan başlayıp **v** vektörü yönünde hareket eden bir parçacığın yolu olarak düşünürsek, vektör formu (Denklem (2)) daha açıklayıcıdır. Denklem (2)'yi yeniden yazarak

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \\ &= \mathbf{r}_0 + t|\mathbf{v}|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}. \end{aligned} \tag{4}$$

Başlangıç konumu Zaman Hız Yön

Başka bir deyişle, parçacığın t anındaki konumu, başlangıç konumu artı doğru üzerindeki hareketinde $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ yönünde kat ettiği mesafe (sürat × zaman) dir.

ÖRNEK 4 Bir Helikopterin Uçuşu

Bir helikopter orijindeki pistten (1, 1, 1) noktası yönünde 60 ft/s süratle doğrudan uçacaktır. Helikopterin 10 saniye sonraki konumu nedir?

Çözüm Orijini helikopterin başlangıç konumuna (piste) yerleştiririz. Bu durumda

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$$

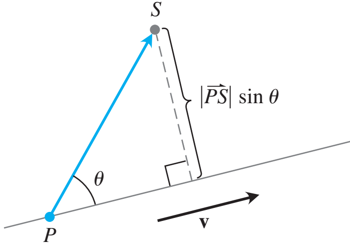
birim vektörü helikopterin uçuş yönünü verir. Denklem (4)'ten helikopterin herhangi bir t anındaki konumu

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + t(\text{sürat})\,\mathbf{u} \\ &= \mathbf{0} + t(60)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right) \\ &= 20\sqrt{3}t(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \end{aligned}$$

olur. $t = 10$ s iken

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(10) &= 200\sqrt{3}\,(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= \left\langle 200\sqrt{3}, 200\sqrt{3}, 200\sqrt{3} \right\rangle \end{aligned}$$

bulunur. Orijinden (1, 1, 1) noktasına doğru uçuştan 10 saniye sonra helikopter uzayda $(200\sqrt{3}, 200\sqrt{3}, 200\sqrt{3})$ noktasındadır. Ki bu $\mathbf{r}(10)$ vektörünün uzunluğudur. (60 ft/s)(10 s) = 600 ft mesafe kat etmiştir. ■



ŞEKİL 12.38 S'den, P'ye geçen ve $\mathbf{v}$'ye paralel olan doğruya uzaklık, θ $\overrightarrow{PS}$ ve $\mathbf{v}$ arasındaki açı olmak üzere $|\overrightarrow{PS}|\sin\theta$'dır.

Uzayda Bir Noktadan Bir Doğruya Olan Uzaklık

Bir S noktasından, bir P noktasından geçen ve bir $\mathbf{v}$ vektörüne paralel olan doğruya uzaklığı bulmak için, $\overrightarrow{PS}$ 'nin doğruya normal olan bir vektör doğrultusundaki skaler bileşeninin mutlak değerini buluruz (Şekil 12.38). Şeklin gösterimiyle, skaler bileşenin mutlak değeri, $\dfrac{|\overrightarrow{PS}\times\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$ olan $|\overrightarrow{PS}|\sin\theta$, dır.

Bir S Noktasından, P'den Geçen ve v'ye Paralel Olan Doğruya Uzaklık

$$d=\frac{|\overrightarrow{PS}\times\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} \qquad (5)$$

ÖRNEK 5 Bir Noktadan Bir Doğruya Olan Uzaklığı Bulmak

$S(1, 1, 5)$ noktasından

$$L: \qquad x=1+t,\quad y=3-t,\quad z=2t$$

doğrusuna olan uzaklığı bulun.

Çözüm L'nin denklemlerinden L'nin $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$'ye paralel olarak $P(1, 3, 0)$'dan geçtiğini görüyoruz.

$$\overrightarrow{PS}=(1-1)\mathbf{i}+(1-3)\mathbf{j}+(5-0)\mathbf{k}=-2\mathbf{j}+5\mathbf{k}$$

ve

$$\overrightarrow{PS}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & -2 & 5\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\mathbf{i}+5\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

ile, (5) denklemi

$$d=\frac{|\overrightarrow{PS}\times\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}=\frac{\sqrt{1+25+4}}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}=\sqrt{5}$$

verir. ■

Uzaydaki Bir Düzlem İçin Bir Denklem

Uzayda bir düzlem, üzerinde bulunan bir noktanın bilinmesi ve "eğikliği" veya yönlendirilmesinin bilinmesi ile belirlenir. "Eğiklik", düzleme dik veya normal olan bir vektör belirlenerek tanımlanır.

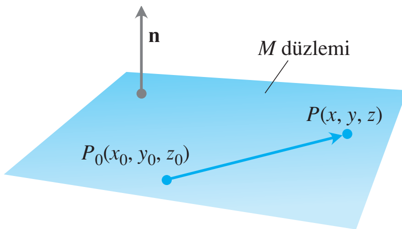
M düzleminin bir $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçtiğini ve sıfırdan farklı $\mathbf{n}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ vektörüne normal olduğunu varsayın. Bu durumda M, $\overrightarrow{P_0P}$ 'nin $\mathbf{n}$'ye ortogonal olmasını sağlayacak bütün $P(x, y, z)$ noktalarının kümesidir (Şekil 12.39). Böylece $\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$ olur. Bu denklem

$$(A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k})\cdot[(x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k}]=0$$

veya

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

denklemlerine denktir.



ŞEKİL 12.39 Uzayda bir düzlem için standart denklem, düzleme normal bir vektör cinsinden tanımlanır: Bir P noktası ancak ve yalnız $\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$ ise $\mathbf{n}$'ye normal olan ve P_0'dan geçen düzlem üzerindedir.

Düzlem Denklemi

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ 'dan geçen ve $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$'ye normal olan düzlemin

Vektörel denklemi: $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0.$

Bileşen denklemi: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Sadeleştirilmiş bileşen denklemi: $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$ olmak üzere

$Ax + By + Cz = D$

ÖRNEK 6 Bir Düzlem İçin Bir Denklem Bulmak

$P_0(-3, 0, 7)$'den geçen ve $\mathbf{n} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$'ye dik olan düzlemin denklemini bulun.

Çözüm Bileşen denklemi

$$5(x - (-3)) + 2(y - 0) + (-1)(z - 7) = 0.$$

dir. Sadeleştirerek

$$5x + 15 + 2y - z + 7 = 0$$
$$5x + 2y - z = -22$$

elde ederiz. ■

Örnek 6'da $\mathbf{n} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$'nin bileşenlerinin $5x + 2y - z = -22$ denkleminde nasıl x, y ve z'nin katsayıları haline geldiğine dikkat edin. $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ vektörü $Ax + By + Cz = D$ düzlemine normaldir.

ÖRNEK 7 Üç Noktadan Geçen Bir Düzlem İçin Bir Denklem

$A(0, 0, 1)$, $B(2, 0, 0)$ ve $C(0, 3, 0)$'dan geçen düzlemi bulun.

Çözüm Düzleme normal bir vektör bulur ve bunu noktalardan biriyle (hangisi olduğu fark etmez) kullanarak düzlem için bir denklem buluruz.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

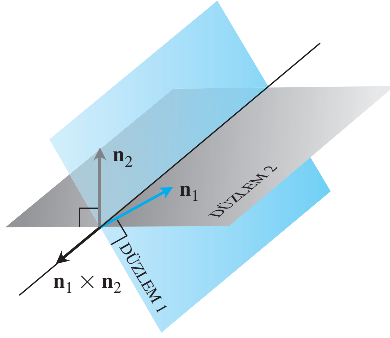
vektörel çarpımı düzleme normaldir. Bu vektörün bileşenlerini ve $A(0, 0, 1)$ noktasının koordinatlarını denklemin bileşen formuna yerleştirerek

$$3(x - 0) + 2(y - 0) + 6(z - 1) = 0$$
$$3x + 2y + 6z = 6$$

elde ederiz. ■

Kesişim Doğruları

Nasıl ki doğrular ancak ve yalnız yönleri aynı ise **paralel**dirler, iki düzlem de ancak ve yalnız normal vektörleri paralel veya bir k skaleri için $\mathbf{n}_1 = k\mathbf{n}_2$ ise paraleldir. Paralel olmayan iki düzlem bir doğru boyunca kesişir.



ŞEKİL 12.40 İki düzlemin arakesit doğrusunun, düzlemlerin normal vektörleri ile nasıl ilişkili olduğu (Örnek 8)

ÖRNEK 8 İki Düzlemin Kesişim Doğrusuna Paralel Bir Vektör Bulmak

$3x - 6y - 2z = 15$ ve $2x + y - 2z = 5$ düzlemlerinin kesişim doğrusuna paralel bir vektör bulun.

Çözüm İki düzlemin kesişim doğrusu düzlemlerin normal vektörleri $\mathbf{n}_1$ ile $\mathbf{n}_2$'ye diktir (Şekil 12.40) ve dolayısıyla $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$'ye paraleldir. Bunu tersine çevirirsek, $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ düzlemlerin kesişim doğrusuna paralel olan bir vektördür. Bizim durumumuzda

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 14\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 15\mathbf{k}.$$

olur. $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$'nin sıfırdan farklı herhangi bir skaler katı da iş görür. ■

ÖRNEK 9 İki Düzlemin Kesişim Doğrusunu Parametrelemek

$3x - 6y - 2z = 15$ ve $2x + y - 2z = 5$ düzlemlerinin kesiştikleri doğrunun parametrik denklemlerini bulun.

Çözüm Doğruya paralel bir vektör ve doğru üzerinde bir nokta bularak (3) denklemlerini kullanırız:

Örnek 8 $\mathbf{v} = 14\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$'yi doğruya paralel bir vektör olarak tanımlar. Doğru üzerinde bir nokta bulmak için, iki düzleme de ait herhangi bir noktayı alabiliriz. Düzlem denklemlerinde $z = 0$ koymak ve x ve y'yi birlikte çözmek bu noktalardan birini $(3, -1, 0)$ olarak belirler. Doğru

$$x = 3 + 14t, \qquad y = -1 + 2t, \qquad z = 15t.$$

olarak bulunur. $z = 0$ seçimi keyfidir ve ayrıca $z = 1$ veya $z = -1$ de seçebilirdik. Veya $x = 0$ alır ve y ve z'yi çözebilirdik. Farklı seçimler basitçe, aynı doğrunun farklı parametrizasyonlarını verecektir. ■

Bazen bir doğru ve bir düzlemin nerede kesiştiklerini bilmek isteriz. Örneğin, düz bir plakaya ve plakadan geçen bir doğruya bakıyorsak, doğrunun ne kadarlık bir kısmının görülmesinin plaka tarafından engellendiğini bilmek bizi ilgilendirebilir. Bu uygulama bilgisayar grafiklerinde kullanılır (Alıştırma 74).

ÖRNEK 10 Bir Doğru ile Bir Düzlemin Kesişimini Bulmak

$$x = \frac{8}{3} + 2t, \qquad y = -2t, \qquad z = 1 + t$$

doğrusunun $3x + 2y + 6z = 6$ düzlemiyle kesiştiği noktayı bulun.

Çözüm

$$\left(\frac{8}{3} + 2t, -2t, 1 + t\right)$$

noktası, koordinatları doğrunun denklemini sağlarsa, yani

$$
\begin{aligned}
3\left(\frac{8}{3}+2t\right)+2(-2t)+6(1+t) &= 6\\
8+6t-4t+6+6t &= 6\\
8t &= -8\\
t &= -1
\end{aligned}
$$

ise, düzlemin üzerindedir. Kesişim noktası

$$(x, y, z)\big|_{t=-1} = \left(\frac{8}{3}-2, 2, 1-1\right) = \left(\frac{2}{3}, 2, 0\right)$$

noktasıdır. ■

Bir Noktadan Bir Düzleme Olan Uzaklık

P noktası normali $\mathbf{n}$ olan bir düzlem üzerinde ise herhangi bir S noktasından düzleme olan uzaklık, $\overrightarrow{PS}$ vektörünün $\mathbf{n}$ üzerine iz düşüm vektörünün uzunluğudur. Yani, S'den düzleme olan uzaklık

$$d = \left|\overrightarrow{PS}\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right| \tag{6}$$

dir. Burada $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ düzlemin normalidir.

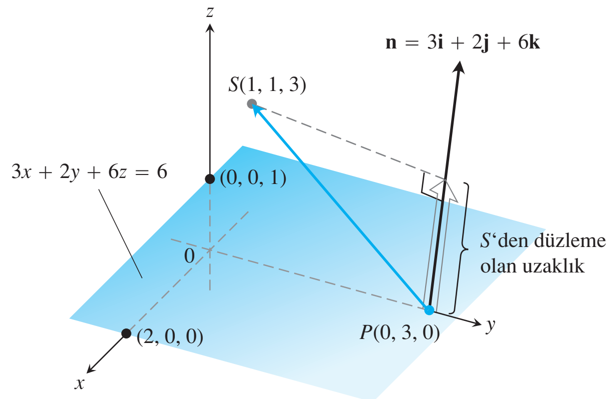
ÖRNEK 11 Bir Noktadan Bir Düzleme Uzaklığı Bulmak

$S(1, 1, 3)$'ten $3x + 2y + 6z = 6$ düzlemine olan uzaklığı bulun.

Çözüm Düzlem üzerinde bir P noktası bulur ve $\overrightarrow{PS}$'nin düzleme normal bir $\mathbf{n}$ vektörü üzerine iz düşüm vektörünün uzunluğunu hesaplarız (Şekil 12.41). $3x + 2y + 6z = 6$ denklemindeki katsayılar

$$\mathbf{n} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

verir.



ŞEKİL 12.41 S'den düzleme olan uzaklık $\overrightarrow{PS}$'nin $\mathbf{n}$ üzerine iz düşüm vektörünün uzunluğudur (Örnek 11).

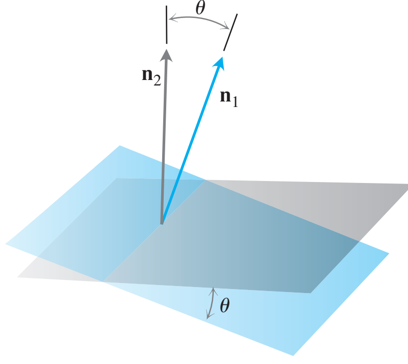
Düzlem üzerinde düzlemin denkleminden bulunması en kolay olan noktalar kesim noktalarıdır. P'yi y-kesim noktası (0, 3, 0) olarak alırsak,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PS} &= (1-0)\mathbf{i} + (1-3)\mathbf{j} + (3-0)\mathbf{k}\\ &= \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k},\\ |\mathbf{n}| &= \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7\end{aligned}$$

olur. S'den düzleme olan uzaklık

$$\begin{aligned}d &= \left|\overrightarrow{PS}\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right| \qquad \text{proj}_{\mathbf{n}}\,\overrightarrow{PS}\text{'nin uzunluğu}\\ &= \left|(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})\cdot\left(\frac{3}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}\right)\right|\\ &= \left|\frac{3}{7} - \frac{4}{7} + \frac{18}{7}\right| = \frac{17}{7}\end{aligned}$$

olarak bulunur. ■



ŞEKİL 12.42 İki düzlem arasındaki açı normalleri arasındaki açıdan elde edilir.

Düzlemler Arasındaki Açılar

Kesişen iki düzlemin arasındaki açı normal vektörleriyle belirlenen (dar) açı olarak tanımlanır (Şekil 12.42).

ÖRNEK 12 $3x - 6y - 2z = 15$ ve $2x + y - 2z = 5$ düzlemleri arasındaki açıyı bulun.

Çözüm

$$\mathbf{n}_1 = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \qquad \mathbf{n}_2 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

vektörleri düzlemlerin normalleridir. Aralarındaki açı

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}\right)\\ &= \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)\\ &\approx 1.38 \text{ rad.} \qquad 79° \text{ civarında}\end{aligned}$$

olarak bulunur. ■

ALIŞTIRMALAR 12.5

Doğrular ve Doğru Parçaları

1–12 alıştırmalarındaki doğruların parametrik denklemlerini bulun.

1. $P(3, -4, -1)$'den geçen $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektörüne paralel olan doğru.
2. $P(1, 2, -1)$ ve $Q(-1, 0, 1)$'den geçen doğru.
3. $P(-2, 0, 3)$ ve $Q(3, 5, -2)$'den geçen doğru.
4. $P(1, 2, 0)$ ve $Q(1, 1, -1)$'den geçen doğru.
5. Orijinden geçen ve $2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektörüne paralel olan doğru.
6. $(3, -2, 1)$ noktasından geçen ve $x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = 3t$ doğrusuna paralel olan doğru.
7. $(1, 1, 1)$'den geçen ve z-eksenine paralel olan doğru.
8. $(2, 4, 5)$'ten geçen ve $3x + 7y - 5z = 21$ düzlemine dik olan doğru.
9. $(0, -7, 0)$'dan geçen ve $x + 2y + 2z = 13$ düzlemine dik olan doğru.

10. (2, 3, 0)'dan geçen ve $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ile $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ vektörlerine dik doğru.

11. x-ekseni

12. z-ekseni

13–20 alıştırmalarındaki noktaları birleştiren doğru parçaları için parametrizasyonlar bulun. Koordinat eksenlerini çizin ve her doğru parçasını, parametrizasyonunuz için artan t yönünü de belirterek çizin.

13. (0, 0, 0), (1, 1, 3/2)

14. (0, 0, 0), (1, 0, 0)

15. (1, 0, 0), (1, 1, 0)

16. (1, 1, 0), (1, 1, 1)

17. (0, 1, 1), (0, −1, 1)

18. (0, 2, 0), (3, 0, 0)

19. (2, 0, 2), (0, 2, 0)

20. (1, 0, −1), (0, 3, 0)

Düzlemler

21–26 alıştırmalarındaki düzlemlerin denklemlerini bulun.

21. $P_0(0, 2, -1)$'den geçen, $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$'ye normal düzlem

22. (1, –1, 3)'ten geçen, $3x + y + z = 7$ düzlemine paralel düzlem

23. (1, 1, –1), (2, 0, 2) ve (0, –2, 1)'den geçen düzlem

24. (2, 4, 5), (1, 5, 7) ve (–1, 6, 8)'den geçen düzlem

25. $P_0(2, 4, 5)$'ten geçen ve

$$x = 5 + t, \quad y = 1 + 3t, \quad z = 4t$$

doğrusuna dik düzlem.

26. $A(1, -2, 1)$'den geçen ve orijinden A'ya giden vektöre dik düzlem.

27. $x = 2t + 1, y = 3t + 2, z = 4t + 3$ ile $x = s + 2, y = 2s + 4, z = -4s - 1$ doğrularının kesişim noktasını ve bu doğruların belirlediği düzlemi bulun.

28. $x = t, y = -t + 2, z = t + 1$ ile $x = 2s + 2, y = s + 3, z = 5s + 6$ doğrularının kesişim noktasını ve bu doğruların belirlediği düzlemi bulun.

29–30 alıştırmalarında kesişen doğruların belirledikleri düzlemi bulun.

29. $L1$: $x = -1 + t, \quad y = 2 + t, \quad z = 1 - t; \quad -\infty < t < \infty$

$L2$: $x = 1 - 4s, \quad y = 1 + 2s, \quad z = 2 - 2s; \quad -\infty < s < \infty$

30. $L1$: $x = t, \quad y = 3 - 3t, \quad z = -2 - t; \quad -\infty < t < \infty$

$L2$: $x = 1 + s, \; y = 4 + s, \; z = -1 + s; \; -\infty < s < \infty$

31. $P_0(2, 1, -1)$'den geçen ve $2x + y - z = 3$ ile $x + 2y + z = 2$ düzlemlerinin kesişim doğrusuna dik bir düzlem bulun.

32. $P_1(1, 2, 3)$, $P_2(3, 2, 1)$ noktalarından geçen ve $4x - y + 2z = 7$ düzlemine dik bir düzlem bulun.

Uzaklıklar

33–38 alıştırmalarında noktadan doğruya olan uzaklığı bulun.

33. (0, 0, 12); $\quad x = 4t, \quad y = -2t, \quad z = 2t$

34. (0, 0, 0); $\quad x = 5 + 3t, \quad y = 5 + 4t, \quad z = -3 - 5t$

35. (2, 1, 3); $\quad x = 2 + 2t, \quad y = 1 + 6t, \quad z = 3$

36. (2, 1, −1); $\quad x = 2t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 2t$

37. (3, −1, 4); $\quad x = 4 - t, \quad y = 3 + 2t, \quad z = -5 + 3t$

38. (−1, 4, 3); $\quad x = 10 + 4t, \quad y = -3, \quad z = 4t$

39–44 alıştırmalarında noktadan düzleme olan uzaklığı bulun.

39. (2, −3, 4), $\quad x + 2y + 2z = 13$

40. (0, 0, 0), $\quad 3x + 2y + 6z = 6$

41. (0, 1, 1), $\quad 4y + 3z = -12$

42. (2, 2, 3), $\quad 2x + y + 2z = 4$

43. (0, −1, 0), $\quad 2x + y + 2z = 4$

44. (1, 0, −1), $\quad -4x + y + z = 4$

45. $x + 2y + 6z = 1$ düzleminden $x + 2y + 6z = 10$ düzlemine olan uzaklığı bulun.

46. $x = 2 + t, y = 1 + t, z = -(1/2) - (1/2)t$ doğrusundan $x + 2y + 6z = 10$ düzlemine olan uzaklığı bulun.

Açılar

47 ve 48 alıştırmalarındaki düzlemlerin arasındaki açıları bulun

47. $x + y = 1, \quad 2x + y - 2z = 2$

48. $5x + y - z = 10, \quad x - 2y + 3z = -1$

T 49–52 alıştırmalarında düzlemlerin arasındaki dar açıları bir radyanın yüzde biri hassaslıkla bulmak için bir hesap makinesi kullanın.

49. $2x + 2y + 2z = 3, \quad 2x - 2y - z = 5$

50. $x + y + z = 1, \quad z = 0 \quad$ (xy-düzlemi)

51. $2x + 2y - z = 3, \quad x + 2y + z = 2$

52. $4y + 3z = -12, \quad 3x + 2y + 6z = 6$

Kesişen Doğrular ve Düzlemler

53–56 alıştırmalarında doğrunun düzlemi kestiği noktayı bulun.

53. $x = 1 - t, \quad y = 3t, \quad z = 1 + t; \quad 2x - y + 3z = 6$

54. $x = 2, \quad y = 3 + 2t, \quad z = -2 - 2t; \quad 6x + 3y - 4z = -12$

55. $x = 1 + 2t, \quad y = 1 + 5t, \quad z = 3t; \quad x + y + z = 2$

56. $x = -1 + 3t, \quad y = -2, \quad z = 5t; \quad 2x - 3z = 7$

57–60 alıştırmalarında düzlemlerin kesişim doğrularının parametrizasyonlarını bulun.

57. $x + y + z = 1, \quad x + y = 2$

58. $3x - 6y - 2z = 3, \quad 2x + y - 2z = 2$

59. $x - 2y + 4z = 2, \quad x + y - 2z = 5$

60. $5x - 2y = 11, \quad 4y - 5z = -17$

Uzayda iki doğru verilmişse, ya paraleldirler, ya kesişirler ya da paralel değildirler (örneğin, gökyüzündeki iki uçağın uçuş rotalarını düşünün). 61 ve 62 alıştırmaları üç doğru vermektedir. Her defa ikisine bakmak kaydıyla, eğrilerin paralel mi, kesişen mi yoksa paralel olmayan mı olduklarını belirleyin. Kesişiyorlarsa, kesişim noktalarını bulun.

61. $L1$: $x = 3 + 2t,\ y = -1 + 4t,\ z = 2 - t;\ -\infty < t < \infty$
$L2$: $x = 1 + 4s,\ y = 1 + 2s,\ z = -3 + 4s;\ -\infty < s < \infty$
$L3$: $x = 3 + 2r,\ y = 2 + r,\ z = -2 + 2r;\ -\infty < r < \infty$

62. $L1$: $x = 1 + 2t,\quad y = -1 - t,\quad z = 3t;\quad -\infty < t < \infty$
$L2$: $x = 2 - s,\quad y = 3s,\quad z = 1 + s;\quad -\infty < s < \infty$
$L3$: $x = 5 + 2r,\quad y = 1 - r,\quad z = 8 + 3r;\ -\infty < r < \infty$

Teori ve Örnekler

63. (3) denklemlerini kullanarak, $P_1(2, -4, 7)$'den geçen ve $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$'ye paralel doğrunun bir parametrizasyonunu bulun. Sonra $P_2(-2, -2, 1)$ noktasını ve $\mathbf{v}^2 = -\mathbf{i} + (1/2)\mathbf{j} - (3/2)\mathbf{k}$ vektörünü kullanarak doğrunun başka bir parametrizasyonunu üretin.

64. Bileşen formunu kullanarak, $P_1(4, 1, 5)$'den geçen ve $\mathbf{n}_1 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$'ye normal düzlemin bir denklemini üretin. Sonra aynı düzlem için $P_2(3, -2, 0)$ noktasını ve $\mathbf{n}_2 = -\sqrt{2}\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{k}$. normal vektörünü kullanarak başka bir denklem üretin.

65. $x = 1+ 2t,\ y = -1 - t,\ z = 3t$ doğrusunun koordinat düzlemlerini kestiği noktaları bulun. Yanıtınızı açıklayın.

66. $z = 3$ düzleminde **i** ile $\pi/6$ radyanlık ve **j** ile $\pi/3$ radyanlık bir açı yapan doğrunun denklemlerini bulun. Yanıtınızın ardındaki mantığı anlatın.

67. $x = 1 - 2t,\ y = 2 + 5t,\ z = -3t$ doğrusu $2x + y - z = 8$ düzlemine paralel midir? Yanıtınızı açıklayın.

68. $A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ ve $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ gibi iki düzlemin ne zaman paralel ve ne zaman dik olduklarını nasıl söyleyebilirsiniz? Yanıtınızı açıklayın.

69. Kesişimleri $x = 1 + t,\ y = 2 - t,\ z = 3 + 2t$ doğrusu olan iki farklı düzlem bulun. Her düzlemin denklemini $Ax + By + Cz = D$ şeklinde yazın.

70. Orijinden geçen ve M: $2x + 3y + z = 12$ düzlemini dik açıyla kesen bir düzlem bulun. Düzleminizin M'ye dik olduğunu nereden biliyorsunuz?

71. Sıfırdan farklı herhangi a, b ve c sayıları için, $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$'in grafiği bir düzlemdir. Hangi düzlemlerin bu şekilde bir denklemi vardır?

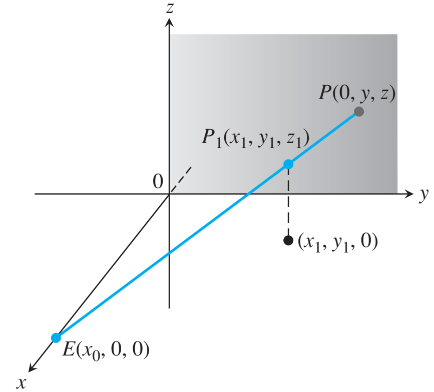
72. L_1 ve L_2'yi ayrık (kesişmeyen), paralel olmayan doğrular olarak varsayın. Sıfırdan farklı bir vektörün hem L_1'e hem L_2'ye dik olması mümkün mü? Yanıtınızı açıklayın.

Bilgisayar Grafikleri

73. Bilgisayar grafiklerinde perspektif Bilgisayar grafikleri ve perspektif çizimlerde, uzayda gözle görülen cisimleri iki boyutlu bir düzlemdeki görüntüler olarak temsil etmemiz gerekir. Gözün, aşağıda gösterildiği gibi, $E(x_0, 0, 0)$'da bulunduğunu ve bir $P_1(x_1, y_1, z_1)$ noktasını yz-düzleminde bir nokta olarak temsil etmek istediğimizi varsayın. Bunu, E'den gelen bir ışınla P_1'in düzlem üzerine izdüşümünü düşürerek yaparız. P_1 noktası $P(0, y, z)$ noktası olarak görülecektir. Grafik tasarımcıları olarak sorunumuz E ve P_1 verildiğinde, y ve z'yi bulmaktır.

a. $\overrightarrow{EP}$ ve $\overrightarrow{EP_1}$ ve arasında geçerli olan bir vektör denklemi yazın. Denklemi kullanarak y ve z'yi x_0, x_1, y_1 ve z_1 cinsinden ifade edin.

b. (a) şıkkında y ve z için bulunan formülleri, $x_1 = 0$ ve $x_1 = x_0$'daki davranışlarını araştırarak ve $x_0 \to \infty$ iken neler olduğunu görerek kontrol edin. Ne buluyorsunuz?



74. Saklı doğrular Burada bilgisayar grafiklerinin başka bir tipik problemi verilmektedir. Gözünüz (4, 0, 0)'dadır. Köşeleri (1, 0, 1), (1, 1, 0) ve (–2, 2, 2)'de olan üçgen bir plakaya bakıyorsunuz. (1, 0, 0)'dan (0, 2, 2)'ye giden doğru parçası plakadan geçmektedir. Plaka doğru parçasının hangi kısmını görmenizi engellemektedir? (Bu, doğrularla düzlemlerin kesişmesiyle ilgili bir problemdir.)

12.6 Silindirler ve Kuadrik Yüzeyler

Şu ana kadar yüzeylerin iki özel tipini inceledik: küreler ve düzlemler. Bu bölümde envanterimizi çeşitli silindirleri ve kuadrik yüzeyleri içerecek şekilde genişletiyoruz. Kuadrik yüzeyler x, y ve z'nin ikinci-derece denklemleri ile tanımlanan yüzeylerdir. Küreler kuadrik yüzeylerdir fakat aynı derecede ilginç başkaları da vardır.

Silindirler

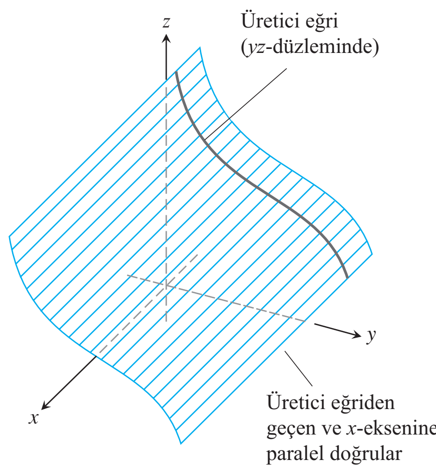
Bir **silindir** bir doğruyu verilen sabit bir doğruya paralel tutarak, verilen düzlemsel bir eğri boyunca hareket ettirmekle üretilen bir yüzeydir. Eğri, silindirin **üretici eğrisi**dir (Şekil

12.43). *Silindirin dairesel silindir* anlamına geldiği katı geometrisinde, üretici eğriler çemberlerdir, fakat artık her türlü üretici eğriye izin veriyoruz. İlk örneğimizdeki silindir bir parabol tarafından üretilmiştir.

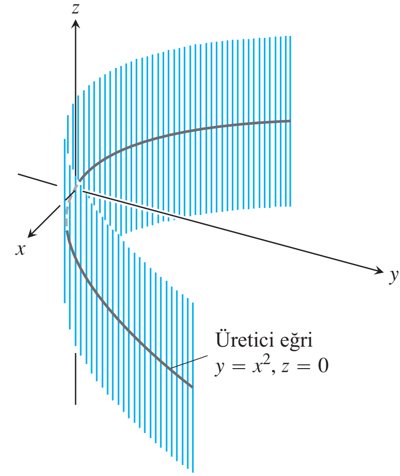
Bir silindir veya başka bir yüzeyi elle çizerken veya bilgisayarla üretilen bir tanesini incelerken, yüzeyin koordinat düzlemlerine paralel düzlemlerle kesişmesiyle oluşan eğrilere bakmak yardımcı olur.Bu eğrilere **kesit** veya **iz** denir.

ÖRNEK 1 $y = x^2$ Parabolik Silindiri

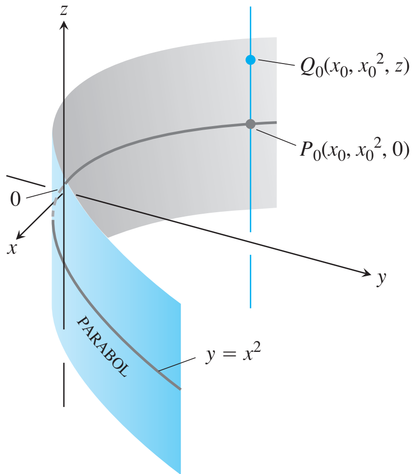
z-eksenine paralel olan ve $y = x^2$, $z = 0$ parabolünden geçen doğruların ürettiği silindirin denklemini bulun (Şekil 12.44).



ŞEKİL 12.43 Bir silindir ve üretici eğrisi



ŞEKİL 12.44 xy-düzlemindeki $y = x^2$ parabolünden z-eksenine paralel olarak geçen eğrilerin silindiri (Örnek 1)



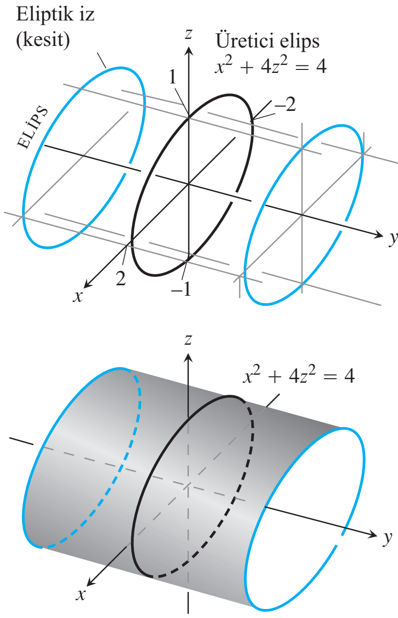
ŞEKİL 12.45 Şekil 12.44'teki silindirin her noktasının koordinatları (x_0, x_0^2, z) şeklindedir. Silindire "$y = x^2$ silindiri" deriz.

Çözüm $P_0(x_0, x_0^2, 0)$ noktasının xy-düzlemindeki $y = x^2$ parabolünde bulunduğunu varsayın. Bu durumda, z'nin herhangi bir değeri için, $Q(x_0, x_0^2, z)$ noktası silindir üzerinde bulunacaktır, çünkü P_0'dan geçen ve z-eksenine paralel olan $x = x_0$, $y = x_0^2$ doğrusu üzerinde olacaktır. Tersine, y-koordinatı x-koordinatının karesine eşit olan her $Q(x_0, x_0^2, z)$ noktası silindir üzerindedir. Çünkü P_0'dan geçen ve z eksenine paralel olan $x = x_0$, $y = x_0^2$ doğrusu üzerinde bulunmaktadır (Şekil 12.45).

Dolayısıyla, z'nin değeri ne olursa olsun, yüzey üzerindeki noktalar koordinatları $y = x^2$ denklemini sağlayan noktalardır. Bu, $y = x^2$'yi silindirin denklemi yapar. Bu nedenle silindire "$y = x^2$ silindiri" deriz. ■

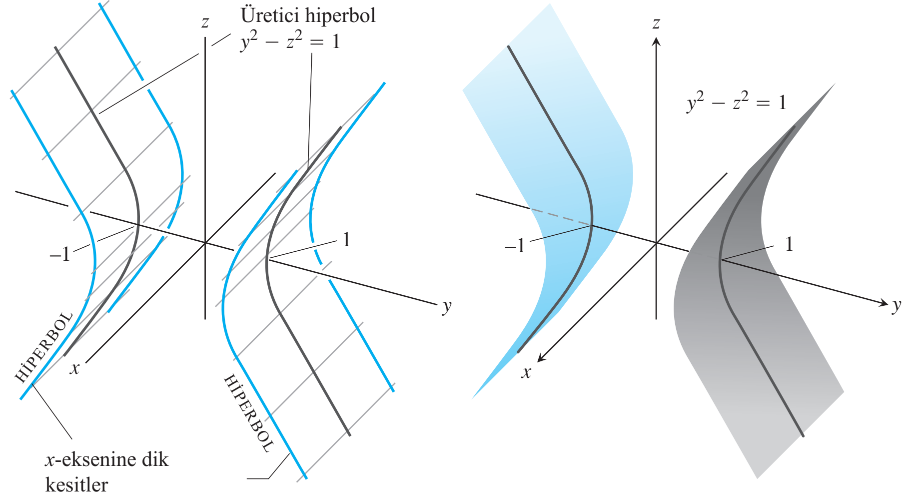
Örnek 1'in önerdiği gibi, xy-düzlemindeki herhangi bir $f(x, y) = c$ eğrisi, denklemi yine $f(x, y)$ olan z-eksenine paralel bir silindir tanımlar. $x^2 + y^2 = 1$ denklemi z-eksenine paralel doğrularla yapılmış, xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = 1$ çemberinden geçen bir silindir tanımlar. $x^2 + 4y^2 = 9$ denklemi z-eksenine paralel ve xy-düzlemindeki $x^2 + 4y^2 = 9$ elipsinden geçen doğrularla yapılmış eliptik silindiri tanımlar.

Benzer şekilde, xz-düzlemindeki herhangi bir $g(x, z) = c$ eğrisi y-eksenine paralel ve uzay denklemi yine $g(x, z) = c$ olan bir silindir tanımlar (Şekil 12.46). Herhangi bir



ŞEKİL 12.46 $x^2 + 4z^2 = 4$ eliptik silindiri y-eksenine paralel olan ve $x^2 + 4z^2 = 4$ elipsinden geçen doğrulardan yapılmıştır. Silindirin y-eksenine paralel düzlemlerdeki kesitleri veya "izleri" üretici elipse benzer elipslerdir. Silindir y-ekseni boyunca uzanır.

$h(y, z) = c$ denklemi x-eksenine paralel ve uzay denklemi yine $h(y, z) = c$ olan bir silindir tanımlar (Şekil 12.47). Bununla birlikte, bir silindirin ekseni bir koordinat eksenine paralel olmak zorunda değildir.



ŞEKİL 12.47 $y^2 - z^2 = 1$ hiperbolik silindiri x-eksenine paralel ve yz-düzlemindeki $y^2 - z^2 = 1$ hiperbolünden geçen doğrularla yapılmıştır. Silindirin x-eksenine dik düzlemlerdeki kesitleri üretici hiperbole benzer hiperbollerdir.

Kuadrik Yüzeyler

Şimdi inceleyeceğimiz yüzey tipi bir *kuadrik* yüzeydir. Bu yüzeyler elipslerin, parabollerin ve hiperbollerin üç boyutlu benzerleridirler.

Bir kuadrik yüzey x, y ve z'nin ikinci dereceden bir denkleminin uzaydaki grafiğidir. A, B, C vs. sabitler olamak üzere, en genel şekli

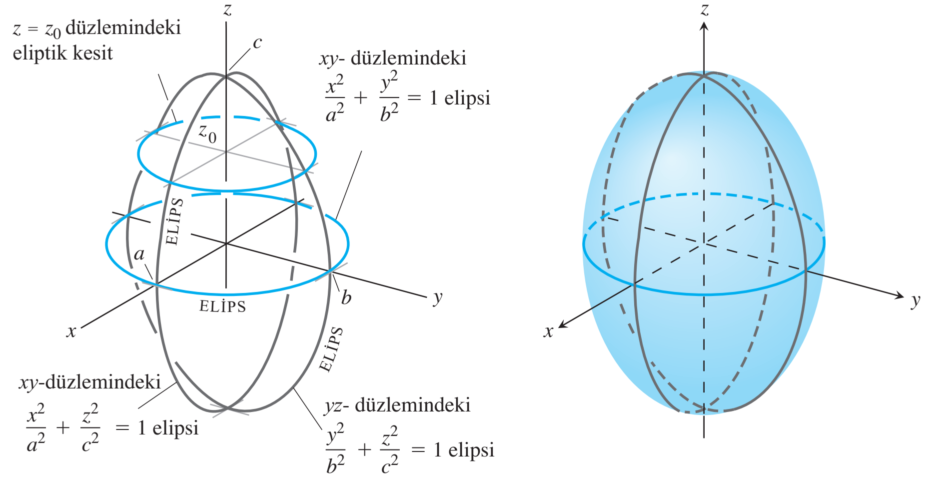
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

denklemi gibidir, fakat bu denklem, iki boyutlu halde olduğu gibi, öteleme ve döndürme ile basitleştirilebilir. Sadece basit denklemleri inceleyeceğiz. Farklı tanımlandıkları halde, Şekil 12.45 – 12.47'deki silindirler de kuadrik yüzeylerin örnekleriydi. Temel kuadrik yüzeyler **elipsoidler, paraboloidler, eliptik koniler ve hiperboloid**lerdir (Küreleri özel elipsoidler olarak düşünüyoruz). Şimdi her tipte örnekler gösteriyoruz.

ÖRNEK 2 Elipsoidler

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

elipsoidi (Şekil 12.48) koordinat eksenlerini $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ ve $(0, 0, \pm c)$'de keser. $|x| \le a$, $|y| \le b$ ve $|z| \le c$ eşitsizleriyle tanımlanan dikdörtgen kutunun içinde bulunur. Yüzey koordinat eksenlerinin her birine göre simetriktir, çünkü tanımlayıcı denklemdeki değişkenlerin kareleri alınmıştır.



ŞEKİL 12.48 Örnek 2'deki

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

elipsoidinin üç koordinat düzlemi ile de kesitleri elipslerdir.

Üç koordinat düzleminin yüzeyi kestikleri eğriler elipstir. Örneğin,

$$z = 0 \text{ iken} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

olur. $z = z_0,\ |z_0| < c,$ düzleminin yüzeyden kestiği kesit

$$\frac{x^2}{a^2(1 - (z_0/c)^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 - (z_0/c)^2)} = 1$$

elipsidir. a, b ve c yarı eksenlerinden ikisi aynıysa, yüzey bir **dönel elipsoid**dir. Üçü de eşitse, yüzey bir küredir. ■

ÖRNEK 3 Paraboloidler

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \qquad (2)$$

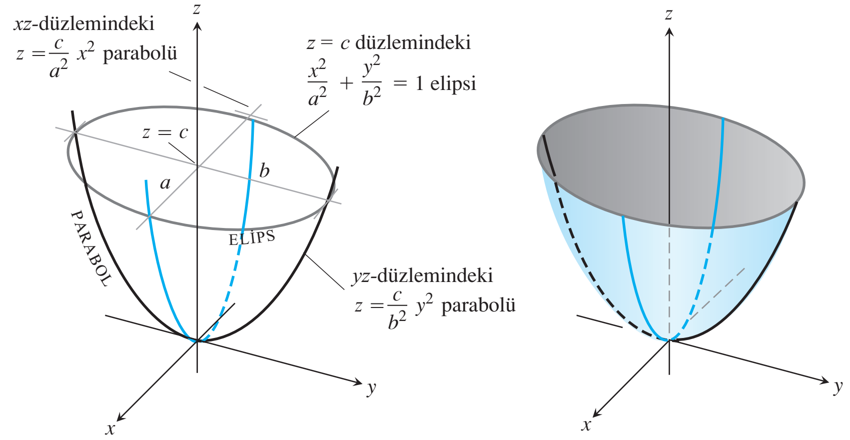
eliptik paraboloidi $x = 0$ ve $y = 0$ düzlemlerine göre simetriktir (Şekil 12.49). Eksenlerdeki tek kesim noktası orijindir. Bu nokta dışında, yüzey, c'nin işaretine bağlı olarak, tamamen xy-düzleminin altında $c < 0$ ise veya üstünde $c > 0$ ise bulunur. Koordinat düzlemlerinin kestikleri kesitler

$$x = 0: \qquad z = \frac{c}{b^2}y^2 \quad \text{parabolü}$$

$$y = 0: \qquad z = \frac{c}{a^2}x^2 \quad \text{parabolü}$$

$$z = 0: \qquad (0, 0, 0) \quad \text{noktası}$$

olarak bulunur.



ŞEKİL 12.49 Örnek 3'te $c > 0$ için gösterilmiş $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = z/c$ eliptik paraboloidi. xy-düzleminin üst tarafında z-eksenine dik kesitler elipstir. z-eksenini içeren düzlemlerdeki kesitler paraboldür.

xy-düzleminin üst tarafındaki her $z = z_0$ düzlemi yüzeyi

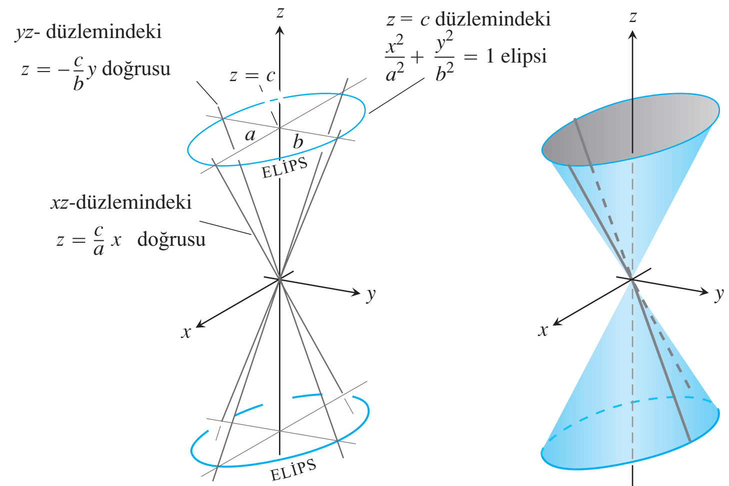
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0}{c}$$ ■

elipsi boyunca keser.

ÖRNEK 4 Koniler

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \tag{3}$$

eliptik konisi üç koordinat eksenine göre de simetriktir (Şekil 12.50). Koordinat düzlem-



ŞEKİL 12.50 Örnek 5'teki $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) - (x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ hiperboloidi. z-eksenine dik düzlemler hiperboloidi elipslerle keserler. z-eksenini içeren dikey düzlemlerin hiperboloid ile kesişimleri hiperbollerdir.

lerinin kestiği kesitler

$$x = 0: \qquad z = \pm\frac{c}{b}y \text{ doğruları}$$

$$y = 0: \qquad z = \pm\frac{c}{a}x \text{ doğruları}$$

$$z = 0: \qquad (0, 0, 0) \text{ noktasında}$$

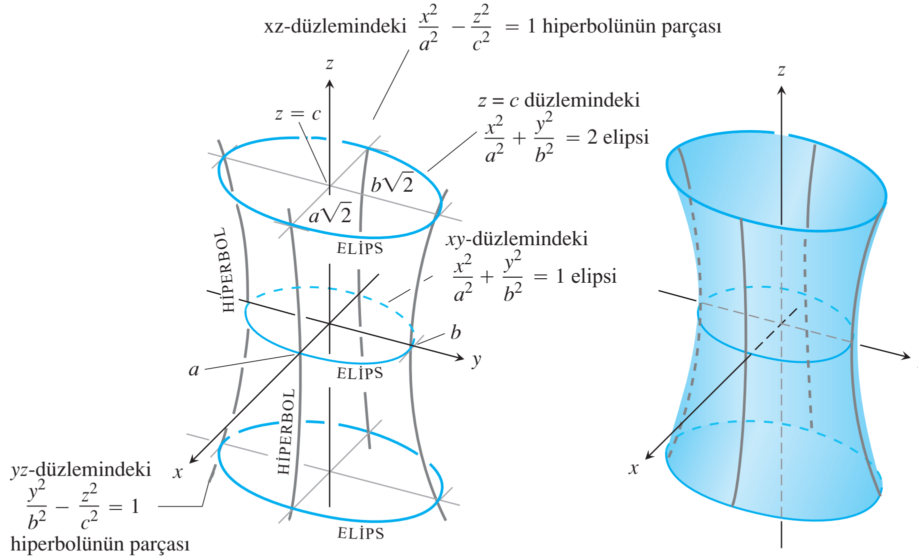
olarak bulunur. $z = z_0$ düzlemlerinin xy-ekseninin altında ve üstünde kestikleri kesitler merkezleri z-ekseninde olan ve tepe noktaları yukarıda verilen doğrular üzerinde bulunan elipslerdir.

$a = b$ ise, koni dik dairesel bir konidir. ■

ÖRNEK 5 Hiperboloidler

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4}$$

tek katmanlı hiperboloidi üç koordinat eksenine göre de simetriktir (Şekil 12.51).



ŞEKİL 12.51 Örnek 5'teki $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) - (z^2/c^2) = 1$ hiperboloidi. z-eksenine dik düzlemler hiperboloidi elipslerle keserler. z-eksenini içeren dikey düzlemlerin hiperboloid ile kesişimleri hiperbollerdir.

Koordinat düzlemlerinin kestiği kesitler

$$x = 0: \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ hiperbolü}$$

$$y = 0: \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ hiperbolü}$$

$$z = 0: \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ elipsi}$$

olarak bulunur.

$z = z_0$ düzlemi yüzeyi, merkezleri z-ekseninde ve tepe noktaları yukarıdaki hiperbolik kesitlerden biri üzerinde bulunan bir elipsle keser.

Yüzey bağlantılıdır, yani üzerindeki bir noktadan diğerine yüzeyi terk etmeden gitmek mümkündür. Bu nedenle, iki tane katmanı olan *bir* sonraki örnekteki hiperbolün aksine, bir tane katmanı vardır denir.

$a = b$ ise, hiperboloid bir dönel yüzeydir. ■

ÖRNEK 6 Hiperboloidler

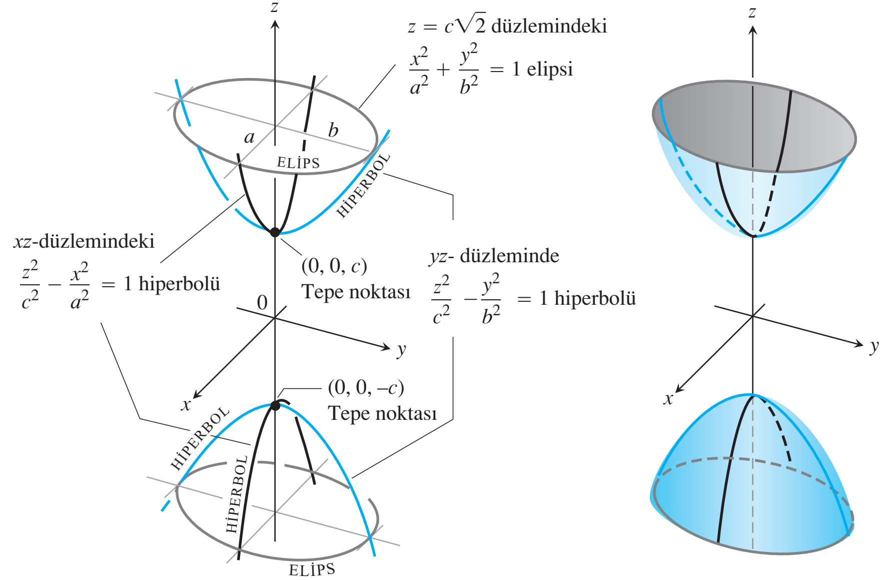
$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

iki katmanlı hiperboloidi üç koordinat düzlemine göre de simetriktir (Şekil 12.52). $z = 0$ düzlemi yüzeyi kesmez; aslında yatay bir düzlemin yüzeyi kesebilmesi için, $|z| \geq c$ olmalıdır.

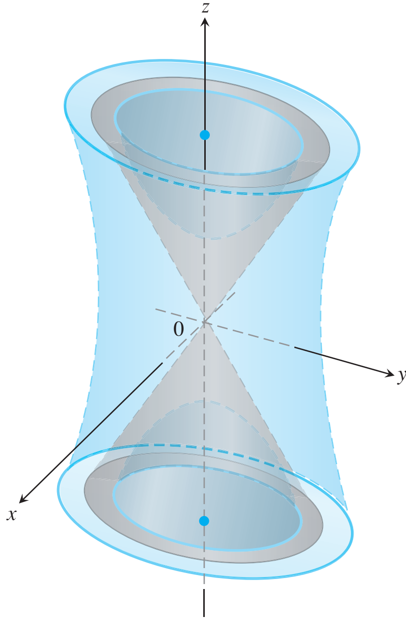
$$x = 0: \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y = 0: \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

hiperbolik kesitlerinin tepe noktaları ve odakları z-eksenindedir. Yüzey iki kısma ayrılmıştır, biri $z = c$ düzleminin üst tarafında, diğeri $z = -c$ düzleminin altındadır. Bu ismini açıklar.



ŞEKİL 12.52 Örnek 6'daki $(z^2/c^2) - (x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ hiperboloidi. Tepe noktalarının üst ve alt tarafında, z-eksenine dik düzlemler hiperboloidi elipslerle keserler. z-eksenini içeren dikey düzlemlerin hiperboloidle kesişimleri hiperbollerdir.



ŞEKİL 12.53 İki hiperboloid de koniye asimptottur (Örnek 6).

(4) ve (5) denklemlerinde farklı sayıda negatif terim vardır. Her durumdaki sayı hiperboloidin katman sayısıyla aynıdır. (4) veya (5) denkleminin sağ tarafındaki 1 yerine 0 yazarsak, bir eliptik koni için verilen ((Denklem 3)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

denklemini buluruz. Hiperboloidler bu koniye (Şekil 12.53),

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

hiperbollerinin, xy-düzlemindeki

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

doğrularına asimptot oldukları gibi, asimptotturlar. ■

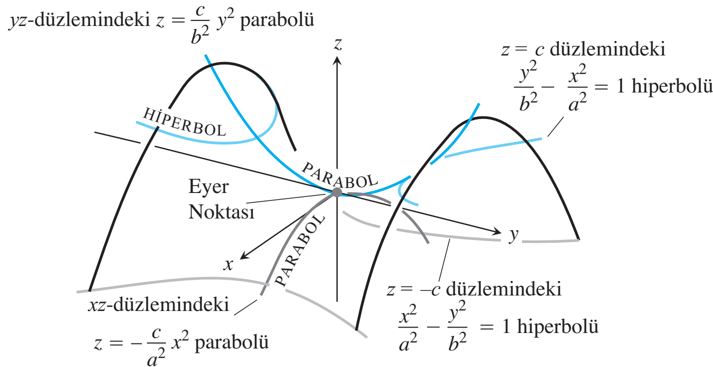
ÖRNEK 7 Bir Eyer Noktası

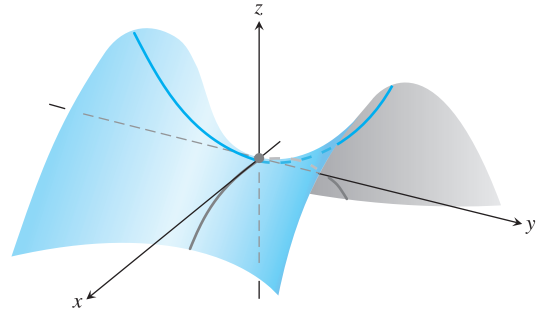
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}, \qquad c > 0 \tag{6}$$

hiperbolik paraboloidi $x = 0$ ve $y = 0$ düzlemlerine göre simetriktir (Şekil 12.54). Bu düzlemlerdeki kesitler şöyledir:

$$x = 0: \qquad z = \frac{c}{b^2} y^2 \ \text{parabolü} \tag{7}$$

$$y = 0: \qquad z = \frac{c}{a^2} x^2 \ \text{parabolü} \tag{8}$$





ŞEKİL 12.54 $(y^2/b^2) - (x^2/a^2) = z/c$, $c > 0$ hiperbolik paraboloidi. xy-düzleminin üst ve alt tarafında z-eksenine dik kesitler hiperbollerdir.Diğer eksenlere dik kesitler parabollerdir.

$x = 0$ düzleminde, parabol orijinden yukarı açılır. $y = 0$ düzlemindeki parabol aşağı açılır.

Yüzeyi bir $z = z_0 > 0$ düzlemiyle kesersek, kesit odak ekseni y-eksenine paralel ve tepe noktaları (7) denklemindeki parabol üzerinde bulunan bir hiperboldür:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z_0}{c},$$

z_0 negatifse, odak ekseni x-eksenine paraleldir ve tepe noktaları (8) denklemindeki parabol üzerindedir.

Orijin yakınında, yüzey bir eyer veya bir dağ geçidi biçimindedir. yz-düzleminde yüzey boyunca dolaşan bir kişiye göre, orijin bir minimum gibi görünür. xz-düzleminde dolaşan bir kişiye göre ise, orijin bir maksimuma benzer. Böyle bir noktaya yüzeyin bir **eyer noktası** denir. ■

TEKNOLOJİ KULLANMAK **Uzayda Görüntüleme**

Bir Bilgisayarlı Cebir Sistemi (BCS) veya diğer bir grafik çizim programı uzayda yüzeyleri görüntülememize yardım edebilir. Çoğu insanın gösterebileceğinden daha fazla sabırla farklı düzlemlerdeki izleri çizebilir. Çoğu bilgisayar grafik çizici sistemi şekli elinizde döndürebileceğiniz bir fiziksel kalıp gibi görebileceğiniz şekilde döndürebilir. Saklı-doğru algoritmaları (Bölüm 12.5, Alıştırma 74'e bakın) yüzeyin baktığınız yerden göremeyeceğiniz kısımlarını saklamakta kullanılır. Genellikle bir BCS yüzeylerin, Bölüm 16.6'da tartışılacak parametrik şekilde girilmesini isteyecektir (ayrıca Bölüm 14.1' deki 57-60 BCS araştırmalarına bakın). Bazen bir yüzeyin tümünü görebilmek için, latisi yönlendirmeniz gerekebilir.

ALIŞTIRMALAR 12.6

Denklemleri Yüzeylerle Eşleştirmek

1–12 alıştırmalarında denklemi, tanımladığı yüzeyle eşleştirin. Ayrıca, her yüzeyi tipi (paraboloid, elipsoid, vb.) ile belirleyin. Yüzeyler (a)–(l) olarak numaralanmıştır.

1. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$

2. $z^2 + 4y^2 - 4x^2 = 4$

3. $9y^2 + z^2 = 16$

4. $y^2 + z^2 = x^2$

5. $x = y^2 - z^2$

6. $x = -y^2 - z^2$

7. $x^2 + 2z^2 = 8$

8. $z^2 + x^2 - y^2 = 1$

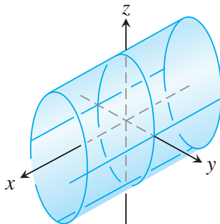
9. $x = z^2 - y^2$

10. $z = -4x^2 - y^2$

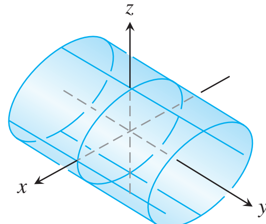
11. $x^2 + 4z^2 = y^2$

12. $9x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 36$

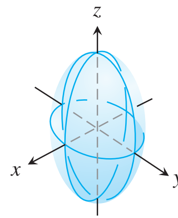
a.



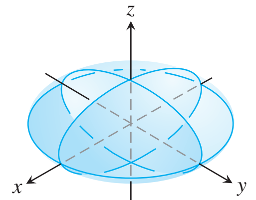
b.



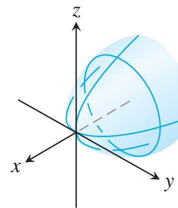
c.



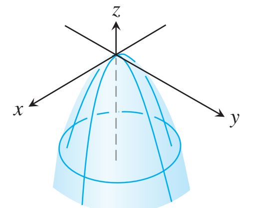
d.

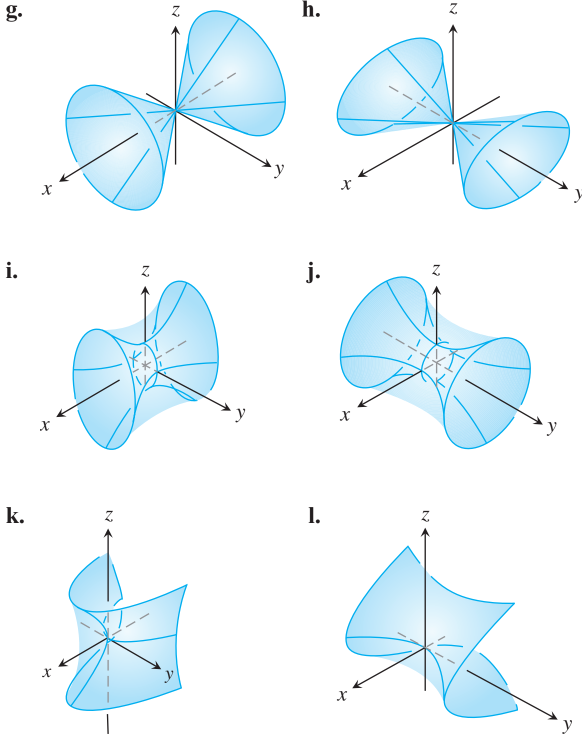


e.



f.





Çizim

13–76 alıştırmalarındaki yüzeyleri çizin.

SİLİNDİRLER

13. $x^2 + y^2 = 4$ **14.** $x^2 + z^2 = 4$

15. $z = y^2 - 1$ **16.** $x = y^2$

17. $x^2 + 4z^2 = 16$ **18.** $4x^2 + y^2 = 36$

19. $z^2 - y^2 = 1$ **20.** $yz = 1$

ELİPSOİDLER

21. $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$ **22.** $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$

23. $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$ **24.** $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$

PARABOLOİDLER

25. $z = x^2 + 4y^2$ **26.** $z = x^2 + 9y^2$

27. $z = 8 - x^2 - y^2$ **28.** $z = 18 - x^2 - 9y^2$

29. $x = 4 - 4y^2 - z^2$ **30.** $y = 1 - x^2 - z^2$

KONİLER

31. $x^2 + y^2 = z^2$ **32.** $y^2 + z^2 = x^2$

33. $4x^2 + 9z^2 = 9y^2$ **34.** $9x^2 + 4y^2 = 36z^2$

HİPERBOLOİDLER

35. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ **36.** $y^2 + z^2 - x^2 = 1$

37. $(y^2/4) + (z^2/9) - (x^2/4) = 1$

38. $(x^2/4) + (y^2/4) - (z^2/9) = 1$

39. $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ **40.** $(y^2/4) - (x^2/4) - z^2 = 1$

41. $x^2 - y^2 - (z^2/4) = 1$ **42.** $(x^2/4) - y^2 - (z^2/4) = 1$

HİPERBOLİK PARABOLOİDLER

43. $y^2 - x^2 = z$ **44.** $x^2 - y^2 = z$

KARIŞIK

45. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ **46.** $4x^2 + 4y^2 = z^2$

47. $z = 1 + y^2 - x^2$ **48.** $y^2 - z^2 = 4$

49. $y = -(x^2 + z^2)$ **50.** $z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 4$

51. $16x^2 + 4y^2 = 1$ **52.** $z = x^2 + y^2 + 1$

53. $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ **54.** $x = 4 - y^2$

55. $x^2 + z^2 = y$ **56.** $z^2 - (x^2/4) - y^2 = 1$

57. $x^2 + z^2 = 1$ **58.** $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$

59. $16y^2 + 9z^2 = 4x^2$ **60.** $z = x^2 - y^2 - 1$

61. $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$ **62.** $4x^2 + 9z^2 = y^2$

63. $x^2 + y^2 - 16z^2 = 16$ **64.** $z^2 + 4y^2 = 9$

65. $z = -(x^2 + y^2)$ **66.** $y^2 - x^2 - z^2 = 1$

67. $x^2 - 4y^2 = 1$ **68.** $z = 4x^2 + y^2 - 4$

69. $4y^2 + z^2 - 4x^2 = 4$ **70.** $z = 1 - x^2$

71. $x^2 + y^2 = z$ **72.** $(x^2/4) + y^2 - z^2 = 1$

73. $yz = 1$ **74.** $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$

75. $9x^2 + 16y^2 = 4z^2$ **76.** $4z^2 - x^2 - y^2 = 4$

Teori ve Örnekler

77. **a.** $z = c$ düzlemi tarafından

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

elipsoidinden kesilen kesitin alanı A'yı c'nin bir fonksiyonu olarak ifade edin. (Yarı eksenleri a ve b olan bir elipsin alanı πab'dir.)

b. z-eksenine paralel dilimler kullanarak (a) şıkkındaki elipsoidin hacmini bulun.

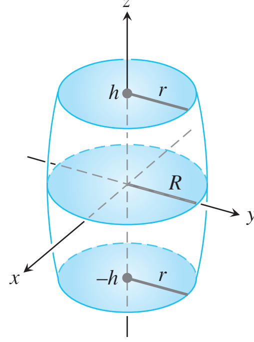
c. Şimdi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

elipsoidinin hacmini bulun. $a = b = c$ ise, formülünüz a yarıçaplı bir kürenin hacmini verir mi?

78. Yan sayfada gösterilen varil uçlarından z-eksenine paralel eşit parçalar kesilmiş bir elipsoide benzemektedir. z-eksenine dik

kesitler daireseldir. Orta noktasında yarıçapı R'dir ve iki ucunda da yarıçap r'dir. Varilin hacmi için bir formül bulun. Sonra iki şeyi kontrol edin. Birincisi, varilin kenarlarının, varili $2h$ yükseklikli ve R yarıçaplı bir silindire döndürecek şekilde düzleştirildiğini varsayın. Formülünüz silindirin hacmini veriyor mu? İkinci olarak, $r = 0$ ve $h = R$ olduğunu, yani varilin bir küre olduğunu varsayın. Formülünüz kürenin hacmini verir mi?



79. $z = h$ düzlemi ile

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

paraboloidinden kesilen parçanın hacminin, parçanın tabanı kere yüksekliğinin yarısı olduğunu gösterin (Şekil 12.49 $h = c$ özel durumu için parçayı göstermektedir).

80. **a.** $z = 0$ ve $z = h$, $h > 0$ düzlemleri ve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

hiperboloidi ile sınırlanan cismin hacmini bulun.

b. (a)'daki yanıtınızı, $z = 0$ ve $z = h$ düzlemleriyle hiperboloidden kesilen parçaların alanları olan A_0 ve A_h cinsinden ifade edin.

c. (a) şıkkındaki hacmin, aynı zamanda, A_m hiperboloidin $z = h/2$ düzleminden kestiği alanın hacmi olmak üzere,

$$V = \frac{h}{6}(A_0 + 4A_m + A_h),$$

formülüyle de verileceğini gösterin.

81. $(y^2/b^2) - (x^2/a^2) = z/c$ hiperbolik paraboloidi $y = y_1$ düzlemi ile kesilirse, ortaya çıkan eğri bir paraboldür. Tepe noktasını ve odağını bulun.

82. xy-düzleminde bir eğri elde edecek şekilde

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

denkleminde $z = 0$ koyduğunuzu varsayın. Eğri neye benzer? Yanıtınızı açıklayın.

83. Koordinat eksenlerine paralel bir düzlemde ne zaman bir kuadrik yüzeyin denklemini bulduysak, bu hep bir konik kesit olmuştur. Bu sadece basit bir tesadüf müdür? Böyle olması gerekir mi? Yanıtınızı açıklayın.

84. Bir kuadrik yüzeyi koordinat eksenlerine paralel *olmayan* bir yüzeyle kestiğinizi varsayın. Düzlemdeki iz neye benzeyecektir? Yanıtınızı açıklayın.

T Bilgisayar Grafik Araştırmaları

85–88 alıştırmalarındaki yüzeyleri belirtilen tanım bölgelerinde çizin. Yapabiliyorsanız, yüzeyi değişik görünümler için döndürün.

85. $z = y^2, \quad -2 \le x \le 2, \quad -0.5 \le y \le 2$

86. $z = 1 - y^2, \quad -2 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le 2$

87. $z = x^2 + y^2, \quad -3 \le x \le 3, \quad -3 \le y \le 3$

88. $z = x^2 + 2y^2$

a. $-3 \le x \le 3, \quad -3 \le y \le 3$

b. $-1 \le x \le 1, \quad -2 \le y \le 3$

c. $-2 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le 2$

d. $-2 \le x \le 2, \quad -1 \le y \le 1$

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Yüzey Çizimleri

89–84 alıştırmalarındaki yüzeyleri çizmek için bir BCS kullanın. Kuadrik yüzeyin tipini grafiğinizden tanımlayın.

89. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{36} = 1 - \dfrac{z^2}{25}$

90. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{z^2}{9} = 1 - \dfrac{y^2}{16}$

91. $5x^2 = z^2 - 3y^2$

92. $\dfrac{y^2}{16} = 1 - \dfrac{x^2}{9} + z$

93. $\dfrac{x^2}{9} - 1 = \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{2}$

94. $y - \sqrt{4 - z^2} = 0$

Bölüm 12 Bölüm Tekrar Soruları

1. Yönlü doğru parçaları ne zaman aynı vektörü temsil ederler?

2. Vektörler geometrik ve cebirsel olarak nasıl toplanır ve çıkarılırlar?

3. Bir vektörün yönünü ve büyüklüğünü nasıl bulursunuz?

4. Bir vektör pozitif bir skalerle çarpılırsa, sonuç orijinal vektörle nasıl ilişkilidir? Ya skaler sıfır veya negatifse?

5. İki vektörün *nokta çarpımını (skaler çarpım)* tanımlayın. Nokta çarpımları hangi cebirsel kuralları (komütatif, birleşme, dağılma, sadeleşme) sağlarlar ve, varsa, hangilerini sağlamazlar? Örnek verin. İki vektörün nokta çarpımı ne zaman sıfırdır?

6. Nokta çarpımlarının ne gibi geometrik veya fiziksel yorumları vardır? Örnek verin.

7. Bir u vektörünün bir **v** vektörü üzerine iz düşüm vektörü nedir? **u**'yu **v**'ye paralel bir vektör ile **v**'ye ortogonal bir vektörün toplamı olarak nasıl yazarsınız?

8. İki vektörün *vektörel çarpımını* tanımlayın. Vektörel çarpımlar hangi cebirsel kuralları (komütatif, birleşme, dağılma, sadeleşme) sağlarlar ve, varsa, hangilerini sağlamazlar? Örnek verin. İki vektörün vektörel çarpımı ne zaman sıfırdır?

9. Vektörel çarpımların ne gibi geometrik ve fiziksel yorumları vardır? Örnekler verin.

10. Kartezyen **i**, **j**, **k** koordinat sistemine göre iki vektörün vektörel çarpımını hesaplamak için determinant formülü nedir? Bir örnekte kullanın.

11. Uzaydaki doğrular, doğru parçaları ve düzlemlerin denklemlerini nasıl bulursunuz? Örnekler verin. Uzayda bir doğru veya düzlemi tek bir denklemle ifade edebilir misiniz?

12. Uzayda bir noktadan bir doğruya olan uzaklığı nasıl bulursunuz? Ya bir noktadan bir düzleme? Örnekler verin.

13. Kutu çarpımları nedir? Özellikleri nelerdir? Nasıl hesaplanırlar? Örnek verin.

14. Uzayda kürelerin denklemi nasıl bulunur? Örnekler verin.

15. Uzayda iki doğrunun kesişimini nasıl bulursunuz? Ya bir doğru ile bir düzlemin veya iki düzlemin? Örnekler verin.

16. Bir silindir nedir? Kartezyen koordinatlarda silindirleri tanımlayan denklemlere örnekler verin.

17. Kuadrik yüzeyler nelerdir? Farklı elipsoidlere, paraboloidlere, konilere ve hiperboloidlere örnekler verin (denklemleri ve çizimleri).

Bölüm 12 Problemler

İki Boyutta Vektör Hesaplamaları

1–4 alıştırmalarında $\mathbf{u} = \langle -3, 4\rangle$ ve $\mathbf{v} = \langle 2, -5\rangle$ olsun. (a) vektörün bileşen formunu ve **(b)** büyüklüğünü bulun

1. $3\mathbf{u} - 4\mathbf{v}$

2. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

3. $-2\mathbf{u}$

4. $5\mathbf{v}$

5–8 alıştırmalarında vektörün bileşen formunu bulun

5. $\langle 0, 1\rangle$'i $2\pi/3$ radyanlık bir açıyla döndürerek elde edilen vektör.

6. Pozitif x-ekseni ile $\pi/6$ radyanlık açı yapan birim vektör.

7. $4\mathbf{i} - \mathbf{j}$ yönünde 2 birim uzunluktaki vektör.

8. $(3/5)\mathbf{i} + (4/5)\mathbf{j}$ vektörünün ters yönünde ve 5 birim uzunluktaki vektör.

9–12 alıştırmalarındaki vektörleri uzunlukları ve yönleri cinsinden ifade edin.

9. $\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$

10. $-\mathbf{i} - \mathbf{j}$

11. $t = \pi/2$ iken $\mathbf{v} = (-2\sin t)\mathbf{i} + (2\cos t)\mathbf{j}$ hız vektörü.

12. t = ln 2 iken $\mathbf{v} = (e^t\cos t - e^t\sin t)\mathbf{i} + (e^t\sin t + e^t\cos t)\mathbf{j}$ hız vektörü.

Üç Boyutta Vektör Hesaplamaları

13 ve 14 alıştırmalarındaki vektörleri uzunlukları ve yönleri cinsinden ifade edin.

13. $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

14. $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

15. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ yönünde 2 birim uzunlukta bir vektör bulun.

16. $\mathbf{v} = (3/5)\mathbf{i} + (4/5)\mathbf{k}$ vektörünün ters yönünde ve 5 birim uzunlukta bir vektör bulun.

17 ve 18 alıştırmalarında, $|\mathbf{v}|$, $|\mathbf{u}|$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, $|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|$, **v** ile **u** arasındaki açıyı, **u**'nun **v** yönündeki skaler bileşenini ve **u**'nun **v** üzerine iz düşüm vektörünü bulun.

17. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

18. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
$\mathbf{u} = -\mathbf{i} - \mathbf{k}$

19 ve 20 alıştırmalarında, **u**'yu **v**'ye paralel bir vektör ile **v**'ye ortogonal bir vektörün toplamı olarak yazın.

19. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
$\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

20. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
$\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

21 ve 22 Alıştırmalarında, koordinat eksenleri çizin ve sonra **u**, **v** ve $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$ vektörlerini orijinden başlayan vektörler olarak çizin

21. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

22. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

23. $|\mathbf{v}| = 2$, $|\mathbf{w}| = 3$ ve **v** ile **w** arasındaki açı $\pi/3$ ise, $|\mathbf{v} - 2\mathbf{w}|$'yu bulun.

24. Hangi a değeri veya değerleri için $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ ve $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + a\mathbf{k}$ vektörleri paralel olur?

25 ve 26 alıştırmalarında, **(a)** **u** ve **v** vektörlerinin tanımladıkları paralelkenarın alanını **(b)** **u**, **v** ve **w** vektörlerinin tanımladığı paralelyüzlünün hacmini bulun.

25. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

26. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

Doğrular, Düzlemler ve Uzaklıklar

27. **n**'nin bir düzleme normal ve **v**'nin aynı düzleme paralel olduğunu varsayın. Hem **v**'ye dik, hem de düzleme paralel bir **u** vektörünü nasıl bulacağınızı tanımlayın.

28. Düzlemde $ax + by = c$ doğrusuna paralel bir vektör bulun.

29 ve 30 alıştırmalarında, noktadan doğruya olan uzaklığı bulun.

29. $(2, 2, 0)$; $x = -t, \quad y = t, \quad z = -1 + t$

30. $(0, 4, 1)$; $x = 2 + t, \quad y = 2 + t, \quad z = t$

31. (1, 2, 3) noktasından geçen ve $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$ vektörüne paralel doğruyu parametrize edin.

32. $P(1, 2, 0)$ ve $Q(1, 3, -1)$ noktalarını birleştiren doğru parçasını parametrize edin.

33 ve 34 alıştırmalarında noktadan düzleme olan uzaklığı bulun.

33. $(6, 0, -6)$, $\quad x - y = 4$

34. $(3, 0, 10)$, $\quad 2x + 3y + z = 2$

35. (3, –2, 1) noktasından geçen ve $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektörüne normal olan düzlemin denklemini bulun.

36. (–1, 6, 0) noktasından geçen ve $x = -1 + t$, $y = 6 - 2t$, $z = 3t$ doğrusuna dik olan düzlemin denklemini bulun.

37 ve 38 alıştırmalarında, P, Q ve R noktalarından geçen düzlemin denklemini bulun.

37. $P(1, -1, 2), \quad Q(2, 1, 3), \quad R(-1, 2, -1)$

38. $P(1, 0, 0), \quad Q(0, 1, 0), \quad R(0, 0, 1)$

39. $x = 1 + 2t$, $y = -1 - t$, $z = 3t$ doğrusunun üç koordinat eksenini kestiği noktaları bulun.

40. Orijinden geçen ve $2x - y - z = 4$ düzleminde dik doğrunun $3x - 5y + 2z = 6$ düzlemini kestiği noktayı bulun.

41. $x = 7$ ile $x + y + \sqrt{2}z = -3$ düzlemleri arasındaki dar açıyı bulun.

42. $x + y = 1$ ile $y + z = 1$ düzlemleri arasındaki dar açıyı bulun.

43. $x + 2y + z = 1$ ile $x - y + 2z = -8$ düzlemlerinin kesişim doğrusunun parametrik denklemlerini bulun.

44.

$$x + 2y - 2z = 5 \quad \text{ve} \quad 5x - 2y - z = 0$$

düzlemlerinin kesişim doğrusunun

$$x = -3 + 2t, \quad y = 3t, \quad z = 1 + 4t$$

doğrusuna paralel olduğunu gösterin.

45. $3x + 6z = 1$ ve $2x + 2y - z = 3$ düzlemleri bir doğruda kesişir.

a. Düzlemlerin ortogonal olduklarını gösterin.

b. Kesişim doğrusunun denklemlerini bulun.

46. (1, 2, 3) noktasından geçen ve $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ve $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$'ye paralel olan düzlemin denklemini bulun.

47. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$'nin $2x + y = 5$ düzlemiyle özel bir ilişkisi var mıdır? Cevabınızı açıklayın.

48. $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$ denklemi P_0'dan geçen ve **n**'ye normal olan düzlemi temsil eder. $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} > 0$ eşitsizliği hangi kümeyi temsil eder?

49. $P(1, 4, 0)$ noktasının $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, -1)$ ve $C(2, -1, 0)$'dan geçen düzleme uzaklığını bulun.

50. (2, 2, 3) noktasının $2x + 3y + 5z = 0$ düzlemine uzaklığı bulun.

51. $2x - y - z = 4$ düzlemine paralel ve $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$'ye ortogonal olan bir vektör bulun.

52. $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ve $\mathbf{C} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ise, **B** ve **C**'nin düzleminde **A**'ya ortogonal olan bir birim vektör bulun.

53. $x + 2y + z - 1 = 0$ ve $x - y + 2z + 7 = 0$ düzlemlerinin kesişim doğrusuna paralel ve büyüklüğü 2 olan bir vektör bulun.

54. Orijinden geçen ve $2x - y - z = 4$ düzlemine dik olan doğrunun $3x - 5y + 2z = 6$ düzlemiyle kesiştiği noktayı bulun.

55. $P(3, 2, 1)$ noktasından geçen ve $2x - y + 2z = -2$ düzlemine dik olan doğrunun düzlemi kestiği noktayı bulun.

56. $2x + y - z = 0$ ve $x + y + 2z = 0$ düzlemlerinin kesişim doğrusu orijinle hangi açıyı yapar?

57.

$$L: \quad x = 3 + 2t, \quad y = 2t, \quad z = t$$

doğrusu $x + 3y - z = -4$ düzlemini bir P noktasında keser. P'nin koordinatları ile P'den geçen ve L'ye dik olan doğrunun denklemlerini bulun.

58. Her reel k sayısı için,

$$x - 2y + z + 3 + k(2x - y - z + 1) = 0$$

düzleminin

$$x - 2y + z + 3 = 0 \quad \text{ve} \quad 2x - y - z + 1 = 0$$

düzlemlerinin kesişim doğrusunu içerdiğini gösterin.

59. $A(-2, 0, -3)$ ve $B(1, -2, 1)$'den geçen ve $C(-2, -13/5, 26/5)$ ve $D(16/5, -13/5, 0)$ noktalarından geçen doğruya paralel düzlemin denklemini bulun.

60. $x = 1 + 2t$, $y = -2 + 3t$, $z = -5t$ doğrusunun herhangi bir şekilde $-4x - 6y + 10z = 9$ düzlemiyle bir ilişkisi var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

61. Aşağıdakilerin hangileri $P(1, 1, -1)$, $Q(3, 0, 2)$ ve $R(-2, 1, 0)$ noktalarından geçen düzlemin denklemleridir?

a. $(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot ((x + 2)\mathbf{i} + (y - 1)\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = 0$

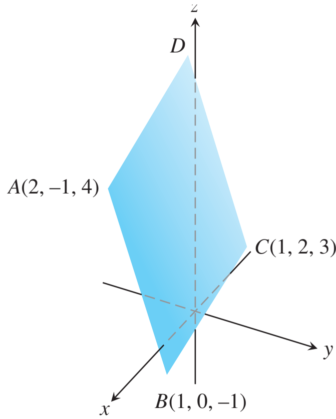
b. $x = 3 - t, \quad y = -11t, \quad z = 2 - 3t$

c. $(x + 2) + 11(y - 1) = 3z$

d. $(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \times ((x + 2)\mathbf{i} + (y - 1)\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \mathbf{0}$

e. $(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \times (-3\mathbf{i} + \mathbf{k}) \cdot ((x + 2)\mathbf{i} + (y - 1)\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = 0$

62. Sayfa 902'de görülen paralelkenarın köşeleri $A(2, -1, 4)$, $B(1, 0, -1)$, $C(1, 2, 3)$ ve D'dedir. İstenenleri istenenleri bulun.



a. D'nin koordinatlarını,

b. B'deki iç açının kosinüsünü,

c. $\overrightarrow{BA}$'nın $\overrightarrow{BC}$ üzerine iz düşüm vektörünü,

d. Paralelkenarın alanını,

e. Paralelkenarın düzleminin denklemini,

f. Paralelkenarın üç koordinat düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanlarını

bulun.

63. Doğrular arasındaki uzaklık $A(1, 0, -1)$ ve $B(-1, 1, 0)$'dan geçen L_1 ve $C(3, 1, -1)$ ile $D(4, 5, -2)$'den geçen L2 doğruları arasındaki uzaklığı bulun. Uzaklık iki doğruya da dik doğru üzerinde ölçülmelidir. Önce iki doğruya da dik olan bir **n** vektörü bulun. Sonra $\overrightarrow{AC}$'nin **n** üzerindeki izdüşümünü bulun.

64. (*Problem 63'ün devamı*) $A(4, 0, 2)$ ve $B(2, 4, 1)$'den geçen doğru ile $C(1, 3, 2)$ ve $D(2, 2, 4)$'ten geçen doğrunun arasındaki uzaklığı bulun.

Kuadrik Yüzeyler

65–76 alıştırmalarında yüzeyleri tanımlayın ve çizin.

65. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

66. $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$

67. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$

68. $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$

69. $z = -(x^2 + y^2)$

70. $y = -(x^2 + z^2)$

71. $x^2 + y^2 = z^2$

72. $x^2 + z^2 = y^2$

73. $x^2 + y^2 - z^2 = 4$

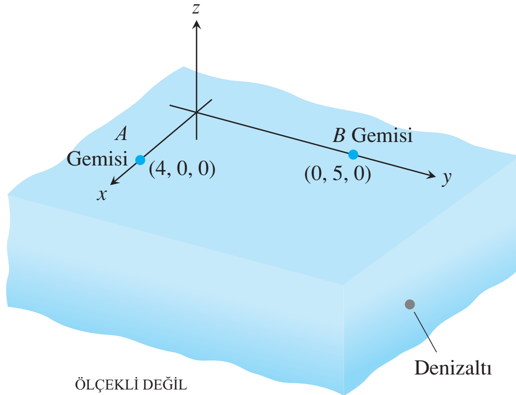
74. $4y^2 + z^2 - 4x^2 = 4$

75. $y^2 - x^2 - z^2 = 1$

76. $z^2 - x^2 - y^2 = 1$

Bölüm 12 Ek ve İleri Alıştırmalar

1. Denizaltı avı Manevra yapan yüzeydeki iki gemi, bir uçak karşılamak için, bir denizaltının rotasını ve hızını belirlemeye çalışıyorlar. Aşağıda görüldüğü gibi, A gemisi $(4, 0, 0)$'da iken B gemisi $(0, 5, 0)$'dadır. Bütün koordinatlar bin fit olarak verilmektedir. A gemisi denizaltıyı $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - (1/3)\mathbf{k}$ vekötörü yönünde belirlerken, B gemisi $18\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$ vektörü yönünde bulmaktadır. Dört dakika önce, denizaltı $(2, -1, -1/3)$ noktasındaydı. Uçak 20 dakika sonra gelecektir. Denizaltının sabit hızla bir doğru üzerinde ilerlediği varsayılırsa, yüzeydeki gemiler uçağı hangi konuma yönlendirmelidirler?

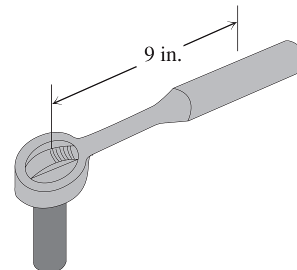


2. Bir helikopter kurtarışı İki helikopter, H_1 ve H_2, birlikte dolaşıyorlar. $t = 0$ saat anında, ayrılıyor ve, bütün uzunluklar mil olmak üzere,

$$H_1: \quad x = 6 + 40t, \quad y = -3 + 10t, \quad z = -3 + 2t$$
$$H_2: \quad x = 6 + 110t, \quad y = -3 + 4t, \quad z = -3 + t$$

ile verilen faklı doğrularla ilerlemeye başlıyorlar. Sistem arızalarından dolayı, H_2 $(446, 13, 1)$'de uçuşunu durduruyor ve ihmal edilebilir bir zaman sonra $(446, 13, 0)$'a konuyor. İki saat sonra, H_1'e durum bildiriliyor ve H_2'ye doğru 150 mil/sa hızla yola çıkıyor. H_1'in H_2'ye varması ne kadar sürecektir?

3. Tork Toro® 21 inçlik çim biçme makinesinin çalıştırma kılavuzu "kıvılcım tıpasını 15 ft-lb'ye (20.4 N · m) sıkıştırın" demektedir. Tıpayı, elinizin merkezinin kıvılcım tıpasının ekseninden 9 inç uzağa yerleştiren 10.5 inçlik bir somun anahtarıyla kuruyorsanız, yaklaşık ne kadar kuvvet vermelisiniz? Pound olarak yanıtlayın.



4. **Cisim döndürmek** Orijinden ve A(1, 1, 1) noktasından geçen doğru 3/2 rad/s'lik sabit bir açısal hızla dönmekte olan bir dik cismin dönme eksenidir. *A*'dan orijine baktığımızda dönme saat yönünde gözükmektedir. Cismin *B*(1, 3, 2) konumundaki noktasının **v** süratini bulun.

5. **Determinantler ve düzlemler**

a.
$$\begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix} = 0$$
denkleminin aynı doğru üzerinde olmayan üç $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ve $P_3(x_3, y_3, z_3)$ noktasından geçen düzlemin denklemi olduğunu gösterin.

b.
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
denklemi uzaydaki hangi noktaları tanımlar?

6. **Determinantler ve doğrular**
$$x = a_1 s + b_1, y = a_2 s + b_2, z = a_3 s + b_3, -\infty < s < \infty$$
ve
$$x = c_1 t + d_1, y = c_2 t + d_2, z = c_3 t + d_3, -\infty < t < \infty$$
doğrularının ancak ve yalnız
$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 - d_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 - d_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 - d_3 \end{vmatrix} = 0$$
ise kesişeceklerini veya paralel olacaklarını gösterin.

7. **Paralelkenar** Aşağıdaki şekilde *ABCD* paralelkenarı ve *BD* köşegeninin orta noktası *P* görülmektedir.

a. $\overrightarrow{BD}$'yi $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AD}$ cinsinden ifade edin.

b. $\overrightarrow{AP}$'yi $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AD}$ cinsinden ifade edin.

c. *P*'nin aynı zamanda *AC* köşegeninin de orta noktası olduğunu ispatlayın.

8. Aşağıdaki şekilde, *D, ABC* üçgeninin *AB* kenarının orta noktası ve *E* de *C* ile *B* arasındaki uzaklığın üçte birindedir. *F*'nin *CD* doğru parçasının orta noktası olduğunu göstermek için vektör kullanın.

9. $P_1(x_1, y_1)$'den $ax + by = c$ doğrusuna olan uzaklığın
$$d = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
olduğunu vektör kullanarak gösterin.

10. **a.** $P_1(x_1, y_1, z_1)$'in $Ax + By + Cz = D$ düzlemine uzaklığının
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$
olduğunu göstermek için vektör kullanın.

b. $x + y + z = 3$ ve $x + y + z = 9$ düzlemlerine teğet olan ve merkezi $2x - y = 0$ ile $3x - z = 0$ düzlemleri üzerinde olan küre için bir denklem bulun.

11. **a.** $Ax + By + Cz = D_1$ ve $Ax + By + Cz = D_2$ paralel düzlemleri arasındaki uzaklığın
$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{|A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}|}$$
olduğunu gösterin.

b. $2x + 3y - z = 6$ ile $2x + 3y - z = 12$ düzlemleri arasındaki uzaklığı bulun.

c. (3, 2, –1) noktası iki düzlemden de eşit uzaklıktaysa, $2x - y + 2z = -4$ düzlemine paralel düzlemin denklemini bulun.

d. $x - 2y + z = 3$ düzlemine paralel olan ve 5 birim uzakta bulunan düzlemlerin denklemlerini yazın.

12. *A, B, C* ve *D*'nin ancak ve yalnız $\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}) = 0$ ise, aynı düzlemde bulunacaklarını gösterin.

13. **Bir vektörün bir düzlem üzerine izdüşümü.** *P* uzayda bir düzlem ve **v** bir vektör olsun. **v**'nin *P* düzlemi üzerine izdüşümü, $\text{proj}_P \mathbf{v}$, gayri formel bir şekilde aşağıdaki gibi tanımlanabilir. Güneş ışınlarının P düzlemine normal olacak şekilde geldiğini varsayın. Bu durumda, $\text{proj}_P \mathbf{v}$, **v**' nin *P* üzerindeki "gölgesidir". *P* düzlemi $x + 2y + 6z = 6$ ise ve $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ise, $\text{proj}_P \mathbf{v}$'yi bulun.

14. Aşağıdaki şekilde **z** vektörü *L* doğrusuna ortogonal, **v**, **w** ve **z** vektörleri *L* doğrusu ile eşit bir β açısı yapmaktadır (vektörler sıfır vektörden farklıdır). $|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}|$ olduğunu varsayarak, **w**'yi **v** ve **z** cinsinden bulun.

15. Üçlü vektör çarpımları *Üçlü vektör çarpımları* $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ ve $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ genellikle, bunları bileşenlerinden hesaplama formülleri benzer olduğu halde, eşit değildir:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$$

Her formülün iki tarafını hesaplayıp sonuçları karşılaştırarak, denklemleri aşağıdaki vektörler için doğrulayın.

	u	v	w
a.	$2\mathbf{i}$	$2\mathbf{j}$	$2\mathbf{k}$
b.	$\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$	$2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$	$-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$
c.	$2\mathbf{i}+\mathbf{j}$	$2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$	$\mathbf{i}+2\mathbf{k}$
d.	$\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$	$-\mathbf{i}-\mathbf{k}$	$2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

16. Vektörel ve skaler çarpımlar **u**, **v**, **w** ve **r** herhangi vektörlerse, aşağıdakileri gösterin.

a. $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) + \mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u}) + \mathbf{w}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

b. $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{k})\mathbf{k}$

c. $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{r}) = \begin{vmatrix}\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{r} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}\end{vmatrix}$.

17. Vektörel ve skaler çarpımlar Aşağıdaki formülü ispatlayın veya doğru olmadığını gösterin.

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}))\cdot\mathbf{w} = -|\mathbf{u}|^2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}$$

18. Uygun iki vektörün vektörel çarpımını oluşturarak, aşağıdaki trigonometrik bağıntıyı elde edin.

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

19. Herhangi *a, b, c* ve *d* sayıları için

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$$

olduğunu göstermek için vektör kullanın (*İpucu*: $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ ve $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$ alın).

20. **u** ve **v** vektörlerinin paralel olmadıklarını ve **w** vektörü **v**'ye paralel ve **r** vektörü v'ye ortogonal olmak üzere, $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{r}$ olduğunu varsayın. **w** ve **r**'yi **u** ve **v** cinsinden ifade edin.

21. Herhangi **u** ve **v** vektörleri için, $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ olduğunu gösterin.

22. $\mathbf{w} = |\mathbf{v}|\mathbf{u} + |\mathbf{u}|\mathbf{v}$'nin **u** ile **v** arasındaki açının açıortayı olduğunu gösterin.

23. $|\mathbf{v}|\mathbf{u} + |\mathbf{u}|\mathbf{v}$ ve $|\mathbf{v}|\mathbf{u} - |\mathbf{u}|\mathbf{v}$'nin ortogonal olduğunu gösterin.

24. Nokta çarpımı pozitif definit'tir. Vektörlerin nokta çarpımının *pozitif definit* olduğunu gösterin; yani her **u** vektörü için, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \geq 0$ olduğunu ve ancak ve yalnız $\mathbf{u} = 0$ ise $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0$ olduğunu gösterin.

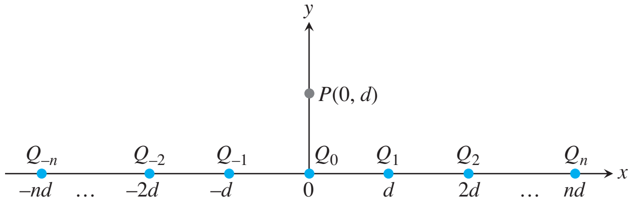
25. Nokta kütleler ve gravitasyon *P* ve *Q*, kütleleri sırasıyla *M* ve *m* olan (nokta) kütleler, **r** vektörü *P*'den *Q*'ya giden vektör ve *G* evrensel gravitasyon sabiti olmak üzere, Fizikteki gravitasyon yasası, *P*'nin

$$\mathbf{F} = \frac{GMm\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

kuvvetiyle *Q*'ya çekildiğini söyler. Dahası, $Q_1, \ldots, Q_k$, kütleleri $m_1, \ldots, m_k$ olan (nokta) kütlelerse, bütün Qi'lerden dolayı *P*'ye etkiyen kuvvet, $\mathbf{r}_i$ vektörü *P*'den Q_i'ye giden vektör olmak üzere,

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{k}\frac{GMm_i}{|\mathbf{r}_i|^3}\mathbf{r}_i$$

dir.



a. *M* kütleli *P* noktası koordinat düzleminde, $(0, d)$, $d > 0$ noktasında bulunsun. $i = -n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n$ için, Q_i $(id, 0)$ noktasında bulunsun ve kütlesi mi olsun. *P* üzerindeki bütün Q_i'lerden doğan gravitasyonel kuvvetin büyüklüğünü bulun.

b. $n \to \infty$ iken *P*'nin üzerindeki kuvvetin büyüklüğünün limiti sonlu mudur? Neden veya neden değildir?

26. Rölativistik toplamlar Einstein'ın özel görelik teorisi, kabaca, bir referans çerçevesine (koordinat sistemi) göre, maddesel hiçbir nesnenin ışık hızı c'den daha hızlı gidemeyeceğini söyler. Dolayısıyla, $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ olmak üzere iki hız ise, $|\vec{x}| < c$ ve $|\vec{y}| < c$ 'nin **rölativistik toplamı** $\vec{x}\oplus\vec{y}$'nin uzunluğu *c*'den küçük olmalıdır. Einstein'ın özel görelik teorisi

$$\vec{x}\oplus\vec{y} = \frac{\vec{x}+\vec{y}}{1+\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{c^2}} + \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\gamma_x}{\gamma_x+1}\cdot\frac{\vec{x}\times(\vec{x}\times\vec{y})}{1+\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{c^2}}$$

olmak üzere

$$\gamma_x = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{x}}{c^2}}}$$

olduğunu söyler. $|\vec{x}| < c$ ve $|\vec{y}| < c$ ise, $|\vec{x}\oplus\vec{y}| < c$ olduğu gösterilebilir. Bu alıştırma iki özel durumla ilgilenir.

a. $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ ortogo*nal ve* $|\vec{x}| < c$, $|\vec{y}| < c$ *ise,* $|\vec{x}\oplus\vec{y}| < c$ *olduğunu ispatlayın.*

b. *$\vec{x}$ ve $\vec{y}$ paralel ve $|\vec{x}| < c$, $|\vec{y}| < c$ ise, $|\vec{x}\oplus\vec{y}| < c$ olduğunu ispatlayın.*

c. $\lim_{c\to\infty}\vec{x}\oplus\vec{y}$ 'yi hesaplayın.

Bölüm 12 Teknoloji Uygulama Projeleri

Mathematica /Maple Module

Vektörleri, Doğruları Temsil Etmek ve Uzaklıklar Bulmak İçin Kullanmak

Bölüm I ve II: Doğruları vektörler olarak yorumlamanın avantajlarını öğrenin.

Bölüm III: Bir noktadan bir doğruya uzaklık bulmak için vektörler kullanın.

Mathematica /Maple Module

Üç Boyuttaki Bir Sahneyi İki Boyutlu Bir Tuval Üzerine Yerleştirmek

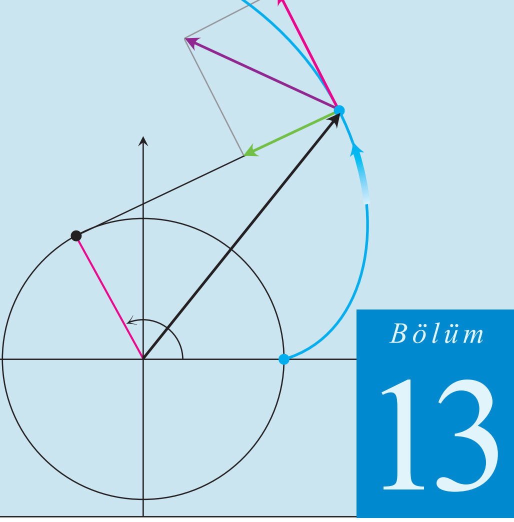
İki boyutlu bir görüntü elde etmek için uzayda düzlemler kavramını kullanın.

Mathematica /Maple Module

Üç Boyutta Çizime Başlamak

Bölüm I : Grafikler ve denklemler üretmek için doğruların ve düzlemlerin vektör tanımlarını kullanın ve tek bir doğrunun denklemlerinin farklı formlarını karşılaştırın.

Bölüm II: Kapalı olarak tanımlı fonksiyonları



Bölüm 13

Vektör–Değerli Fonksiyonlar ve Uzayda Hareket

GİRİŞ Bir cisim uzayda ilerlerken, cismin koordinatlarını zamanın fonksiyonları olarak veren $x = f(t)$, $y = g(t)$ ve $z = h(t)$ denklemleri cismin hareketinin ve izlediği yolun parametrik denklemleri olarak görev görürler. Vektör gösterimiyle, bunları cismin konumunu zamanın bir vektör fonksiyonu olarak veren tek bir $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ denklemine toplayabiliriz. xy-düzleminde hareket eden bir cisim için $h(t)$ bileşeni her zaman için sıfırdır (yani, özdeş olarak sıfır).

Bu bölümde, hareket eden cisimlerin izlediği yolları, hızlarını ve ivmelerini incelemek için analizi kullanılacağız. İlerlerken, çalışmalarımızın mermilerin, gezegenlerin ve uyduların izlediği yollar ve hareketleri hakkındaki standart soruları nasıl yanıtladığını göreceğiz. Son bölümde, yeni vektör analizini Newton'un hareket ve gravitasyon yasalarından Kepler'in gezegen hareketi yasalarını türetmekte kullanacağız.

13.1 Vektör Fonksiyonlar

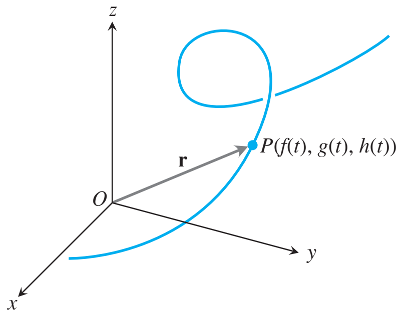
Bir parçacık bir I zaman aralığında uzayda ilerliyorsa, parçacığın koordinatlarını I'da tanımlanmış fonksiyonlar olarak düşünürüz:

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t), \qquad t \text{ P } I \tag{1}$$

$(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$, t P I noktaları, uzayda parçacığın **yolu** dediğimiz **eğriyi** oluştururlar. (1) Denklemindeki fonksiyonlar ve aralık eğriyi **parametrize** eder. Uzaydaki bir eğri de vektör formunda temsil edilebilir. Orijinden parçacığın t anındaki **konumu** olan $P(f(t), g(t), h(t))$'ye giden

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \tag{2}$$

vektörü parçacığın **konum vektörüdür** (Şekil 13.1). f, g ve h fonksiyonları konum vektörünün **bileşen fonksiyonları (bileşenleri)**dir. Parçacığın yolunu I zaman aralığı boyunca **r'nin izlediği eğri** olarak düşünürüz. Şekil 13.2 bir bilgisayar grafik programı tarafından üretilmiş birkaç uzay eğrisi göstermektedir. Bu grafikleri el ile çizmek kolay olmayacaktı.

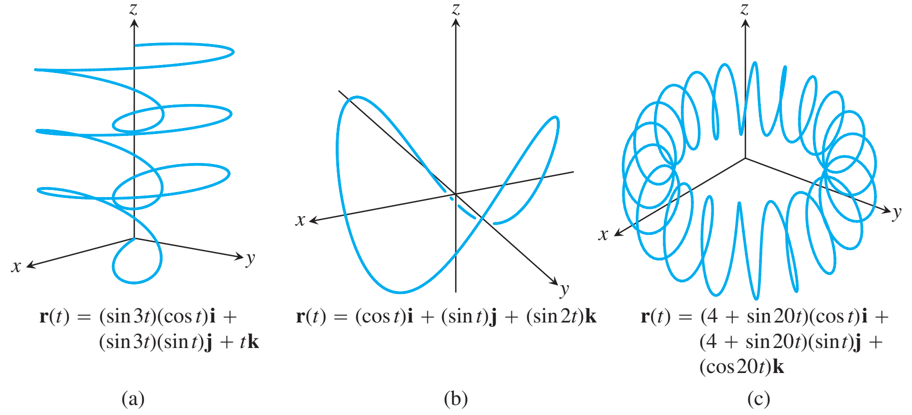


ŞEKİL 13.1 Uzayda hareket eden bir parçacığın konum vektörü $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ zamanın bir fonksiyonudur.

(2) denklemi $\mathbf{r}$'yi I aralığındaki reel t değişkeninin bir vektör fonksiyonu olarak tanımlar. Daha genel olarak, bir D tanım kümesi üzerinde bir **vektör fonksiyon** veya **vektör değerli fonksiyon** D'deki her elemana uzayda bir vektör karşı getiren bir kuraldır.

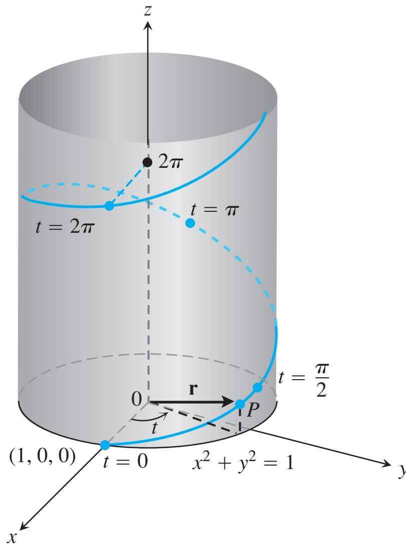
Şimdilik, tanım kümeleri, bir uzay eğrisi üreten reel sayı aralıkları olacaktır. Sonra, Bölüm 16'da, tanım kümeleri düzlemde bölgeler olacaktır.

Bu durumda, vektör fonksiyonları uzayda yüzeyler temsil edecektir. Düzlemde veya uzayda bir tanım bölgesi üzerindeki vektör fonksiyonları, bir akışkanın akışını, gravitasyon alanlarını ve elektromanyetik olayları incelemede önemli rol oynayan "vektör alanları" kavramına yol açar. Vektör alanlarını ve uygulamalarını Bölüm 16'da inceliyoruz.



ŞEKİL 13.2 Bilgisayarla üretilmiş uzay eğrileri $\mathbf{r}(t)$ konum vektörleri ile tanımlanmıştır

Vektör fonksiyonlardan ayırmak için, reel değerli fonksiyonlara **skaler fonksiyonlar** diyeceğiz. $\mathbf{r}$'nin bileşenleri t'nin skaler fonksiyonlarıdır. Bileşen fonksiyonlarını vererek bir vektör değerli fonksiyonu tanımladığımızda, vektör fonksiyonun tanım kümesinin bileşenlerin ortak tanım kümesi olduğunu varsayacağız.



ŞEKİL 13.3 $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ helisinin üst kısmı (Örnek 1).

ÖRNEK 1 Bir Helisi Çizmek

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

vektör fonksiyonunu çizin.

Çözüm

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

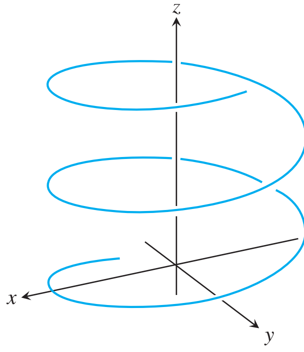
vektör fonksiyonu her reel t değerleri için tanımlıdır. $\mathbf{r}$'nin izlediği eğri, $x^2 + y^2 = 1$ dairesel silindirinin çevresine sarılan bir helistir ("spiral" anlamına gelen eski Yunanca bir kelimeden gelir) (Şekil 13.3). Eğri silindir üzerinde bulunur, çünkü $\mathbf{r}$'nin $\mathbf{i}$ ve $\mathbf{j}$ bileşenleri, $\mathbf{r}$'nin ucunun x ve y-koordinatları olarak, silindir denklemini sağlarlar:

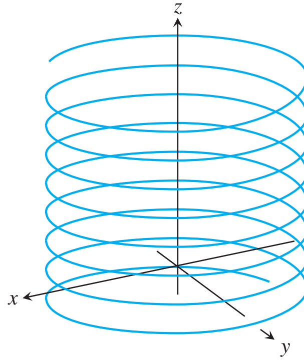
$$x^2 + y^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$$

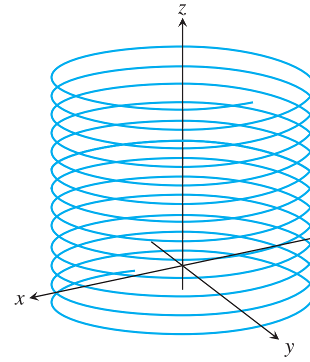
$\mathbf{k}$-bileşeni $z = t$ arttıkça, eğri yükselir. t'nin 2π kadar arttığı her sefer, eğri silindir üzerinde bir dönüşü tamamlar.

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = t$$

denklemleri, $-\infty < t < \infty$ aralığı anlaşılmak üzere, helisi parametrize ederler. Şekil 13.4'te daha başka helisler bulacaksınız. ■







ŞEKİL 13.4 Bilgisayarla çizilmiş helisler.

Limitler ve Süreklilik

Vektör değerli fonksiyonların limitlerini reel değerli fonksiyonların limitlerini tanımladığımız gibi tanımlarız.

> **TANIM** **Vektör Fonksiyonların Llimiti**
>
> $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ bir vektör fonksiyon ve **L** de bir vektör olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısı için,
>
> $$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$$
>
> olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, $t \to t_0$ için **r**'nin **limitinin L** olduğunu söyler ve
>
> $$0 < |t - t_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}| < \epsilon$$
>
> yazarız.

$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1\mathbf{i} + \mathbf{L}_2\mathbf{j} + \mathbf{L}_3\mathbf{k}$ ise, tam olarak

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = L_1, \qquad \lim_{t \to t_0} g(t) = L_2, \qquad \text{ve} \qquad \lim_{t \to t_0} h(t) = L_3$$

iken, $\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$ olur.

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f(t)\right)\mathbf{i} + \left(\lim_{t \to t_0} g(t)\right)\mathbf{j} + \left(\lim_{t \to t_0} h(t)\right)\mathbf{k} \tag{3}$$

denklemi vektör fonksiyonların limitini hesaplamak için pratik bir yol sağlar.

ÖRNEK 2 Vektör Fonksiyonların Limitlerini Bulmak

$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ ise,

$$\begin{aligned}\lim_{t \to \pi/4} \mathbf{r}(t) &= \left(\lim_{t \to \pi/4} \cos t\right)\mathbf{i} + \left(\lim_{t \to \pi/4} \sin t\right)\mathbf{j} + \left(\lim_{t \to \pi/4} t\right)\mathbf{k} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \frac{\pi}{4}\mathbf{k}\end{aligned}$$

olarak bulunur. ■

Vektör fonksiyonlarının sürekliliğini skaler fonksiyonların sürekliliğini tanımladığımız gibi tanımlarız.

TANIM Bir Noktada Süreklilik

Bir $\mathbf{r}(t)$ vektör fonksiyonu, $\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$ ise, tanım aralığının **bir $t = t_0$ noktasında süreklidir**. Tanım aralığının her noktasında sürekli ise, fonksiyon **süreklidir**.

(3) Denkleminden, ancak ve yalnız her bileşen fonksiyonu $t = t_0$ 'da sürekli ise $\mathbf{r}(t)$ fonksiyonunun da aynı noktada sürekli olduğunu görürüz.

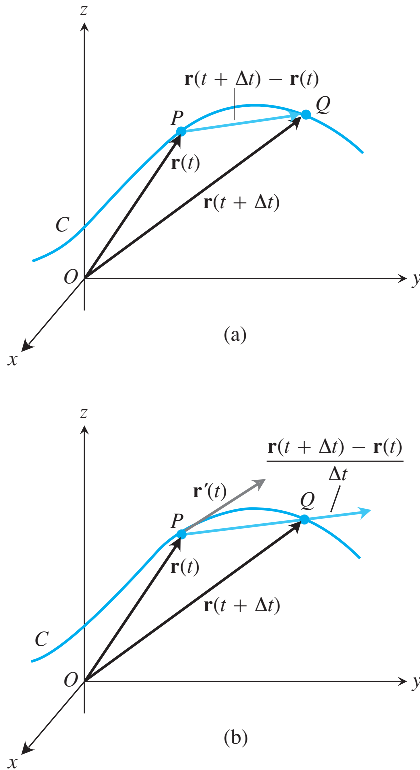
ÖRNEK 3 Uzay Eğrilerinin Sürekliliği

(a) Şekil 13.2 ve 13.4'te gösterilen bütün uzay eğrileri süreklidir çünkü bileşen fonksiyonları t'nin $(-\infty, \infty)$'daki her değeri için süreklidirler.

(b) En büyük tamsayı fonksiyonu $\lfloor t \rfloor$ süreksiz olduğundan

$$\mathbf{g}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + \lfloor t \rfloor \mathbf{k}$$

fonksiyonu her tamsayıda süreksizdir. ■



ŞEKİL 13.5 $\Delta t \to 0$ iken Q noktası C eğrisi boyunca P noktasına yaklaşır. Limitte, $\overrightarrow{PQ}/\Delta t$ vektörü $\mathbf{r}'(t)$ teğet vektörü haline gelir.

Türevler ve Hareket

$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$'nin uzayda bir eğri boyunca ilerleyen bir parçacığın konum vektörü olduğunu, f, g ve h'nin de t'nin türetilebilir fonksiyonları olduklarını varsayın. Bu durumda, parçacığın t ve $t + \Delta t$ zamanlarındaki konumları arasındaki fark

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

olur (Şekil 13.5a). Bileşenler cinsinden,

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{r} &= \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)\\ &= [f(t + \Delta t)\mathbf{i} + g(t + \Delta t)\mathbf{j} + h(t + \Delta t)\mathbf{k}]\\ &\quad - [f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}]\\ &= [f(t + \Delta t) - f(t)]\mathbf{i} + [g(t + \Delta t) - g(t)]\mathbf{j} + [h(t + \Delta t) - h(t)]\mathbf{k}\end{aligned}$$

olur. Δt sıfıra yaklaşırken, aynı anda üç şey olmaktadır. Birincisi, Q eğri üzerinde P'te yaklaşır. İkincisi, PQ kirişi eğriye P'de teğet bir limit durumuna yaklaşır gibidir. Üçüncü olarak, $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ bölümü (Şekil 13.5b)

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} &= \left[\lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{\Delta t\to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}\right]\mathbf{j}\\ &\quad + \left[\lim_{\Delta t\to 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}\right]\mathbf{k}\\ &= \left[\frac{df}{dt}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{dg}{dt}\right]\mathbf{j} + \left[\frac{dh}{dt}\right]\mathbf{k}\end{aligned}$$

limitine yaklaşır. Dolayısıyla, eski deneyimlerimize dayanarak, aşağıdaki tanımı yapabiliriz.

TANIM **Türev**

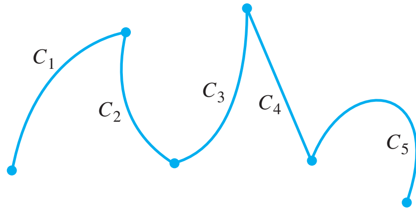
f, g ve h'nin t'de türevleri varsa $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ vektör fonksiyonunun da t'de **türevi** vardır (türetilebilirdir). Türev,

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{df}{dt}\mathbf{i} + \frac{dg}{dt}\mathbf{j} + \frac{dh}{dt}\mathbf{k}$$

vektör fonksiyonudur.

Tanım aralığının her noktasında türetilebilir olan bir $\mathbf{r}$ vektör fonksiyonuna **türetilebilir vektör fonksiyonu** denir. $d\mathbf{r}/dt$ sürekliyse ve asla 0 olmuyorsa, yani f, g ve h'nin aynı anda 0 olmayan sürekli birinci türevleri varsa, $\mathbf{r}$'nin izlediği eğriye **düzgün eğri** denir.

Türev tanımının geometrik önemi Şekil 13.5'te gösterilmiştir. P ve Q noktaların konum vektörleri $\mathbf{r}(t)$ ve $\mathbf{r}(t + \Delta t)$dir, ve vektörü $\overrightarrow{PQ}$ ile temsil edilmiştir. $\Delta t > 0$ için $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ vektörü $\overrightarrow{PQ}$ vektörü ile aynı yönü gösterir. $\Delta t \to 0$ iken bu vektör eğriye P'de teğet olan bir vektöre yaklaşır. $\mathbf{r}'(t)$ vektörü, 0'dan farklı olduğunda, eğriye P'de **teğet** olan vektör olarak tanımlanır. Eğrinin bir $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ noktasındaki **teğet doğrusu**, bu noktadan geçen ve $\mathbf{r}'(t_0)$'a paralel olan doğru olarak tanımlanır. Düzgün bir eğride, eğrinin her noktasında sürekli olarak dönen bir teğetinin varlığını garantilemek için $d\mathbf{r}/dt \neq \mathbf{0}$ olmasını isteriz. Düzgün bir eğride keskin köşeler ve sivri uçlar bulunmaz.



ŞEKİL 13.6 Sürekli bir şekilde uç uca birleştirilmiş beş düzgün eğriden oluşturulmuş parçalı olarak düzgün bir eğri.

Sonlu sayıda düzgün eğrinin sürekli bir şekilde birleştirilmesiyle oluşturulmuş bir eğriye **parçalı olarak düzgün** denir (Şekil 13.6).

Bir kere daha Şekil 13.5'e bakın. Şekli pozitif Δt için çizdik, dolayısıyla $\Delta\mathbf{r}$ ileriyi, hareketin yönünü gösterir. $\Delta\mathbf{r}$ ile aynı yönde olan $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ vektörü de ileriyi işaret eder. Δt negatif olsaydı, $\Delta\mathbf{r}$ geriyi, hareket yönünün tersini gösterecekti. Ancak, $\Delta\mathbf{r}$'nin negatif bir skaler katı olan $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ bölümü yine ileriyi gösterecekti. $\Delta\mathbf{r}$ nereyi gösterirse göstersin, $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ ileriyi gösterir ve $d\mathbf{r}/dt = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\mathbf{r}/\Delta t$ vektörünün de, $\mathbf{0}$'dan farklı olduğunda, aynısını yapmasını bekleriz. Bu, $d\mathbf{r}/dt$ türevini tam da bir parçacığın hızını tanımlamak için istediğimiz şey olduğunu gösterir. Hareket yönünü işaret eder ve konumun zamana göre değişim oranını verir. Düzgün bir eğri için, hız asla sıfır olmaz; parçacık durmaz veya yön değiştirmez.

TANIMLAR **Hız, Yön, Sürat, İvme**

$\mathbf{r}$, uzayda düzgün bir eğri boyunca ilerleyen bir parçacığın konum vektörüyse,

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

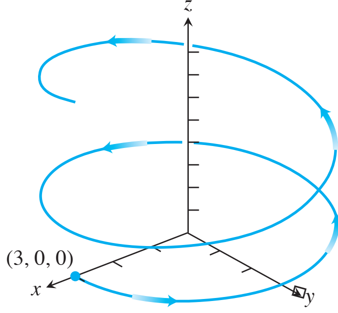
parçacığın, eğriye teğet olan **hız vektörü**dür. Herhangi bir t anında, $\mathbf{v}$'nin yönü **hareketin yönü**, $\mathbf{v}$'nin büyüklüğü parçacığın **sürati** ve $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ vektörü, varsa, parçacığın **ivme vektörü**dür. Kısaca,

1. Hız, konumun türevidir: $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$.
2. Sürat hızın büyüklüğüdür: Sürat $= |\mathbf{v}|$.
3. İvme hızın türevidir: $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$.
4. $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ vektörü hareketin t anındaki yönüdür.

Hareket eden bir parçacığın hızını süratinin ve yönünün bir çarpımı olarak ifade edebiliriz:

$$\text{Hız} = |\mathbf{v}|\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) = (\text{sürat})(\text{yön})$$

Bölüm 12.5, Örnek 4'te hız'ın bu ifadesinin konumlandırmada, örneğin, uzayda bir doğru boyunca hareket eden bir helikopterin konumu, kullanışlı olduğunu gördük. Şimdi, (doğrusal olmayan) bir uzay eğrisi üzerinde hareket eden bir cisim örneğine bakalım.



ŞEKİL 13.7 Konum vektörü $\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ olan asılı planörün yolu (Örnek 4).

ÖRNEK 4 Asılı Bir Planörün Uçuşu

Asılı bir planördeki bir kişi, konum vektörü $\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ olan bir yol üzerinde, hızla yükselen hava nedeniyle helezon çizerek yükselmektedir. Yol (Bölüm 13.4'te göreceğiniz gibi bir helis *olmasa* da) bir helise benzemektedir ve Şekil 13.7'de $0 \le t \le 4\pi$ için gösterilmiştir. Aşağıda istenenleri bulun.

(a) hız ve ivme vektörleri

(b) planörün herhangi bir t anındaki sürati

(c) varsa, cismin ivmesinin hızına ortogonal olduğu zamanlar.

Çözüm

(a) $\mathbf{r} = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(3\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -(3\cos t)\mathbf{i} - (3\sin t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

(b) sürat **v**'nin büyüklüğüdür:

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + (2t)^2}$$
$$= \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 4t^2}$$
$$= \sqrt{9 + 4t^2}$$

planör yolu üzerinde yükseldikçe daha hızlı hareket eder.

(c) **v** ve **a**'nın ortogonal olduğu zamanları bulmak için

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = 9\sin t\cos t - 9\cos t\sin t + 4t = 4t = 0$$

olmasını sağlayan t değerlerini ararız.

Böylece, ivme vektörünün **v**'ye dik olduğu tek an $t = 0$'dır. Bir yol boyunca haraketin ivmesini daha detaylı olarak Bölüm 13.5'te inceleyeceğiz. Orada, ivme vektörünün, yolun doğal eğilimini ve hız vektörünü içeren belirli bir düzlemden dışarı kıvrılma eğilimini nasıl gösterdiğini keşfedeceğiz. ■

Türev Alma Kuralları

Vektör fonksiyonların türevleri bileşen bileşen alınabileceğinden, vektör fonksiyonların türev kuralları skaler fonksiyonların türev alma konularıyla aynı formdadır.

Vektör Fonksiyonlar İçin Türev Alma Kuralları
u ve **v** t'nin türetilebilir vektör fonksiyonları, C bir sabit vektör, c herhangi bir sabit ve f türetilebilir herhangi bir skaler fonksiyon olsun.

1. *Sabit Fonksiyon Kuralı:* $\frac{d}{dt}\mathbf{C} = \mathbf{0}$

2. *Skalerle Çarpım Kuralı:* $\frac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$

$\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$

3. *Toplam Kuralı:* $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

4. *Fark Kuralı:* $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) - \mathbf{v}'(t)$

5. *Nokta Çarpım Kuralı:* $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$

6. *Vektörel Çarpım Kuralı:* $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$

7. *Zincir Kuralı:* $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$

Vektörel Çarpım Kuralını kullanırken, çarpanların sırasını korumayı unutmayın. Eğer **u** denklemin sol tarafında başta bulunuyorsa, sağda da başta olmalıdır, yoksa işaretler yanlış olur.

Çarpım kurallarını ve Zincir kurallarını ispatlayacağız, fakat sabitler, skaler katlar, toplamlar ve farklarla ilgili kuralları alıştırmalara bırakacağız.

Nokta Çarpım Kuralının İspatı

$$\mathbf{u} = u_1(t)\mathbf{i} + u_2(t)\mathbf{j} + u_3(t)\mathbf{k}$$

ve

$$\mathbf{v} = v_1(t)\mathbf{i} + v_2(t)\mathbf{j} + v_3(t)\mathbf{k}$$

olduğunu varsayın. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= \frac{d}{dt}(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) \\ &= \underbrace{u_1' v_1 + u_2' v_2 + u_3' v_3}_{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}} + \underbrace{u_1 v_1' + u_2 v_2' + u_3 v_3'}_{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'}\end{aligned}$$

olur. ■

Vektörel Çarpım Kuralının ispatı İspatı, sakler fonksiyonların çarpım kuralı üzerine modelleriz. Türev tanımına göre,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{u}(t+h) \times \mathbf{v}(t+h) - \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)}{h}$$

olur.

Bu kesri **u** ile **v**'nin türevlerinin farklar bölümünü içeren eşdeğer bir kesre çevirmek için, paya $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t+h)$ ekler ve çıkarırız. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\
&\quad = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{u}(t+h) \times \mathbf{v}(t+h) - \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t+h) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t+h) - \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)}{h} \\
&\quad = \lim_{h \to 0} \left[\frac{\mathbf{u}(t+h) - \mathbf{u}(t)}{h} \times \mathbf{v}(t+h) + \mathbf{u}(t) \times \frac{\mathbf{v}(t+h) - \mathbf{v}(t)}{h}\right] \\
&\quad = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{u}(t+h) - \mathbf{u}(t)}{h} \times \lim_{h \to 0} \mathbf{v}(t+h) + \lim_{h \to 0} \mathbf{u}(t) \times \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+h) - \mathbf{v}(t)}{h}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemlerin sonuncusu gerçeklenir, çünkü iki vektör fonksiyonun vektörel çarpımının limiti, varsa, limitlerinin vektörel çarpımıdır (Alıştırma 52). h sıfıra yaklaşırken, $\mathbf{v}(t+h)$ $\mathbf{v}(t)$'ye yaklaşır, çünkü **v**, t'de türevlenebildiği için, t'de süreklidir (Alıştırma 53). İki kesir de $d\mathbf{u}/dt$ ve $d\mathbf{v}/dt$'nin t'deki değerlerine yaklaşırlar. Kısaca,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

olur. ■

Cebirsel bir uygunluk olarak, bazen bir c skaleri ile bir **v** vektörünün çarpımını $c\mathbf{v}$ yerine vc olarak yazarız. Bu, örneğin, $s = f(t)$ olmak üzere, Zincir kuralını tanıdığımız bir şekilde yazmamıza izin verir:

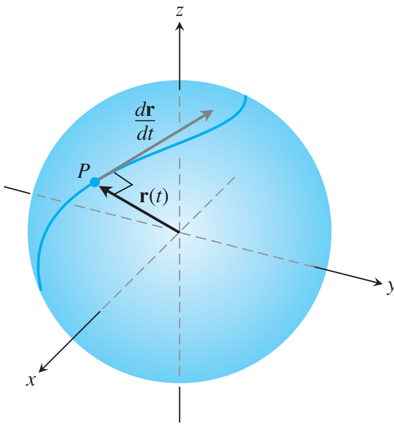
$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Zincir Kuralının ispatı $\mathbf{u}(s) = a(s)\mathbf{i} + b(s)\mathbf{j} + c(s)\mathbf{k}$'nin s'nin türetilebilir bir vektör fonksiyonu olduğunu ve $s = f(t)$'nin de başka bir t değişkeninin türetilebilir bir fonksiyonu olduğunu varsayın. Bu durumda, a, b ve c de t'nin türetilebilir fonksiyonlarıdır ve türetilebilir reel fonksiyonlar için Zincir kuralı

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(s)] &= \frac{da}{dt}\mathbf{i} + \frac{db}{dt}\mathbf{j} + \frac{dc}{dt}\mathbf{k} \\
&= \frac{da}{ds}\frac{ds}{dt}\mathbf{i} + \frac{db}{ds}\frac{ds}{dt}\mathbf{j} + \frac{dc}{ds}\frac{ds}{dt}\mathbf{k} \\
&= \frac{ds}{dt}\left(\frac{da}{ds}\mathbf{i} + \frac{db}{ds}\mathbf{j} + \frac{dc}{ds}\mathbf{k}\right) \\
&= \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{u}}{ds} \\
&= f'(t)\mathbf{u}'(f(t)) \qquad s = f(t)
\end{aligned}$$

verir. ■

Sabit Uzunluklu Vektör Fonksiyonlar



ŞEKİL 13.8 Bir parçacık, **r** konum vektörü zamanın türetilebilir bir fonksiyonu olacak şekilde bir küre üzerinde dolaşıyorsa, $\mathbf{r} \cdot (d\mathbf{r}/dt) = 0$ olur.

Merkezi orijinde olan bir küre üzerinde hareket eden bir parçacığı izlerken (Şekil 13.8), konum vektörünün, kürenin yarıçapına eşit olan sabit bir uzunlukta olduğunu görürüz. Hareket yoluna teğet olan $d\mathbf{r}/dt$ hız vektörü küreye teğettir ve dolayısıyla **r**'ye dik olur. Bu durum sabit uzunluklu her türetilebilir vektör fonksiyonu için geçerlidir: Vektör ve birinci türevi ortogonaldir. Uzunluk sabitken, fonksiyondaki değişiklik sadece yönde meydana gelen bir değişikliktir ve yön değişiklikleri dik açılarla meydana gelir. Bu sonucu doğrudan hesaplama ile de elde edebiliriz:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) &= c^2 && |\mathbf{r}(t)| = c \text{ sabittir} \\
\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)] &= 0 && \text{İki tarafı türetin} \\
\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) &= 0 && \mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t) \text{ ile 5 Kuralı} \\
2\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) &= 0
\end{aligned}$$

elde ederiz. ■

$\mathbf{r}'(t)$ ve $\mathbf{r}(t)$ vektörleri ortogonaldir çünkü skaler çarpımları 0 dır. Özet olarak,

> $\mathbf{r}$, t'nin sabit uzunluklu türetilebilir bir vektör fonksiyonu ise,
>
> $$\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0 \qquad (4)$$
>
> dır.

Bu gözlemi Bölüm 13.4'te sıkça kullanacağız.

ÖRNEK 5 Denklem (4)'ü Desteklemek

$\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}$ vektörünün uzunluğunun sabit olduğunu ve türevine ortogonal olduğunu gösterin.

Çözüm

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}(t)| = \sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sin t \cos t - \sin t \cos t = 0$$

■

Vektör Fonksiyonların İntegralleri

Bir I aralığının her noktasında $d\mathbf{R}/dt = \mathbf{r}$ türetilebilir $\mathbf{R}(t)$ vektör fonksiyonu, I aralığındaki bir $\mathbf{r}(t)$ vektör fonksiyonunun **ters türevi**dir. $\mathbf{R}$, I aralığında $\mathbf{r}$'nin bir ters türeviyse, her seferinde bir bileşenle çalışarak, $\mathbf{r}$'nin I aralığındaki her ters türevinin, sabir bit $\mathbf{C}$ vektörü için $\mathbf{R} + \mathbf{C}$ şeklinde olduğu gösterilebilir (Alıştırma 56). $\mathbf{r}$'nin I'daki bütün ters türevlerinin kümesi $\mathbf{r}$'nin I'daki **belirsiz integrali**dir.

> **TANIM** **Belirsiz İntegral**
>
> $\mathbf{r}$'nin t'ye göre **belirsiz integrali**, $\mathbf{r}$'nin bütün ters türevlerinin kümesidir ve $\int \mathbf{r}(t)\, dt$ ile gösterilir. $\mathbf{R}$, $\mathbf{r}$'nin herhangi bir ters türeviyse,
>
> $$\int \mathbf{r}(t)\, dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{C}.$$
>
> olur.

Belirsiz integraller için bildiğimiz aritmetik kuralları geçerlidir.

ÖRNEK 6 Belirsiz İntegralleri Bulmak

$$\int ((\cos t)\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2t\mathbf{k})\, dt = \left(\int \cos t\, dt\right)\mathbf{i} + \left(\int dt\right)\mathbf{j} - \left(\int 2t\, dt\right)\mathbf{k} \qquad (5)$$

$$= (\sin t + C_1)\mathbf{i} + (t + C_2)\mathbf{j} - (t^2 + C_3)\mathbf{k} \qquad (6)$$

$$= (\sin t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k} + \mathbf{C} \qquad \mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} - C_3\mathbf{k}$$

Skaler fonksyonların integrasyonunda olduğu gibi, (5) ve (6) denklemlerindeki adımları atlamanızı ve hemen son şekline gitmenizi öneririz. Her bileşenin bir ters türevini bulun ve sona bir sabit vektör ekleyin. ■

Vektör fonksiyonların belirli integralleri bileşenleri cinsinden tanımlanır.

TANIM Belirli İntegral

$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$'nin bileşenleri $[a, b]$'de integre edilebiliyorsa, $\mathbf{r}$ de integre edilebilir ve $\mathbf{r}$'nin a'dan b'ye **belirli integrali** şu şekildedir:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\mathbf{k}.$$

ÖRNEK 7 Belirli İntegralleri Hesaplamak

$$\begin{aligned}\int_0^\pi ((\cos t)\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2t\mathbf{k})\,dt &= \left(\int_0^\pi \cos t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_0^\pi dt\right)\mathbf{j} - \left(\int_0^\pi 2t\,dt\right)\mathbf{k} \\ &= \Big[\sin t\Big]_0^\pi \mathbf{i} + \Big[t\Big]_0^\pi \mathbf{j} - \Big[t^2\Big]_0^\pi \mathbf{k} \\ &= [0-0]\mathbf{i} + [\pi - 0]\mathbf{j} - [\pi^2 - 0^2]\mathbf{k} \\ &= \pi\mathbf{j} - \pi^2\mathbf{k}\end{aligned}$$ ■

Analizin Temel Teoremi, sürekli vektör fonksiyonları için

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

olduğunu söyler. Burada $\mathbf{R}$ vektör fonksiyonu $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$ (Alıştırma 57) olacak şekilde $\mathbf{r}$'nin herhangi bir ters türevidir.

ÖRNEK 8 Bir Planörün Uçuşu, Tekrar

Örnek 4'teki planorün yolunu bilmediğimizi, sadece $\mathbf{a}(t) = -(3\cos t)\mathbf{i} - (3\sin t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ivme vektörünü bildiğimizi varsayalım. Ayrıca, başlangıçta ($t = 0$'da) planörün $(3, 0, 0)$ noktasından $\mathbf{v}(0) = 3\mathbf{j}$ hızı ile harekete başladığını biliyoruz. Planörün konumunu t'nin bir fonksiyonu olarak bulun

Çözüm Amacımız,

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -(3\cos t)\mathbf{i} - (3\sin t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad \text{Diferansiyel denklemi ve}$$

$$\mathbf{v}(0) = 3\mathbf{j} \text{ ve } \mathbf{r}(0) = 3\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \quad \text{başlangıç koşulları}$$

bilindiğine göre, $\mathbf{r}(t)$'yi bulmaktır. Diferansiyel denklemin her iki tarafının t'ye göre integralini alarak

$$\mathbf{v}(t) = -(3\cos t)\mathbf{i} - (3\sin t)\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k} + \mathbf{C}_1$$

buluruz. $\mathbf{v}(0) = 3\mathbf{j}$'i bulmak için $\mathbf{C}_1$'yi kullanırız:

$$\begin{aligned}3\mathbf{j} &= -(3\sin 0)\mathbf{i} + (3\cos 0)\mathbf{j} + (0)\mathbf{k} + \mathbf{C}_1 \\ 3\mathbf{j} &= 3\mathbf{j} + \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_1 &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Zamanın bir fonksiyonu olarak, planörün hızı

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t) = -(3\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

dır. Bu son diferansiyel denklemin her iki tarafının integralini alınarak

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} + \mathbf{C}_2$$

bulunur. Şimdi, $\mathbf{C}_2$'yi bulmak için $\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{i}$ başlangıç koşulunu kullanırız:

$$3\mathbf{i} = (3\cos 0)\mathbf{i} + (3\sin 0)\mathbf{j} + (0^2)\mathbf{k} + \mathbf{C}_2$$
$$3\mathbf{i} = 3\mathbf{i} + (0)\mathbf{j} + (0)\mathbf{k} + \mathbf{C}_2$$
$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}.$$

Zamanın bir fonksiyonu olarak, planörün konumu

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}.$$

dır. Bu, planörün Örnek 4'ten bildiğimiz ve Şekil 13.7'de gösterilen yoludur.

Not: Bu örnekte $\mathbf{C}_1$ ve $\mathbf{C}_2$ integrasyon sabit vektörlerinin ikisinin de 0 olması özel bir durumdur. Alıştırma 31 ve 32, bu sabitler için farklı sonuçlar vermektedir. ■

ALIŞTIRMALAR 13.1

xy-Düzleminde Hareket

1–4 alıştırmalarında, $\mathbf{r}(t)$ xy-düzlemindeki bir parçacığın t anındaki konumudur. Grafiği parçacığın yolu olan, x ve y cinsinden bir denklem bulun. Sonra, verilen t değerlerinde parçacığın hız ve ivme vektörlerini bulun.

1. $\mathbf{r}(t) = (t+1)\mathbf{i} + (t^2-1)\mathbf{j}, \quad t = 1$
2. $\mathbf{r}(t) = (t^2+1)\mathbf{i} + (2t-1)\mathbf{j}, \quad t = 1/2$
3. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + \frac{2}{9}e^{2t}\mathbf{j}, \quad t = \ln 3$
4. $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (3\sin 2t)\mathbf{j}, \quad t = 0$

5–8 alıştırmaları xy-düzleminde değişik eğrilerde ilerleyen parçacıkların konum vektörlerini bulun. Her durumda, belirtilen zamanlarda parçacığın hız ve ivme vektörlerini bulun ve bunları eğrinin üzerindeki vektörler olarak çizin.

5. **$x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerinde hareket**

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}; \quad t = \pi/4 \text{ ve } \pi/2$$

6. **$x^2 + y^2 = 16$ çemberi üzerind hareket**

$$\mathbf{r}(t) = \left(4\cos\frac{t}{2}\right)\mathbf{i} + \left(4\sin\frac{t}{2}\right)\mathbf{j}; \quad t = \pi \text{ ve } 3\pi/2$$

7. **$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$ sikloidi üzerinde hareket**

$$\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}; \quad t = \pi \text{ ve } 3\pi/2$$

8. **$y = x^2 + 1$ parabolü üzerinde hareket**

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j}; \quad t = -1, 0, \text{ ve } 1$$

Uzayda Hız ve Hareket

9–14 alıştırmalarında, $\mathbf{r}(t)$ uzaydaki bir parçacığın t anındaki konumudur. Parçacığın hız ve ivme vektörlerini bulun. Sonra verilen t anında parçacığın süratini ve yönünü bulun. Parçacığın o andaki hızını süratinin ve yönünün bir çarpımı olarak yazın.

9. $\mathbf{r}(t) = (t+1)\mathbf{i} + (t^2-1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad t = 1$
10. $\mathbf{r}(t) = (1+t)\mathbf{i} + \frac{t^2}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{t^3}{3}\mathbf{k}, \quad t = 1$
11. $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}, \quad t = \pi/2$
12. $\mathbf{r}(t) = (\sec t)\mathbf{i} + (\tan t)\mathbf{j} + \frac{4}{3}t\mathbf{k}, \quad t = \pi/6$
13. $\mathbf{r}(t) = (2\ln(t+1))\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}, \quad t = 1$
14. $\mathbf{r}(t) = (e^{-t})\mathbf{i} + (2\cos 3t)\mathbf{j} + (2\sin 3t)\mathbf{k}, \quad t = 0$

15–18 alıştırmalarında, $\mathbf{r}(t)$ uzaydaki bir parçacığın t anındaki konumudur. $t = 0$ anında parçacığın hız ve ivme vektörleri arasındaki açıyı bulun.

15. $\mathbf{r}(t) = (3t + 1)\mathbf{i} + \sqrt{3}t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

16. $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t - 16t^2\right)\mathbf{j}$

17. $\mathbf{r}(t) = (\ln(t^2 + 1))\mathbf{i} + (\tan^{-1} t)\mathbf{j} + \sqrt{t^2 + 1}\,\mathbf{k}$

18. $\mathbf{r}(t) = \frac{4}{9}(1 + t)^{3/2}\mathbf{i} + \frac{4}{9}(1 - t)^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{3}t\mathbf{k}$

19 ve 20 alıştırmalarında, $\mathbf{r}(t)$ uzaydaki bir parçacığın t anındaki konumudur. Verilen zaman aralığında hız ve ivmenin ortogonal olduğu zaman veya zamanları bulun.

19. $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

20. $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (\cos t)\mathbf{k}, \quad t \ge 0$

Vektör Değerli Fonksiyonları İntegre Etmek

21–26 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

21. $\int_0^1 [t^3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}]\,dt$

22. $\int_1^2 \left[(6 - 6t)\mathbf{i} + 3\sqrt{t}\mathbf{j} + \left(\frac{4}{t^2}\right)\mathbf{k}\right]dt$

23. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} [(\sin t)\mathbf{i} + (1 + \cos t)\mathbf{j} + (\sec^2 t)\mathbf{k}]\,dt$

24. $\int_0^{\pi/3} [(\sec t \tan t)\mathbf{i} + (\tan t)\mathbf{j} + (2 \sin t \cos t)\mathbf{k}]\,dt$

25. $\int_1^4 \left[\frac{1}{t}\mathbf{i} + \frac{1}{5 - t}\mathbf{j} + \frac{1}{2t}\mathbf{k}\right]dt$

26. $\int_0^1 \left[\frac{2}{\sqrt{1 - t^2}}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{1 + t^2}\mathbf{k}\right]dt$

Vektör Değerli Fonksiyonlar İçin Başlangıç Değer Problemleri

27–32 alıştırmalarındaki başlangıç değer problemlerinden $\mathbf{r}$'yi t'nin bir vektör fonksiyonu olarak çözün.

27. Diferansiyel denklem : $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -t\mathbf{i} - t\mathbf{j} - t\mathbf{k}$

Başlangıç koşulu : $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

28. Diferansiyel denklem : $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (180t)\mathbf{i} + (180t - 16t^2)\mathbf{j}$

Başlangıç koşulu : $\mathbf{r}(0) = 100\mathbf{j}$

29. Diferansiyel denklem : $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{3}{2}(t + 1)^{1/2}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \frac{1}{t + 1}\mathbf{k}$

Başlangıç koşulu : $\mathbf{r}(0) = \mathbf{k}$

30. Diferansiyel denklem : $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (t^3 + 4t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$

Başlangıç koşulu : $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

31. Diferansiyel denklem : $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -32\mathbf{k}$

Başlangıç koşulu : $\mathbf{r}(0) = 100\mathbf{k}$ ve

$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=0} = 8\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

32. Diferansiyel denklem : $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

Başlangıç koşulu : $\mathbf{r}(0) = 10\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ ve

$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=0} = \mathbf{0}$

Düzgün Eğrilerin Teğetleri

Konuda bahsedildiği gibi, düzgün bir $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ eğrisinin $t = t_0$'daki teğeti, eğrinin t_0 anındaki hız vektörü $\mathbf{v}(t_0)$'a paralel olan ve $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ noktasından geçen doğrudur. 33–36 alıştırmalarında, verilen $t = t_0$ parametre değerinde eğriye teğet olan doğrunun parametrik denklemlerini bulun.

33. $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (t^2 - \cos t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad t_0 = 0$

34. $\mathbf{r}(t) = (2 \sin t)\mathbf{i} + (2 \cos t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}, \quad t_0 = 4\pi$

35. $\mathbf{r}(t) = (a \sin t)\mathbf{i} + (a \cos t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}, \quad t_0 = 2\pi$

36. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (\sin 2t)\mathbf{k}, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}$

Dairesel Yollarda Hareket

37. Aşağıdaki (a)–(e) denklemlerinin her biri, yolu aynı, yani $x^2 + y^2 = 1$ çemberi, olan bir parçacığın hareketini tanımlar. (a)–(e)'deki her parçacığın yolunun aynı olmasına rağmen, her parçacığın davranışı veya "dinamiği" farklıdır. Her parçacık için aşağıdaki soruları yanıtlayın.

i. Parçacığın sürati sabit midir? Sabitse, bu sabit sürat nedir?

ii. Parçacığın ivme vektörü her zaman hız vektörüne ortogonal midir?

iii. Parçacık çember etrafında, saat yönünde mi, saat yönünün tersine mi hareket eder?

iv. Parçacık harekete (1, 0)'dan mı başlar?

a. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}, \quad t \ge 0$

b. $\mathbf{r}(t) = \cos(2t)\mathbf{i} + \sin(2t)\mathbf{j}, \quad t \ge 0$

c. $\mathbf{r}(t) = \cos(t - \pi/2)\mathbf{i} + \sin(t - \pi/2)\mathbf{j}, \quad t \ge 0$

d. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j}, \quad t \ge 0$

e. $\mathbf{r}(t) = \cos(t^2)\mathbf{i} + \sin(t^2)\mathbf{j}, \quad t \ge 0$

38. Vektör değerli

$$\mathbf{r}(t) = (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \cos t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right) + \sin t\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right)$$

fonksiyonunun, merkezi (2, 2, 1) noktasında olan ve $x + y - 2z = 2$ düzlemi üzerinde bulunan 1 yarıçaplı çember üzerinde hareket eden bir parçacığın hareketini tanımladığını gösterin.

Bir Doğru Üzerinde Hareket

39. $t = 0$ anında, bir parçacık (1, 2, 3) noktasındadır. Düz bir doğru üzerinde (4, 1, 4) noktasına gider, (1, 2, 3)'te sürati 2 ve sabit ivmesi $3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$'dir. Parçacığın t anındaki $\mathbf{r}(t)$ konum vektörünün denklemini bulun.

40. Düz bir doğru üzerinde ilerleyen bir parçacık (1, –1, 2) noktasında gözlenmiştir ve $t = 0$ anına sürati 2'dir. Parçacık (3, 0, 3) noktasına sabit $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ivmesiyle ilerler. **r** anındaki $\mathbf{r}(t)$ konum vektörünü bulun.

Teori ve Örnekler

41. Bir parabol boyunca hareket Bir parçacık $y^2 = 2x$ parabolünün üzerinde soldan sağa doğru saniyede 5 birim sabit süratiyle ilerlemektedir. Parçacığın (2, 2) noktasından geçerkenki hızını bulun.

42. Bir sikloid boyunca hareket Bir parçacık xy-düzlemindeki bir sikloid üzerinde t anındaki konumu

$$\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}$$

olacak şekilde ilerlemektedir.

T **a.** $\mathbf{r}(t)$'yi çizin. Sonuç eğri bir sikloiddir

b. $|\mathbf{v}|$ ve $|\mathbf{a}|$'nın maksimum ve minimum değerlerini bulun. (*İpucu*: Önce $|\mathbf{v}|^2$ ile $|\mathbf{a}|^2$'nin ekstremum değerlerini bulun, sonra karekök alın.)

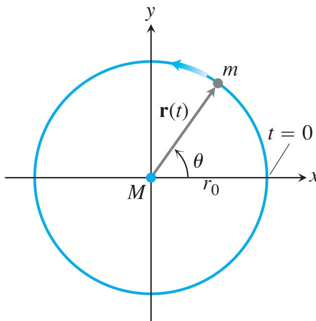
43. Bir elips boyunca hareket Bir parçacık yz-düzlemindeki $(y/3)^2 + (z/2)^2 = 1$ elipsinin üzerinde, t anındaki konumu

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{j} + (2\sin t)\mathbf{k}$$

olacak şekilde ilerlemektedir. $|\mathbf{v}|$ ve $|\mathbf{a}|$'nın maksimum ve minimum değerlerini bulun. (*İpucu*: Önce $|\mathbf{v}|^2$ ile $|\mathbf{a}|^2$'nin ekstremum değerlerini bulun, sonra karekök alın.)

44. Dairesel bir yörüngedeki bir uydu m kütleli bir uydu, sabit **v** süratiyle yarıçaplı (cismin kütle merkezinden itibaren ölçülmüş) M kütleli bir cismin (örneğin Dünya) çevresinde dairesel bir yörüngede dönmektedir. Uydunun yörüngesel periyodu T'yi (bir tam yörünge çizmek için gereken süre) aşağıdaki şekilde bulun.

a. Yörünge düzlemine, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, cismin kütle merkezi orijinde, uydu $t = 0$ anında x-ekseninde olacak ve saat yönünün tersine hareket edecek şekilde bir koordinat sistemi yerleştirin.



$\mathbf{r}(t)$ uydunun t anındaki konum vektörü olsun. $\theta = vt/r_0$ olduğunu ve aşağıdaki ifadeyi gösterin.

$$\mathbf{r}(t) = \left(r_0 \cos \frac{vt}{r_0}\right)\mathbf{i} + \left(r_0 \sin \frac{vt}{r_0}\right)\mathbf{j}.$$

b. Uydunun ivmesini bulun.

c. Newton'un Gravitasyon yasasına göre, uyduya etkiyen kuvvet M yönündedir ve G evrensel yerçekimi sabiti olmak üzere

$$\mathbf{F} = \left(-\frac{GmM}{r_0^2}\right)\frac{\mathbf{r}}{r_0}$$

ile verilir. Newton'un ikinci yasasını, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$'yı kullanarak, $v^2 = GM/r_0$ olduğunu gösterin.

d. Yörüngesel periyot T'nin $vT = 2\pi r_0$'ı sağladığını gösterin.

e. (c) ve (d) şıklarından

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r_0^3$$

olduğunu çıkarın. Yani, dairesel bir yörüngedeki bir uydunun periyodunun karesi, yörünge merkezinden olan uzaklığın kübüyle orantılıdır.

45. **v**, t'nin türetilebilir bir vektör fonksiyonu olsun. Her t için, $\mathbf{v} \cdot (d\mathbf{v}/t) = 0$ ise, $|\mathbf{v}|$'nin sabit olduğunu gösterin.

46. Üçlü skaler çarpımların türevleri

a. **u**, **v** ve **w** t'nin türetilebilir vektör fonksiyonlarıysa, aşağıdaki denklemi doğrulayın.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{w}}{dt} \qquad (7)$$

b. (7)'nın aşağıdaki denkleme denk olduğunu gösterin.

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{du_1}{dt} & \frac{du_2}{dt} & \frac{du_3}{dt} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \frac{dv_1}{dt} & \frac{dv_2}{dt} & \frac{dv_3}{dt} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \frac{dw_1}{dt} & \frac{dw_2}{dt} & \frac{dw_3}{dt} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

(8) denklemi, türetilebilir fonksiyonların 3×3'lük bir determinantının türevinin, her defasında orijinal determinantın bir satırı türetilerek elde edilen üç determinantın toplamı olduğunu söyler. Sonuç her dereceden determinant için geçerlidir.

47. (*Alıştırma 46'nın devamı.*) $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ olduğunu ve f, g ve h'nin üçüncü mertebeye kadar türevlerinin bulunduğunu varsayın. (7) veya (8) denklemini kullanarak

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right) = \mathbf{r}\cdot\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right) \qquad (9)$$

olduğunu gösterin. (*İpucu*: Sol tarafın türevini alın ve çarpımları sıfır olan vektörleri bulun.)

48. Sabit Fonksiyon Kuralı $\mathbf{u}$ değeri $\mathbf{C}$ olan sabit bir vektör fonksiyonsa, $d\mathbf{u}/dt = \mathbf{0}$ olacağını gösterin.

49. Skalerle Çarpım Kuralları

a. $\mathbf{u}$ t'nin türetilebilir bir fonksiyonu ve c herhangi bir reel sayı ise,

$$\frac{d(c\mathbf{u})}{dt} = c\frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

olduğunu gösterin.

b. $\mathbf{u}$ t'nin türetilebilir bir fonksiyonu ve f t'nin türetilebilir skaler bir fonksiyonu ise,

$$\frac{d}{dt}(f\mathbf{u}) = \frac{df}{dt}\mathbf{u} + f\frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

olduğunu gösterin.

50. Toplam ve Fark Kuralları $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ t'nin türetilebilir fonksiyonlarıysa,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

ve

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

olduğunu gösterin.

51. Bir Noktada Süreklilik İçin Bileşen Testi $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ ile tanımlanan $\mathbf{r}$ vektör fonksiyonunun ancak ve yalnız f, g ve h fonksiyonları t_0'da sürekli iseler, $t = t_0$'da sürekli olduğunu gösterin.

52. Vektör fonksiyonların vektörel çarpımlarının limiti $\mathbf{r}_1(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2(t) = g_1(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j} + g_3(t)\mathbf{k}$, $\lim_{t\to t_0} = \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{A}$ ve $\lim_{t\to t_0} = \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{B}$ olduğunu varsayın. Vektörel çarpımlar için determinant formülünü ve skaler fonksiyonlar için Limit Çarpımı Kuralını kullanarak

$$\lim_{t\to t_0}(\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)) = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

olduğunu gösterin.

53. Türetilebilir vektör fonksiyonlar süreklidir $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ $t = t_0$'da türetilebiliyorsa, t_0'da sürekli de olacağını gösterin.

54. İntegre edilebilir vektör fonksiyonların aşağıdaki özelliklerini doğrulayın.

a. *Sabit Skalerle Çarpım Kuralı:*

$$\int_a^b k\mathbf{r}(t)\,dt = k\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt \quad \text{(herhangi bir } k \text{ skaleri)}$$

Negatifler Kuralı,

$$\int_a^b (-\mathbf{r}(t))\,dt = -\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt,$$

$k = -1$ alınarak elde edilir.

b. *Toplam ve Fark Kuralları:*

$$\int_a^b (\mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t))\,dt = \int_a^b \mathbf{r}_1(t)\,dt \pm \int_a^b \mathbf{r}_2(t)\,dt$$

c. *Sabit Vektörler Çarpım Kuralları:*

$$\int_a^b \mathbf{C}\cdot\mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{C}\cdot\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt \quad \text{(herhangi bir sabit } \mathbf{C} \text{ vektörü)}$$

ve

$$\int_a^b \mathbf{C}\times\mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{C}\times\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt \quad \text{(herhangi bir sabit } \mathbf{C} \text{ vektörü)}$$

55. Skaler ve vektör fonksiyonların çarpımı $u(t)$ Skaler fonksiyonu ile $\mathbf{r}(t)$ vektör fonksiyonunun ikisinin de $a \le t \le b$ için tanımlı olduklarını varsayın.

a. u ve $\mathbf{r}$ $[a, b]$'de sürekliyseler, $u\mathbf{r}$'nin de $[a, b]$'de sürekli olduğunu gösterin.

b. u ve $\mathbf{r}$ $[a, b]$'de türetilebiliyorlarsa, $u\mathbf{r}$'nin de $[a, b]$de türetilebildiğini ve

$$\frac{d}{dt}(u\mathbf{r}) = u\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r}\frac{du}{dt}$$

olduğunu gösterin.

56. Vektör fonksiyonların ters türevleri

a. Skaler fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoreminin 2. Sonucunu kullanarak iki $\mathbf{R}_1(t)$ ve $\mathbf{R}_2(t)$ vektör fonksiyonunun bir I aralığında türevleri aynıysa, I boyunca fonksiyonların arasında sadece bir sabit farkı olduğunu gösterin.

b. (a)'daki sonucu kullanarak, $\mathbf{R}(t)$ $\mathbf{r}(t)$'nin I aralığındaki ters türeviyse, $\mathbf{r}$'nin I'daki bütün diğer ters türevlerinin sabit bir $\mathbf{C}$ vektörü için $\mathbf{R}(t) + \mathbf{C}$ olduğunu gösterin.

57. Analizin Temel Teoremi Reel değişkenli skaler fonksiyonlar için Analizin Temel Teoremi reel değişkenli bir vektör fonksiyon için de geçerlidir. Bunu ispatlamak için, skaler fonksiyonların teoremini kullanarak önce eğer bir $\mathbf{r}(t)$ vektör fonksiyonu $a \le t \le b$ için sürekliyse, $[a, b]$'nin her t noktasında

$$\frac{d}{dt}\int_a^t \mathbf{r}(\tau)\,d\tau = \mathbf{r}(t)$$

olduğunu gösterin. Sonra Alıştırma 56'nın (b) şıkkının sonucunu kullanarak $\mathbf{R}$, $[a, b]$'de $\mathbf{r}$'nin bir ters türeviyse,

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

olduğunu gösterin.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Uzay Eğrilerine Teğetler Çizmek

58–61 alıştırmalarındaki adımları gerçekleştirmek için bir BCS kullanın.

a. **r** konum vektörünün izlediği uzaydaki eğriyi çizin.

b. $d\mathbf{r}/dt$ hız vektörünün bileşenlerini bulun.

c. $d\mathbf{r}/dt$ 'yi verilen t_0 noktasında hesaplayın ve eğriye $\mathbf{r}(t_0)$'da teğet olan doğrunun denklemini belirleyin.

d. Verilen aralıkta eğriyle birlikte teğeti de çizin.

58. $\mathbf{r}(t) = (\sin t - t\cos t)\mathbf{i} + (\cos t + t\sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $0 \le t \le 6\pi$, $t_0 = 3\pi/2$

59. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $-2 \le t \le 3$, $t_0 = 1$

60. $\mathbf{r}(t) = (\sin 2t)\mathbf{i} + (\ln(1+t))\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 4\pi$, $t_0 = \pi/4$

61. $\mathbf{r}(t) = (\ln(t^2+2))\mathbf{i} + (\tan^{-1} 3t)\mathbf{j} + \sqrt{t^2+1}\,\mathbf{k}$, $-3 \le t \le 5$, $t_0 = 3$

62 ve 63 alıştırmalarında, a ve b sabitlerinin değerlerini değiştirirken,

$$\mathbf{r}(t) = (\cos at)\mathbf{i} + (\sin at)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$$

helisinin davranışını grafik olarak araştıracaksınız. Her alıştırmadaki adımları gerçekleştirmek için bir *BCS* kullanın.

62. $b = 1$ alın. $\mathbf{r}(t)$ helisini $a = 1, 2, 4$ ve 6 için $0 \le t \le 4\pi$ aralığında $t = 3\pi/2$'deki teğetiyle birlikte çizin. a bu pozitif değerlerle artarken, helisin grafiğine ve teğetin konumuna ne olduğunu kendi sözcüklerinizle anlatın.

63. $a = 1$ alın. $\mathbf{r}(t)$ helisini $b = 1/4, 1/2, 2$ ve 4 için $0 \le t \le 4\pi$ aralığında $t = 3\pi/2$'deki teğetiyle birlikte çizin. b bu pozitif değerlerle artarken, helisin grafiğine ve teğetin konumuna ne olduğunu kendi sözcüklerinizle anlatın.

13.2 Atış Hareketini Modellemek

Havaya bir mermi fırlattığımızda, genellikle önceden ne kadar ilerleyeceğini (hedefe varacak mı?), ne kadar yükseleceğini (tepeyi aşacak mı?) ve ne zaman yere ineceğini (sonuçları ne zaman alacağız?) bilmek isteriz. Bu bilgiyi, Newton'un İkinci Hareket Yasasını kullanarak, merminin ilk hız vektörünün yön ve büyüklüğünden buluruz.

İdeal Atış Hareketi İçin Vektörel ve Parametrik Denklemler

Atış hareketinin denklemlerini türetmek için, merminin düşey bir koordinat düzleminde hareket eden bir parçacık gibi davrandığını ve uçuşu sırasında mermiye etkiyen tek kuvvetin her zaman aşağıyı gösteren sabit yerçekimi kuvveti olduğunu varsayarız. Pratikte, bu varsayımların hiçbirisi doğru değildir. Dünya döndükçe yer merminin altında ilerler, hava merminin sürat ve yüksekliğiyle değişen bir sürtünme kuvveti yaratır ve yerçekimi kuvveti mermi ilerledikçe değişir. Türetmek üzere olduğumuz *ideal* denklemlerin tahminlerine düzeltmeler yapılırken bunlar da hesaba katılmalıdır. Ancak, düzeltmeler bu bölümün konusu değildir.

Mermimizin $t = 0$ anında orijinden birinci dörtte bir bölgeye bir $\mathbf{v}_0$ ilk hızıyla atıldığını varsayıyoruz (Şekil 13.9). $\mathbf{v}_0$ yatayla α açısı yapıyorsa,

$$\mathbf{v}_0 = (|\mathbf{v}_0|\cos\alpha)\mathbf{i} + (|\mathbf{v}_0|\sin\alpha)\mathbf{j}$$

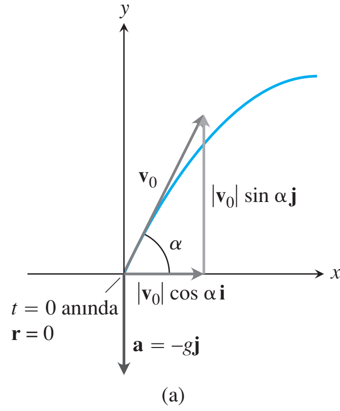
olur. Başlangıç sürati $|\mathbf{v}_0|$ için daha basit bir gösterim olan v_0'ı kullanırsak,

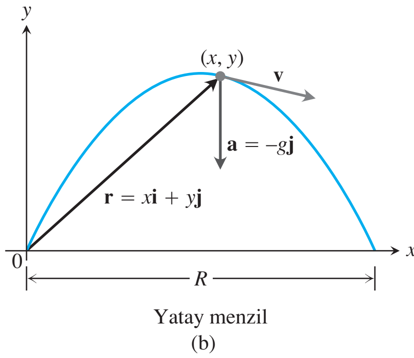
$$\mathbf{v}_0 = (v_0\cos\alpha)\mathbf{i} + (v_0\sin\alpha)\mathbf{j} \quad (1)$$

buluruz. Merminin başlangıç konumu

$$\mathbf{r}_0 = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = \mathbf{0} \quad (2)$$

olarak verilmektedir.





ŞEKİL 13.9 (a) $t = 0$ anında konum, hız, ivme ve atış açısı. (b) Daha sonraki bir t anında konum, hız ve ivme.

Newton'un İkinci Hareket Yasası mermi üzerine etkiyen kuvvetin, kütlesi m kere hızı, veya $\mathbf{r}$ merminin konum vektörü ve t zaman ise, $m(d^2\mathbf{r}/dt^2)$ olduğunu söyler. Kuvvet sadece yerçekimi kuvveti $-mg\mathbf{j}$ ise,

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -mg\mathbf{j} \qquad \text{ve} \qquad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{j}$$

bulunur. Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözerek $\mathbf{r}$'yi t'nin bir fonksiyonu olarak buluruz:

Diferansiyel denklem: $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{j}$

Başlangıç koşulları: $t = 0$ iken $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ ve $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_0$

Birinci integrasyon

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(gt)\mathbf{j} + \mathbf{v}_0$$

verir. İkinci kere integre edilirse,

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$$

bulunur. (1) ve (2) denklemlerinden $\mathbf{v}_0$ ve $\mathbf{r}_0$'ın değerlerini yerine koymak

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \underbrace{(v_0 \cos\alpha)t\mathbf{i} + (v_0 \sin\alpha)t\mathbf{j}}_{\mathbf{v}_0 t} + \mathbf{0}$$

verir. Terimleri birleştirerek

İdeal Mermi Hareketi Denklemi

$$\mathbf{r} = (v_0 \cos\alpha)t\mathbf{i} + \left((v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j} \qquad (3)$$

elde ederiz.

(3) denklemi ideal mermi hareketi için *vektör denklemi*dir. α açısı merminin **atış açısı (ateşleme açısı, yükselme açısı)** ve v_0, daha önce de söylediğimiz gibi, merminin **başlangıç süratı**dir. $\mathbf{r}$'nin bileşenleri

$$x = (v_0 \cos\alpha)t \qquad \text{ve} \qquad y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (4)$$

parametrik denklemlerini verir. Burada x merminin $t \geq 0$ anındaki yatay uzaklığı ve y'de yüksekliğidir.

ÖRNEK 1 İdeal Bir Mermi Bulmak

Bir mermi yatay tabandan 500 m/s'lik bir ilk hız ve 60°'lik bir atış açısıyla fırlatılmıştır. Ateşlemeden 10 s sonra mermi nerededir?

Çözüm $v_0 = 500$, $\alpha = 60°$, $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ ve $t = 10$ ile (3) denklemini kullanarak, ateşlemeden 10 s sonra merminin koordinatlarını metre olarak buluruz:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= (v_0 \cos\alpha)t\mathbf{i} + \left((v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j} \\
&= (500)\left(\frac{1}{2}\right)(10)\mathbf{i} + \left((500)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)10 - \left(\frac{1}{2}\right)(9.8)(100)\right)\mathbf{j} \\
&\approx 2500\mathbf{i} + 3840\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Ateşlemeden on saniye sonra, mermi 3840 m havada ve yerde 2500 m ilerdedir. ■

Yükseklik, Uçuş Zamanı ve Menzil

(3) denklemi orijinden fırlatılan ideal bir mermi hakkında sorulan çoğu soruyu yanıtlamamızı sağlar.

Mermi, en yüksek konumuna dikey hız bileşeni sıfır, yani

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt = 0, \qquad \text{veya} \qquad t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

iken ulaşır. Bu t değeri için, y'nin değeri

$$y_{\max} = (v_0 \sin\alpha)\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$$

olur.

Merminin ne zaman yere indiğini bulmak için, yatay tabandan fırlatılmışsa, (3) denkleminde y'yi sıfıra eşitler ve t'yi çözeriz:

$$\begin{aligned}
(v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 &= 0 \\
t\left(v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt\right) &= 0 \\
t = 0, \qquad t &= \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}
\end{aligned}$$

0, merminin fırlatıldığı zaman olduğundan, $(2v_0 \sin\alpha)/g$ merminin yere çarptığı zaman olmalıdır.

Yatay tabanda, orijinden çarpma noktasına kadarki mesafe olan, merminin **menzili** R'yi bulmak için, $t = (2v_0 \sin\alpha)/g$ iken x'in değerini buluruz:

$$\begin{aligned}
x &= (v_0 \cos\alpha)t \\
R &= (v_0 \cos\alpha)\left(\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}\right) = \frac{v_0^2}{g}(2\sin\alpha\cos\alpha) = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha
\end{aligned}$$

$\sin 2\alpha = 1$ veya $\alpha = 45°$ iken menzil en büyüktür.

İdeal Mermi Hareketi İçin Yükseklik, Uçuş Zamanı ve Menzil

Yatay bir düzlem üzerindeki orijinden v_0 ilk hızı ve α atış açısı ile atılan ideal mermi hareketi için:

$$\textit{Maksimum yükseklik:} \quad y_{\max} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}$$

$$\textit{Uçuş zamanı:} \quad t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$\textit{Menzil:} \quad R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha .$$

ÖRNEK 2 İdeal Mermi Hareketini İncelemek

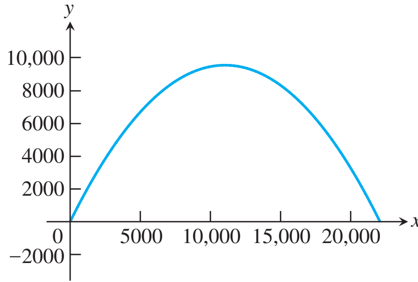
Yatay tabandaki orijinden 500 m/s'lik ilk süratle ve 60°'lik bir atış açısıyla fırlatılan bir merminin (Örnek 1'deki merminin aynı) maksimum yüksekliğini, uçuş zamanını ve menzilini bulun.

Çözüm

$$\textit{Maksimum yükseklik:} \quad y_{\max} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g} = \frac{(500 \sin 60°)^2}{2(9.8)} \approx 9566 \text{ m}$$

$$\textit{Uçuş zamanı:} \quad t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2(500) \sin 60°}{9.8} \approx 88.4 \text{ s}$$

$$\textit{Menzil:} \quad R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha = \frac{(500)^2 \sin 120°}{9.8} \approx 22{,}092 \text{ m}$$



ŞEKİL 13.10 Örnek 2'de tarif edilen mermi yolunun grafiği

(3) denkleminden, merminin konum vektörü

$$\mathbf{r} = (v_0 \cos \alpha)t\mathbf{i} + \left((v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j}$$

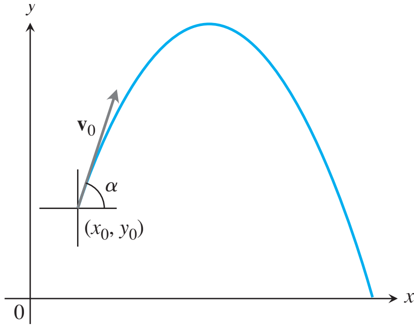
$$= (500 \cos 60°)t\mathbf{i} + \left((500 \sin 60°)t - \frac{1}{2}(9.8)t^2\right)\mathbf{j}$$

$$= 250t\mathbf{i} + \left(\left(250\sqrt{3}\right)t - 4.9t^2\right)\mathbf{j}$$

olarak bulunur. Mermi yolunun bir grafiği Şekil 13.10'da gösterilmektedir. ■

İdeal Yörüngeler Paraboliktir

Bir hortumdan akan suyun havada bir parabol çizdiği sıklıkla iddia edilir, fakat yeterince yakından bakan birisi bunun böyle olmadığını görecektir. Hava suyu yavaşlatır ve ileri doğru ilerlemesi en sonda düştüğü orana uymayacak kadar yavaştır.



ŞEKİL 13.11 (x_0, y_0)'dan bir $\mathbf{v}_0$ ilk hızı ve yatayla bir α açısı yapacak şekilde atılan bir merminin yolu.

Aslında iddia edilen şey ideal mermilerin parabollerde hareket ettiğidir ve bunu (4) denklemlerinden görebiliriz. İkinci denkleme, birinci denklemden gelen $t = x/(v_0 \cos \alpha)$ değerini yerleştirirsek,

$$y = -\left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\right)x^2 + (\tan \alpha)x$$

Kartezyen-koordinat denklemini elde ederiz. Bu denklem $y = ax^2 + bx$ şeklindedir, dolayısıyla grafiği bir paraboldür.

(x_0, y_0)'dan Fırlatma

İdeal mermimizi orijin yerine Şekil (13.11) (x_0, y_0) noktasından fırlatırsak, hareket yolu için konum vektörü, Alıştırma 19'da göstermeniz istenen

$$\mathbf{r} = (x_0 + (v_0 \cos \alpha)t)\mathbf{i} + \left(y_0 + (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j} \tag{5}$$

şeklindedir.

ÖRNEK 3 Yanan Bir Ok Atmak

1992 Barselona Yaz Olimpiyatlarını açmak için, bronz madalyalı okçu Antonio Rebollo Olimpiyat meşalesini yanan bir okla yakmıştı (Şekil 13.12). Rebello'nun oku, 70 ft yükseklikteki meşaleye yer seviyesinde 90 ft uzaklıktan ve 6 ft yükseklikten attığını ve okun maksimum yüksekliğine meşalenin merkezinden 4 ft yukarıda ulaşmasını istediğini varsayalım (Şekil 13.12).





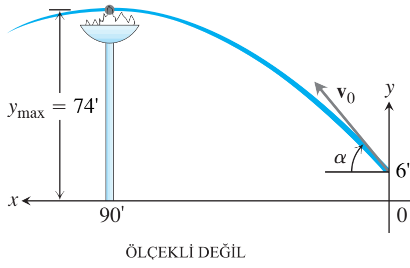
ŞEKİL 13.12 İspanyol okçu Antonio Rebollo Barselona'da Olimpiyat meşalesini yanan bir okla yakar.

(a) y_{max} değerini başlangıç hızı v_0 ve atış açısı α cinsinden ifade edin.

(b) $v_0 \sin \alpha$ değerini bulmak için $y_{max} = 74$ ft (Şekil 13.13) ve (a) şıkkının sonucunu kullanın.

(c) $v_0 \cos \alpha$ değerini bulun.

(d) Okun ilk atış açısını bulun.



ŞEKİL 13.13 Olimpiyat meşalesini yakan okun ideal yolu (Örnek 3).

Çözüm

(a) x-ekseni yerde sola doğru ilerleyen (Şekil 13.12'deki fotoğrafla uyuşacak şekilde) ve $t = 0$'da $x_0 = 0$ ve $y_0 = 6$ olacak şekilde bir koordinat sistemi kullanırız (Şekil 13.13). Elimizde

$$y = y_0 + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{Denklem (5), } \mathbf{j}\text{-bileşeni}$$

$$= 6 + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad y_0 = 6$$

vardır. Okun en yüksek noktaya ulaştığı zamanı, $dy/dt = 0$ alıp buradan t'yi çözerek buluruz:

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

Bu t değeri için, y'nin değeri

$$y_{max} = 6 + (v_0 \sin\alpha)\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2$$

$$= 6 + \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$$

olur.

(b) $y_{max} = 74$ ve $g = 32$ kullanarak,

$$74 = 6 + \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2(32)}$$

veya

$$v_0 \sin\alpha = \sqrt{(68)(64)}$$

buluruz.

(c) Ok y_{max} değerine ulaştığında, meşalenin merkezine kadar kat edilen yatay mesafe $x = 90$ ft dir. (a) şıkkındaki y_{max}'a ulaşma zamanını ve yatay uzaklık $x = 90$ ft'i (5) denkleminin **i**-bileşeninde yerine yazarak,

$$x = x_0 + (v_0 \cos\alpha)t \qquad \text{Denklem (5), } \mathbf{i}\text{-bileşeni}$$

$$90 = 0 + (v_0 \cos\alpha)t \qquad x = 90,\ x_0 = 0$$

$$= (v_0 \cos\alpha)\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) \qquad t = (v_0 \sin\alpha)/g$$

elde ederiz. Bu denklemden $v_0 \cos\alpha$'yı çözüp $g = 32$ ve (b) şıkkındaki sonucu kullanarak

$$v_0 \cos\alpha = \frac{90g}{v_0 \sin\alpha} = \frac{(90)(32)}{\sqrt{(68)(64)}}$$

buluruz.

(d) (b) ve (c) şıkları birlikte

$$\tan\alpha = \frac{v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha} = \frac{\left(\sqrt{(68)(64)}\right)^2}{(90)(32)} = \frac{68}{45}$$

veya

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{68}{45}\right) \approx 56.5°$$

verir. Bu Rebello'nun atış açısıdır. ■

Rüzgar İle Mermi Hareketi

Şimdiki örnek mermiye etki eden başka bir kuvvetin nasıl hesaplanacağını göstermektedir. Ayrıca, Örnek 4'teki basketbol topunun yolunun düşey bir düzlemde bulunduğunu varsayıyoruz.

ÖRNEK 4 Bir Beyzbol Topuna Vurmak

Bir beyzbol topuna yerden 3 ft yükseklikte iken vuruluyor. Sopayı, yatayla 20°'lik açı yapan 152 ft/s'lik bir ilk hızla terk ediyor. Topa vurulduğu anda ani bir rüzgar, topun yatayda ilerlediği yönün tam ters yönünde, topun ilk hızına $-8.8\mathbf{i}$ (ft/s) bileşenini ekleyecek şekilde esmeye başlıyor (8.8 ft/s = 6 milsa).

(a) Beyzbol topunun yolu için bir vektörel (konum vektörü) denklem bulun.

(b) Beyzbol topu ne kadar yükselir ve maksimum yüksekliğine ne zaman ulaşır?

(c) Topun yakalanmadığını varsayarak, menzilini ve uçuş süresini bulun.

Çözüm

(a) Rüzgarın hesaba katılması ile (1) denklemi kullanılarak topun ilk hızı

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_0 &= (v_0 \cos\alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin\alpha)\mathbf{j} - 8.8\mathbf{i}\\ &= (152\cos 20°)\mathbf{i} + (152\sin 20°)\mathbf{j} - (8.8)\mathbf{i}\\ &= (152\cos 20° - 8.8)\mathbf{i} + (152\sin 20°)\mathbf{j}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Başlangıç konumu $\mathbf{r}_0 = 0\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$'dir. $d^2\mathbf{r}/dt^2 = -g\mathbf{j}$'nin integrali

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(gt)\mathbf{j} + \mathbf{v}_0$$

verir. İkinci bir integrasyon

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$$

verir. Son denklemde $\mathbf{v}_0$'ın ve $\mathbf{r}_0$'ın değerlerini yerine yazmak topun konum vektörünü verir:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0\\ &= -16t^2\mathbf{j} + (152\cos 20° - 8.8)t\mathbf{i} + (152\sin 20°)t\mathbf{j} + 3\mathbf{j}\\ &= (152\cos 20° - 8.8)t\mathbf{i} + \left(3 + (152\sin 20°)t - 16t^2\right)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

(b) Beyzbol topu, hızının düşey bileşeni sıfır iken veya

$$\frac{dy}{dt} = 152 \sin 20° - 32t = 0$$

iken en yüksek noktasına ulaşır. t'yi çözerek

$$t = \frac{152 \sin 20°}{32} \approx 1.62 \text{ s}$$

buluruz. Bu değeri **r**'nin düşey bileşeninde yerine yazmak maksimum yüksekliği verir:

$$y_{\max} = 3 + (152 \sin 20°)(1.62) - 16(1.62)^2$$
$$\approx 45.2 \text{ ft}$$

Yani, topun maksimum yüksekliği, sopayı terk etmesinden yaklaşık 1.6 s sonra ulaştığı, yaklaşık 45.2 ft'dir.

(c) Topun ne zaman yere düştüğünü bulmak için **r**'nin düşey bileşenini 0'eşitleyip t'yi çözeriz:

$$3 + (152 \sin 20°)t - 16t^2 = 0$$
$$3 + (51.99)t - 16t^2 = 0$$

Çözüm değerleri yaklaşık olarak $t = 3.3$ s ve $t = –0.06$ s'dir. Pozitif değeri **r**'nin yatay bileşeninde yerine yazarak menzili buluruz:

$$R = (152 \cos 20° - 8.8)(3.3)$$
$$\approx 442 \text{ ft}$$

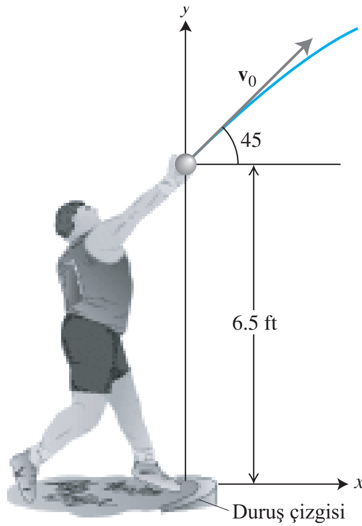
Böylece, yatay menzil yaklaşık olarak 442 ft ve uçuş zamanı yaklaşık olarak 3.3 s dir. ■

29–31 alıştırmalarında, uçuşu yavaşlatan hava direnci altında, mermi hareketini ele alıyoruz.

ALIŞTIRMALAR 13.2

Aşağıdaki alıştırmalarda, atılan cisimlerin davranışları aksi belirtilmedikçe ideal olarak kabul edilecektir. Bütün atış açılarının yataydan ölçüldüğü varsayılmaktadır. Başka bir şey belirtilmediği sürece, bütün cisimlerin yatay tabandaki orijinden atıldığı varsayılmaktadır.

1. **Uçuş süresi** Bir mermi 840 m/s süratle ve 60°'lik bir açıyla ateşlenmiştir. Yatayda 21 km ilerlemesi ne kadar sürecektir?
2. **Çıkış süratini bulmak** Maksimum menzili 24.5 km olan bir tabancanın atış süratini bulun.
3. **Uçuş süresi ve yükseklik** Bir mermi 500 m/s'lik ilk süratle ve 45°'lik bir açıyla atılmaktadır.
   a. Mermi ne zaman ve ne kadar uzakta yere çarpar?
   b. Mermi yatayda 5 km ilerlemişken, ne kadar yüksektedir?
   c. Merminin ulaştığı en büyük yükseklik nedir?
4. **Bir beyzbol topunu atmak** Bir beyzbol topu sahadan 32 ft yukarıdaki tribünden yatayla 30° yapan bir açıyla atılmıştır. Başlangıç sürati 32 ft/s ise, top yere ne zaman ve ne kadar uzakta çarpar?
5. **Gülle atmak** Bir atlet 16 lb'luk bir gülleyi yatayla 45°'lik bir açıyla yerden 6.5 ft yukardan 44 ft/s ilk süratle fırlatmıştır. Gülle, atıştan ne kadar sonra ve duruş çizgisinin iç tarafından ne kadar uzakta yere iner?



6. (*Örnek 5'in devamı.*) Başlangıçtaki yükseklikten dolayı, Alıştırma 5'teki gülle 40°'lik bir açıyla atılmış olsaydı, daha ileri giderdi. Ne kadar ileri gidebilirdi? İnç olarak yanıtlayın.

7. **Golf topları ateşlemek** Yer seviyesindeki bir yaylı tüfek bir golf topunu 45°'lik açıyla ateşlemektedir. Top 10 m ileride yere iner.

   a. Topun ilk sürati neydi?

   b. Aynı ilk hız için, menzili 6 m yapan iki ateşleme açısını bulun.

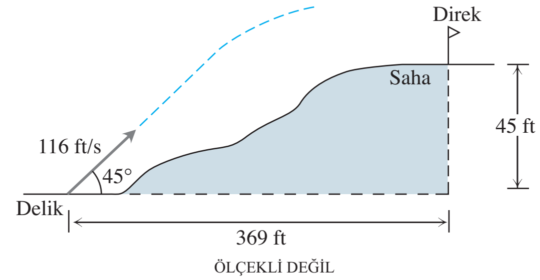
8. **Elektron ışıması** Bir TV tüpündeki bir elektron yatay olarak 40 cm uzaktaki tüpün yüzeyine 5×10^6 m/s hızla gönderilmektedir. Elektron çarpmadan önce ne kadar mesafe düşecektir?

9. **Golf topu hızını bulmak** Farklı sertlikteki golf toplarına bir iticiyle vurulduğunda ne kadar ileri gidecekleri konusundaki laboratuvar testleri 100-sıkışımlı, 9°'lik açıyla 100 mil/sa hızla gelen bir sopa başıyla vurulan bir topun 248.8 yard ilerlediğini göstermiştir. Topun havalanma sürati nedir? (100 mil/sa' ten fazladır. Sopa başının ileri hareket ettiği anda, sıkıştırılmış top, topun ileri doğru süratini arttıracak şekilde, sopa yüzeyinden uzaklaşmaktadır.)

10. *Bir insan topu* $\upsilon_0 = 80\sqrt{10}/3$ ft/s ilk süratiyle fırlatılacaktır. Sirk göstericisi (doğru kalibrede, elbette) 200 ft ilerideki özel bir yastığa düşmeyi ummaktadır. Sirk 75 ft yüksekliğinde düz bir tavanı olan büyük bir odada kurulmuştur. Gösterici tavana çarpmadan yastığa fırlatılabilir mi? Fırlatılabilirse, topun fırlatma açısı ne olmalıdır?

11. Bir golf topu yerden 30°'lik bir açı ve 90 ft/s hızıyla ayrılmaktadır. 135 ft ötedeki 30 ft yüksekliğindeki bir ağacın üzerinden aşabilir mi? Açıklayın.

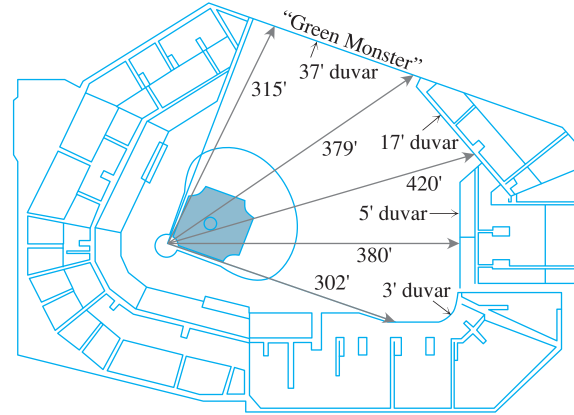
12. **Yükseltilmiş saha** Bir golf topu delikten 45 ft yukarıdaki çimenliğe 116 ft/s ilk hızıyla ve 45°'lik fırlatma açısıyla atılmaktadır. 369 ft ileride olan direk yoluna çıkmıyorsa, top direğe göre nerede yere düşecektir?



13. **Green Monster** Bir Boston Red Sox oyuncusu tarafından yerin 3 ft yukarısından 20°'lik bir açıyla atılan bir beyzbol topu, "Green Monster"ı, Fenway Parkı'nın sol taraftaki duvarını ancak aşmıştır. Bu duvar 37 ft yüksekliğinde ve başlangıç yerinden 315 ft uzaktadır (Şekle bakın).

    a. Topun başlangıç sürati neydi?

    b. Topun duvara varması ne kadar sürmüştür?



14. **Eşit – menzilli atış açıları** α, $0 < \alpha < 90$, açısıyla atılan bir merminin menzilinin aynı hızla $(90 - \alpha)$ açısıyla atılan bir mermininkiyle aynı olduğunu gösterin (Hava direncini hesaba katan modellerde, bu simetri kaybolur).

15. **Eşit – menzilli atış açıları** Merminin başlangıç sürati 400 m/s ise, hangi iki atış açısı bir merminin 16 km uzakta tabancayla aynı seviyeye gelmesini sağlayacaktır?

16. **Sürate karşın menzil ve yükseklik**

    a. Bir merminin verilen bir atış açısındaki başlangıç hızını iki katına çıkarmanın menzili 4 katına çıkaracağını gösterin.

    b. Yükseklik ve menzili iki katına çıkartmak için, başlangıç süratini yüzde kaç arttırmalısınız?

17. **Gülle fırlatma** 1987'de Moskova'da, Natalya Lisouskaya 8 lb, 13 onsluk bir gülleyi 73 ft 10 inçe fırlatarak bir dünya rekoru kırdı. Gülleyi yerin 6.5 ft yukarısından yatayla 40°'lik bir açıyla attığı varsayılırsa, güllenin başlangıç sürati nedir?

18. **Zamana karşın yükseklik** Bir merminin maksimum yüksekliğine ulaşması için gerekli zamanın yarısı kadar sürede maksimum yüksekliğinin dörtte üçüne ulaştığını gösterin.

19. **(x_0, y_0)'dan atış**

$$x = x_0 + (v_0 \cos \alpha)t,$$

$$y = y_0 + (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

denklemlerini, (metindeki (5) denklemine bakın) aşağıdaki başlangıç değer problemini düzlemdeki bir **r** vektörü için çözerek elde edin.

Diferansiyel denklem: $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{j}$

Başlangıç koşulları: $\mathbf{r}(0) = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$

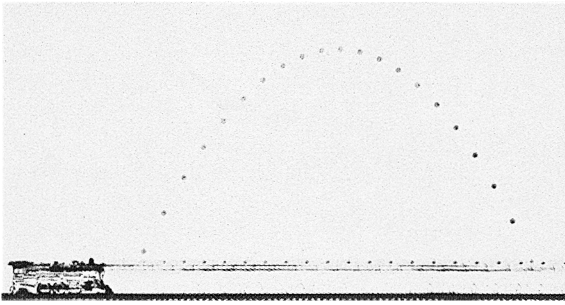
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(0) = (v_0 \cos \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha)\mathbf{j}$$

20. **Yanan ok** Örnek 3'te bulunan ateşleme açısını kullanarak, yanan okun Rebello'nun yayından hangi süratle çıktığını bulun. Şekil 13.13'e bakın.

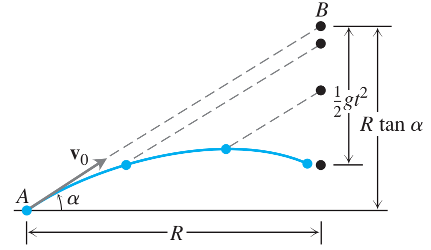
21. **Yanan ok** Örnek 3'teki meşalenin çapı 12 ft'tir. (5) denklemini ve Örnek 3(c)'yi kullanarak, yanan okun meşalenin kenarına olan yatay mesafeyi ne kadar zamanda kat ettiğini bulun. Bu anda ok ne kadar yüksektedir?

22. $\alpha = 90$ için (4) denklemleri ile verilen mermi yolunu tanımlayın.

23. **Model tren** Aşağıda gösterilen çok anlı fotoğraf, düz bir rayda sabit hızla ilerleyen bir model tren lokomotifini göstermektedir. Lokomotif ilerlerken, lokomotifin bacasından bir bilye havaya fırlatılmaktadır. Lokomotifle aynı yatay hızla ilerlemeye devam eden bilye fırlatıldıktan 1 s sonra yine lokomotife dönmektedir. Bilyenin yolunun yatayla yaptığı açıyı ölçün ve bu bilgiyi kullanarak bilyenin ne kadar yükseldiğini ve lokomotifin ne süratle hareket ettiğini bulun.



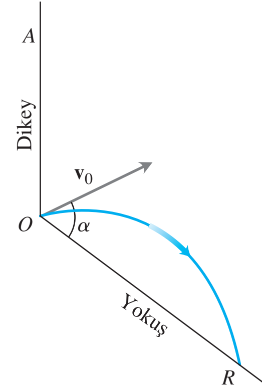
24. **Çarpışan bilyeler** Şekil, iki bilyeyle yapılan bir deneyi göstermektedir. A bilyesi B bilyesine doğru bir α açısı ve v_0 başlangıç süratiyle atılmaktadır. Aynı anda B mermisi, A'dan yer seviyesinde R birim uzaktaki bir noktadan $R \tan \alpha$ birim yüksekteki durgun konumundan düşmeye bırakılmaktadır. Bilyelerin v_0'dan bağımsız olarak çarpıştıkları gözlemlenmiştir. Bu sadece bir tesadüf müdür, yoksa olması gereken bu mudur? Yanıtınızı açıklayın.



25. **Yokuş aşağı atış** İdeali bir mermi, Şekilde gösterildiği gibi, aşağı doğru eğik bir düzleme fırlatılmaktadır.

a. Aşağı doğru en uzun mesafenin, başlangıç hızı vektörü AOR açısının açıortayı iken alındığını gösterin.

b. Mermi aşağı değil de yukarı doğru fırlatılsaydı, hangi açı menzili maksimize ederdi? Yanıtınızı açıklayın.



26. **Rüzgar altında beyzbol topuna vurmak** Bir beyzbol topuna yerden 2.5 ft yükseklikte iken vuruluyor. Top, sopayı 145 ft/s'lik bir ilk hız ve 23°'lik bir atış açısı ile terk ediyor. Topa vurulduğu anda, ani bir rüzgar, topun ilk hızına $-14\mathbf{i}$ (ft/s) bileşenini ekleyecek şekilde topa karşı esmeye başlıyor. Uçuş yolu üzerinde, başlangıç levhasından 300 ft ileride, 15 ft yüksekliğinde bir duvar bulunmaktadır.

a. Beyzbol topunun yolu için bir vektörel denklem bulun.

b. Top ne kadar yükselir ve maksimum yüksekliğine ne zaman ulaşır?

c. Topun yakalanmadığını varsayarak, menzilini ve uçuş süresini bulun.

d. Top, ne zaman 20 ft yüksekliktedir? Bu yükseklikteyken başlangıç levhasından ne kadar uzaktadır (yatay uzaklık)?

e. Vuruşçu, sayı vuruşu yapmış mıdır? Açıklayın.

27. **Voleybol** Bir voleybol topuna yerden 4 ft yükseklikte ve 6 ft yüksekliğindeki bir fileden 12 ft uzaklıkta iken vuruluyor. Darbe noktasını 35 ft/s'lik bir ilk hızla ve 27°'lik bir açıyla terk ederek rakip takım oyuncuları arasından dokunulmadan geçiyor.

a. Voleybol topunun yolu için bir vektörel denklem bulun.

b. Top ne kadar yükselir ve maksimum yüksekliğine ne zaman ulaşır?

c. Menzilini ve uçuş süresini bulun.

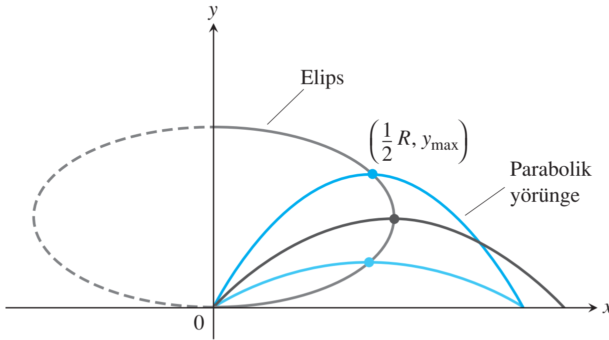
d. Top, ne zaman 7 ft yükseklikteddir? Bu yükseklikteyken düşeceği yerden ne kadar uzaktadır (yatay uzaklık)?

e. Filenin 8 ft'e yükseltildiğini varsayın. Bu, bazı şeyleri değiştirir mi? Açıklayın.

28. Yörünge zirveleri Yerden α açısı ve v_0 ilk hızıyla atılan bir mermi için, α'yı bir değişken ve v_0'ı da belirli bir sabit olarak kabul edin. Her α için, $0 < \alpha < \pi/2$, Şekilde gösterildiği gibi parabolik bir yörünge elde ederiz. Düzlemde bu parabolik yörüngelerin zirvelerinin hepsinin, $x \geq 0$ olmak üzere,

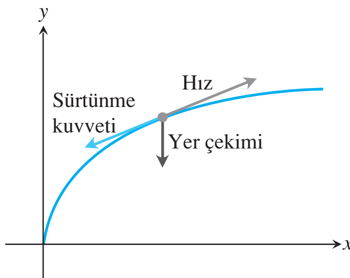
$$x^2 + 4\left(y - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2 = \frac{v_0^4}{4g^2}$$

elipsinin üzerinde bulunduğunu gösterin.



Lineer Bir Sürtünme İle Mermi Hareketi

Bir mermi hareketine, yer çekimi ivmesi dışında, etkiyen temel kuvvet hava direncidir. Bu yavaşlatıcı kuvvet **sürtünme kuvveti** dir ve merminin hızına *ters* yönde etki eder (şekle bakın). Ancak, hava içinde nispeten küçük hızlarda hareket eden mermiler için sürtünme kuvveti, sürat (birinci kuvvet) ile (neredeyse) orantılıdır ve **lineer** olarak adlandırılır.



29. Lineer sürtünme

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})\cos\alpha$$

$$y = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})(\sin\alpha) + \frac{g}{k^2}(1 - kt - e^{-kt})$$

denklemlerini, aşağıdaki başlangıç değer problemini düzlemdeki bir **r** vektörü için çözerek elde edin.

Diferansiyel denklem: $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{j} - k\mathbf{v} = -g\mathbf{j} - k\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$

Başlangıç koşulları: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$

$$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=0} = \mathbf{v}_0 = (v_0\cos\alpha)\mathbf{i} + (v_0\sin\alpha)\mathbf{j}$$

k **sürtünme katsayısı**, hava direncini temsil eden pozitif bir sabittir. v_0 ve α merminin ilk hızı ve atış açısı, g'de yerçekimi ivmesidir.

30. Lineer sürtünme ile bir beyzbol topuna vurmak Örnek 4'teki beyzbol topu problemini lineer sürtünme ile göz önüne alın (Alıştırma 29'a bakın). Rüzgar olmadığını ve $k = 0.12$ sürtünme katsayısını kabul edin.

a. Alıştırma 29'dan, beyzbol topunun yolu için bir vektör formu bulun.

b. Top ne kadar yükselir? Maksimum yüksekliğine ne zaman ulaşır?

c. Beyzbol topunun menzilini ve uçuş süresini bulun.

d. Top, ne zaman 30 ft yükseklikteddir? Bu yükseklikteyken başlangıç levhasından ne kadar uzaktadır (yatay uzaklık)?

e. Uçuş yolu üzerinde, başlangıç levhasından 340 ft ileride, 10 ft yüksekliğinde bir duvar bulunmaktadır. Bir savunmacı, sıçrayarak yerden 11 ft yüksekliğe kadar herhangi bir topu yakalayıp duvarı aşmasını engelleyebilmektedir. Vurucu, sayı vuruşu yapmış mıdır?

31. Lineer sürtünme ile rüzgar altındaki bir beyzbol topuna vurmak Yine Örnek 4'teki beyzbol topu problemini ele alın. Bu defa 0.08'lik bir sürtünme katsayısını ve topa vurulduğu anda, topun ilk hızına $-17.6\mathbf{i}$ (ft/s) bileşenini ekleyen ani bir rüzgarı göz önüne alın.

a. Beyzbol topunun yolu için bir vektörel denklem bulun.

b. Top ne kadar yükselir? Maksimum yüksekliğine ne zaman ulaşır?

c. Beyzbol topunun menzilini ve uçuş süresini bulun.

d. Top, ne zaman 32 ft yükseklikteddir? Bu yükseklikteyken başlangıç levhasından ne kadar uzaktadır (yatay uzaklık)?

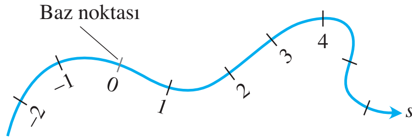
e. Uçuş yolu üzerinde, başlangıç levhasından 380 ft ileride, 20 ft yüksekliğinde bir duvar bulunmaktadır. Vurucu, sayı vuruşu yapmış mıdır? "Evet" ise, topun ilk hızının yatay bileşenindeki hangi değişiklik topu saha içinde tutacaktır? "Hayır" ise, hangi değişiklik sayı vuruşu olmasını sağlayacaktır?

13.3 Yay Uzunluğu ve Birim Teğet Vektör T

Hava içinde veya uzayda, tecrübe sahibi olabileceğiniz gibi, bir yol boyunca yüksek hızlarla yol alan hareketleri hayal edin. Özellikle, solunuza veya sağınıza döndüren hareketleri ve koltuğunuzdan kaldırmaya veya bastırmaya yönelik yukarı – aşağı hareketleri hayal edin. Atmosferde uçan pilotlar, akrobatik uçuşlardaki dönmelerde ve burulmalarda şüphesiz ki bu tecrübeyi yaşarlar. Çok dar olan dönüşler, çok dik olan inişler veya tırmanışlar veya bunların yüksek ve artan bir hızla birleştirilmesi, bir hava aracının kontrolden çıkmasına hatta, muhtemelen havada dağılmasına ve yere düşmesine neden olabilir.

Bu ve bundan sonraki iki bölümde, dönüşlerinin keskinliğini ve ileri doğru olan hareketine dik burulmalarını matematiksel olarak tanımlayan, bir eğrinin şeklinin özelliklerini inceleyeceğiz.

Bir Uzay Eğrisi Boyunca Yay Uzunluğu



ŞEKİL 13.14 Düzgün eğriler, her noktanın koordinatı daha önce seçilmiş bir baz noktasından itibaren mesafe olmak üzere, sayı doğruları gibi ölçeklendirilebilir.

Düzgün uzay eğrilerinin özelliklerinden biri, ölçülebilir bir uzunluklarının olmasıdır. Bu, koordinat eksenlerindeki noktaları orijinden olan yönlü uzaklıklarıyla tanımlayabildiğimiz gibi, eğri üzerindeki noktaları verilen bir **baz noktası**'ndan itibaren olan yönlü s uzaklıklarıyla tanımlayabilmemizi sağlar (Şekil 13.14). Hareket eden bir cismin hızını ve ivmesini tanımlamak için doğal parametre zamandır, fakat bir eğrinin şeklini incelemek için doğal parametre s'dir. Uzay uçuşu analizlerinde iki parametre de karşımıza çıkar.

Uzaydaki düzgün bir eğri üzerinde uzaklık ölçmek için, düzlemdeki eğriler için kullandığımız formüle bir z-terimi ekleriz.

TANIM **Düzgün Bir Eğrinin Uzunluğu**

$t = a$'dan $t = b$'ye doğru artarken sadece bir kere çizilen düzgün bir $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},\ a \le t \le b$, eğrisinin uzunluğu şöyledir:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt. \qquad (1)$$

Düzlemdeki eğriler için olduğu gibi, uzaydaki bir eğrinin uzunluğunu da belirtilen koşulu sağlayan uygun parametrizasyondan buluruz. Yine, ispatı atlayacağız.

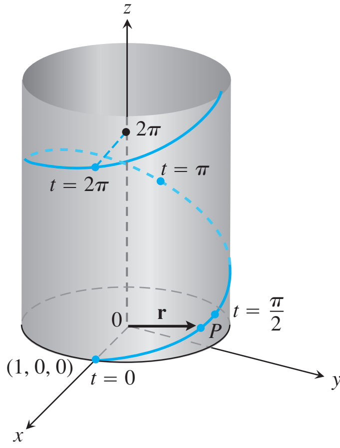
(1) denklemindeki kök hız vektörü $d\mathbf{r}/dt$'nin uzunluğu $|\mathbf{v}|$'dir. Bu, uzunluk formülünü kısa bir şekilde yazmamızı sağlar.

Yay Uzunluğu Formülü

$$L = \int_a^b |\mathbf{v}|\, dt \qquad (2)$$

ÖRNEK 1 Bir Planörün Aldığı Yol

Bir planör $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ helisi boyunca yukarı doğru uçmaktadır. Planör, yolu boyunca $t = 0$'dan $t = 2\pi \approx 6.28$ s'ye kadar ne kadar mesafe kat eder?



ŞEKİL 13.15 Örnek 1'deki $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ helisi.

Çözüm Bu zaman süresince gidilen yol parçası, helisin tam bir dönüşüne karşı gelir.(Şekil 13.15). Eğrinin bu kısmının uzunluğu

$$L = \int_a^b |\mathbf{v}|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,dt = 2\pi\sqrt{2} \text{ birim uzunluk}$$

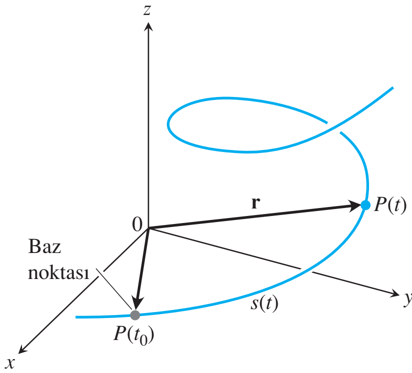
olarak bulunur. Bu, helisin üzerinde bulunduğu, *xy*-düzlemindeki çemberin uzunluğunun $\sqrt{2}$ katıdır. ■

t ile parametrize edilen düzgün bir *C* eğrisinin üzerinde bir $P(t_0)$ baz noktası seçersek, her *t* değeri *C* üzerinde bir $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ noktası ve *C* üzerinde baz noktasından itibaren ölçülen bir "yönlü uzaklık"

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{v}(\tau)|\,d\tau,$$

tanımlar (Şekil 13.16). $t > t_0$ ise, $s(t)$ $P(t_0)$'dan $P(t)$'ye olan uzaklıktır. $t < t_0$ ise, $s(t)$ uzaklığın negatifidir. Her *s* değeri *C* üzerinde bir nokta belirler ve bu da *C*'yi *s*'e göre parametrize eder. *s*'ye eğrinin **yay uzunluğu parametresi** deriz. Parametrenin değeri artan *t* yönünde artar. Yay uzunluğu paramatresi, bir uzay eğrisinin dönüşlerinde ve burulmalarında özel olarak etkilidir.

t harfi üst sınır olarak kullanıldığından, integrasyon değişkeni olarak τ ("tau") Yunan harfini kullanırız.



ŞEKİL 13.16 Eğri üzerindeki $P(t_0)$'dan herhangi bir $P(t)$ noktasına olan yönlü uzaklık şöyledir:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{v}(\tau)|\,d\tau.$$

$P(t_0)$ Baz Noktası ile Yay Uzunluğu Parametresi

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 + [z'(\tau)]^2}\,d\tau = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{v}(\tau)|\,d\tau \qquad (3)$$

Bir $\mathbf{r}(t)$ eğrisi bir t parametresi cinsinden verilmişse ve $s(t)$, (3) denklemi ile verilen yay uzunluğu fonksiyonu ise, *t*'yi *s*'nin bir fonksiyonu olarak çözebiliriz, $t = t(s)$. Bu durumda *t* yerine değerini yazarak, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$, eğriyi *s* cinsinden parametrize edebiliriz.

ÖRNEK 2 Bir Yay Uzunluğu Parametrizasyonu Bulmak

$t_0 = 0$ ise, t_0'dan *t*'ye kadar

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

helisi boyunca yay uzunluğu parametresi

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{v}(\tau)|\,d\tau \qquad \text{(3) Denklemi}$$

$$= \int_0^{t} \sqrt{2}\,d\tau \qquad \text{Örnek 1'deki değer}$$

$$= \sqrt{2}\,t$$

olur.

Bu eşitlikten t'yi çözersek $t = s/\sqrt{2}$ buluruz. Bu değeri $\mathbf{r}$'nin konum vektöründe yerine yazarsak helis için aşağıdaki yay uzunluğu parametrizasyonunu elde ederiz:

$$\mathbf{r}(t(s)) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} + \left(\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$ ■

Örnek 2'nin aksine, başka bir t parametresi cinsinden verilmiş bir eğri için yay uzunluğu parametrizasyonunu analitik olarak bulmak genellikle zordur. Neyse ki, $s(t)$ veya tersi $t(s)$ için tam bir formüle ender olarak ihtiyaç duyarız.

ÖRNEK 3 Bir Doğru Boyunca Uzaklık

$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ bir birim vektörse,

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + tu_1)\mathbf{i} + (y_0 + tu_2)\mathbf{j} + (z_0 + tu_3)\mathbf{k}$$

doğrusu üzerinde, $t = 0$ olan $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından olan yönlü uzaklığın t'nin kendisi olduğunu gösterin.

Çözüm

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(x_0 + tu_1)\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(y_0 + tu_2)\mathbf{j} + \frac{d}{dt}(z_0 + tu_3)\mathbf{k} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} = \mathbf{u}$$

olur, dolayısıyla

$$s(t) = \int_0^t |\mathbf{v}|\,d\tau = \int_0^t |\mathbf{u}|\,d\tau = \int_0^t 1\,d\tau = t$$

bulunur. ■

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Josiah Willard Gibbs
(1839–1903)

Düzgün Bir Eğri Üzerinde Sürat

(3) denklemindeki kökün altındaki türevler sürekli olduğu için (eğri düzgündür), Analizin Temel Teoremi s'nin t'nin türetilebilir bir fonksiyonu olduğunu ve türevinin

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}(t)| \tag{4}$$

olduğunu söyler. Beklediğimiz gibi, parçacığın yolu üzerinde ilerlediği sürat $\mathbf{v}$'nin büyüklüğüdür.

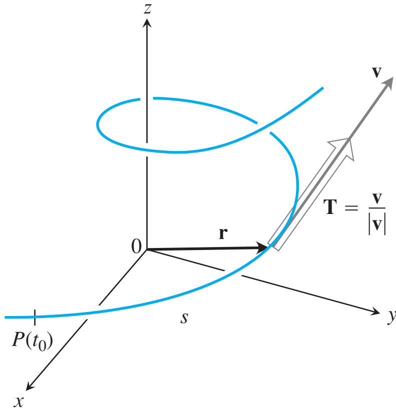
Baz noktası $P(t_0)$ (3) denkleminde s'yi tanımlayıcı bir rol oynarken, (4) denkleminde bir rol oynamadığına dikkat edin. Hareket eden bir parçacığın yolu üzerinde bir mesafe kat ettiği oranın baz noktasının ne kadar uzakta olduğuyla bir ilişkisi yoktur.

Ayrıca $ds/dt > 0$ olduğuna da dikkat edin, çünkü, tanım gereği, $|\mathbf{v}|$ düzgün bir eğri için asla sıfır olmaz. Bir kere daha s'nin t'nin artan bir fonksiyonu olduğunu görürüz.

Birim Teğet Vektör T

$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ hız vektörünün eğriye teğet olduğunu ve bu nedenle

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$



ŞEKİL 13.17 Birim teğet vektör **T**'yi, **v**'yi $|\mathbf{v}|$ ile bölerek buluruz.

vektörünün (düzgün) eğriye teğet olan bir birim vektör olduğunu zaten biliyoruz. Dikkate aldığımız eğriler için $ds/dt > 0$ olduğundan, s bire-birdir ve t'yi s'nin türetilebilir bir fonksiyonu olarak veren bir tersi vardır (Bölüm 7.1). Tersin türevi

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}$$

olur. Bu da **r**'yi s'nin türetilebilir bir fonksiyonu haline sokar. Türevi Zincir Kuralı ile

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \mathbf{v}\frac{1}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \mathbf{T}$$

olarak hesaplanır. Bu denklem, $d\mathbf{r}/ds$'nin **v** hız vektörü yönünde birim teğet vektör olduğunu söyler (Şekil 13.17).

TANIM Birim Teğet Vektör

Düzgün bir $\mathbf{r}(t)$ eğrisinin **birim teğet vektörü**

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \tag{5}$$

dir.

v t'nin türetilebilir bir fonksiyonu olduğu sürece, birim teğet vektör **T** de t'nin türetilebilir bir fonksiyonudur. Bölüm 13.5'te göreceğimiz gibi, **T** uzay araçlarının ve üç boyutta hareket eden diğer cisimlerin hareketini tanımlamakta kullanılan bir referans çerçevesinin üç birim vektöründen biridir.

ÖRNEK 4 Birim Teğet Vektör T'yi Bulmak

Bölüm 13.1, Örnek 4'teki planörün yolunu temsil eden

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

eğrisinin birim teğet vektörünü bulun.

Çözüm O örnekte

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(3\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

ve

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{9 + 4t^2}$$

bulduk. Böylece,

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -\frac{3\sin t}{\sqrt{9+4t^2}}\mathbf{i} + \frac{3\cos t}{\sqrt{9+4t^2}}\mathbf{j} + \frac{2t}{\sqrt{9+4t^2}}\mathbf{k}.$$

bulunur. ■

ÖRNEK 5 Birim Çember Üzerinde Hareket

Birim çember etrafında, saat yönünün tersine

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$$

hareketi için

$$\mathbf{v} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$$

zaten bir birim vektördür, dolayısıyla **T = v** olur (Şekil 13.18). ■

ŞEKİL 13.18 $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$ hareketi (Örnek 5).

ALIŞTIRMALAR 13.3

Birim Teğet Vektörleri ve Eğri Uzunlukları Bulmak

1–8 alıştırmalarında, eğrinin birim teğet vektörünü bulun. Ayrıca, eğrinin belirtilen parçasının uzunluğunu da bulun.

1. $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{j} + \sqrt{5}t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$
2. $\mathbf{r}(t) = (6\sin 2t)\mathbf{i} + (6\cos 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$
3. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2/3)t^{3/2}\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 8$
4. $\mathbf{r}(t) = (2 + t)\mathbf{i} - (t + 1)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 3$
5. $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{j} + (\sin^3 t)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2$
6. $\mathbf{r}(t) = 6t^3\mathbf{i} - 2t^3\mathbf{j} - 3t^3\mathbf{k}, \quad 1 \le t \le 2$
7. $\mathbf{r}(t) = (t\cos t)\mathbf{i} + (t\sin t)\mathbf{j} + \left(2\sqrt{2}/3\right)t^{3/2}\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$
8. $\mathbf{r}(t) = (t\sin t + \cos t)\mathbf{i} + (t\cos t - \sin t)\mathbf{j}, \quad \sqrt{2} \le t \le 2$
9. $$\mathbf{r}(t) = (5\sin t)\mathbf{i} + (5\cos t)\mathbf{j} + 12t\mathbf{k}$$

   eğrisi üzerinde, artan yay uzunluğu yönünde orijinden 26π birim uzaklıktaki noktayı bulun.
10. $$\mathbf{r}(t) = (12\sin t)\mathbf{i} - (12\cos t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$$

   eğrisi üzerinde, artan yay uzunluğu yönünün tersine orijinden 13π birim uzaklıktaki noktayı bulun.

Yay Uzunluğu Parametresi

11–14 alıştırmalarında, (3) denklemindeki

$$s = \int_0^t |\mathbf{v}(\tau)|\,d\tau$$

integralini $t = 0$ olan noktadan itibaren hesaplayarak, eğri boyunca yay uzunluğu parametresini bulun. Sonra eğrinin belirtilen kısmının uzunluğunu bulun.

11. $\mathbf{r}(t) = (4\cos t)\mathbf{i} + (4\sin t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2$
12. $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j}, \quad \pi/2 \le t \le \pi$
13. $\mathbf{r}(t) = (e^t\cos t)\mathbf{i} + (e^t\sin t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad -\ln 4 \le t \le 0$
14. $\mathbf{r}(t) = (1 + 2t)\mathbf{i} + (1 + 3t)\mathbf{j} + (6 - 6t)\mathbf{k}, \quad -1 \le t \le 0$

Teori ve Örnekler

15. **Yay uzunluğu**

   $$\mathbf{r}(t) = \left(\sqrt{2}t\right)\mathbf{i} + \left(\sqrt{2}t\right)\mathbf{j} + (1 - t^2)\mathbf{k}$$

   eğrisinin (0, 0, 1)'den $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$ 'a kadar uzunluğunu bulun
16. **Helisin Uzunluğu** Örnek 1'deki helisin bir dönüşünün uzunluğu $2\pi\sqrt{2}$, ayrıca bir kenarı 2π olan bir karenin köşegeninin uzunluğudur. Helisin etrafına sarıldığı silindirin bir kısmını kesip düzleştirerek bu karenin nasıl elde edileceğini gösterin.
17. **Elips**
   - **a.** Bir dik silindir ile bir düzlemin kesişim eğrisi olduğunu göstererek $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (1 - \cos t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$, eğrisinin bir elips olduğunu gösterin. Silindir ve düzlemin denklemlerini bulun.
   - **b.** Silindir üzerinde elipsi çizin. Çiziminize $t = 0, \pi/2, \pi$ ve $3\pi/2$'deki birim teğet vektörleri de ekleyin.
   - **c.** İvme vektörünün her zaman düzleme paralel (düzleme normal bir vektöre ortogonal) olacağını gösterin. Yani, ivmeyi elipse eklenmiş bir vektör olarak çizerseniz, elipsin düzleminde olacaktır. Çiziminize $t = 0, \pi/2$ ve $3\pi/2$'deki ivme vektörlerini ekleyin.
   - **d.** Elipsin uzunluğu için bir integral yazın. İntegrali hesaplamaya çalışmayın; elementer değildir.
   - T **e. Sayısal integral hesaplayıcı** Elipsin uzunluğunu iki ondalık basamak hassaslıkla hesaplayın.
18. **Uzunluk parametrizasyondan bağımsızdır** Uzaydaki düzgün bir eğrinin uzunluğunun, hesaplamak için kullandığınız

parametrizasyondan bağımsız olduğunu göstermek için, Örnek 1'deki helisin bir dönüşünün uzunluğunu aşağıdaki parametrizasyonlarla hesaplayın.

a. $\mathbf{r}(t) = (\cos 4t)\mathbf{i} + (\sin 4t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2$

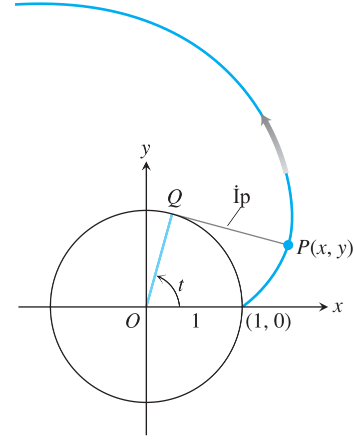
b. $\mathbf{r}(t) = [\cos(t/2)]\mathbf{i} + [\sin(t/2)]\mathbf{j} + (t/2)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 4\pi$

c. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j} - t\mathbf{k}, \quad -2\pi \le t \le 0$

19. Bir çemberin involutu Bir çembere dolanmış bir ip, çember düzleminde gergin tutularak çözülürse, ipin ucu, P, çemberin bir involutunu çizer. Şekle göre, sorudaki çember $x^2 + y^2 = 1$ birim çemberidir ve çizim noktası (1, 0)'dan başlar. İpin çözülmüş kısmı Q noktasında çembere teğettir ve pozitif x-ekseninden OQ doğru parçasına olan açının radyan ölçüsü t dir. İnvolut için $P(x, y)$ noktasının

$$x = \cos t + t\sin t, \quad y = \sin t - t\cos t, \quad t > 0$$

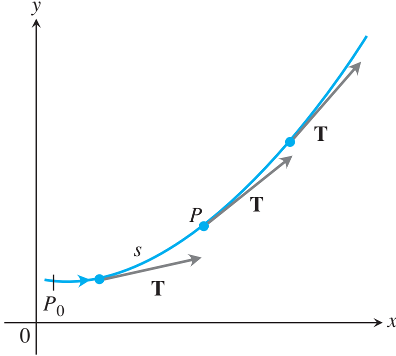
parametrik denklemlerini elde edin.



20. (*Alıştırma 19'un devamı*) Çemberin involutunun $P(x, y)$ noktasındaki birim teğet vektörünü bulun.

13.4 Eğrilik ve Birim Normal Vektör N

Bu bölümde bir eğrinin nasıl döndüğünü ve eğildiğini inceleyeceğiz. Önce koordinat düzlemlerindeki eğrilere, sonra uzaydaki eğrilere bakacağız..



ŞEKİL 13.19 P artan yay uzunluğu yönünde eğri boyunca ilerlerken, birim teğet vektör döner. $d\mathbf{T}/ds$'nin P'deki değerine eğrinin P'deki *eğriliği* denir.

Düzlemsel Bir Eğrinin Eğriliği

Bir parçacık düzgün bir düzlemsel eğri boyunca ilerlerken, eğri eğildikçe $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ döner. $\mathbf{T}$ bir birim vektör olduğundan, parçacık eğri boyunca ilerlerken, uzunluğu sabit kalır ve sadece yönü değişir. $\mathbf{T}$'nin eğri boyunca birim uzunluktaki dönüş oranına eğrilik denir (Şekil 13.19). Eğrilik fonksiyonunun alışılmış sembolü Yunan harfi κ ("kappa")'dır.

> **TANIM** **Eğrilik**
> $\mathbf{T}$, düzgün bir eğrinin birim teğet vektörüyse, eğrinin **eğrilik** fonksiyonu
> $$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$$
> olur.

$|d\mathbf{T}/ds|$ büyükse, parçacık P'den geçerken $\mathbf{T}$ keskin bir şekilde döner ve P'deki eğrilik büyüktür. $|d\mathbf{T}/ds|$ sıfıra yakınsa, $\mathbf{T}$ daha yavaş döner ve P'deki eğrilik daha küçüktür.

Düzgün bir $\mathbf{r}(t)$ eğrisi, s yay uzunluğu parametresinden farklı bir t parametresi cinsinden verilmişse, eğriliği aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

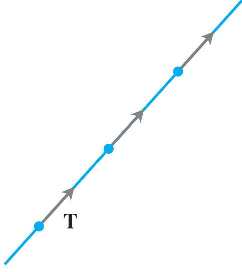
$$\begin{aligned}
\kappa &= \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}\right| && \text{Zincir Kuralı} \\
&= \frac{1}{|ds/dt|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| \\
&= \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|. && \frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}|
\end{aligned}$$

Eğriliği Hesaplama Formülü

$\mathbf{r}(t)$ düzgün bir eğri ise, $\mathbf{T} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ teğet bitim vektör olmak üzere, eğrilik

$$\kappa = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| \tag{1}$$

olur.



ŞEKİL 13.20 Bir doğru boyunca, **T** daima aynı yönü gösterir. Eğrilik, $|d\mathbf{T}/ds|$, sıfırdır (Örnek 1).

Tanımı test ederken, Örnek 1 ve 2'de, doğrular ve çemberler için eğriliğin sabit olduğunu görürüz.

ÖRNEK 1 Bir doğrunun eğriliği sıfırdır

Bir doğru üzerinde, birim teğet vektör **T** her zaman aynı yönü gösterir, dolayısıyla bileşenleri sabittir. Buradan, $|d\mathbf{T}/ds| = |\mathbf{0}| = 0$ olur (Şekil 13.20). ■

ÖRNEK 2 Yarıçapı a Olan Bir Çemberin Eğriliği $1/a$'dır

Nedenini anlamak için, a yarıçaplı bir çemberin

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j}$$

parametrizasyonu ile başlarız. Sonra,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(a\sin t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} = \sqrt{a^2} = |a| = a$$

$a > 0$ olduğundan $|a| = a$.

buluruz. Buradan,

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -(\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -(\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j}$$

$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

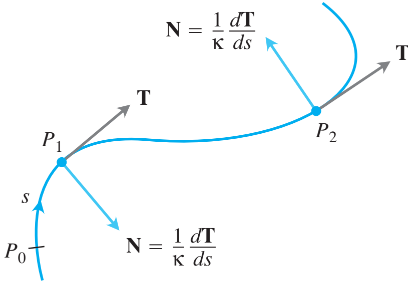
bulunur. Dolayısıyla, t parametresinin herhangi bir değeri için,

$$\kappa = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \frac{1}{a}(1) = \frac{1}{a}$$

elde ederiz. ■

(1) denklemindeki, κ'yı hesaplama formülü uzay eğrileri için de geçerli olmasına rağmen, gelecek bölümde, uygulaması genellikle daha uygun olan bir hesaplama formülü bulacağız.

Birim teğet vektör **T**'ye ortogonal vektörler arasında bir tanesinin özel bir önemi vardır çünkü eğrinin döndüğü yönü gösterir. **T**'nin uzunluğu sabit (değeri 1) olduğundan $d\mathbf{T}/ds$ türevi **T**'ye ortogonaldir (Bölüm 13.1). Bu nedenle, $d\mathbf{T}/ds$'yi kendi uzunluğu olan κ'ya bölersek, **T**'ye ortogonal bir **N** *birim* vektörü elde ederiz (Şekil 13.21).



ŞEKİL 13.21 Eğriye normal olan $d\mathbf{T}/ds$ vektörü daima **T**'nin döndüğü yönü işaret eder. **N** birim normal vektörü $d\mathbf{T}/ds$'nin yönüdür.

TANIM Asal Birim Normal

$\kappa \neq 0$ olan bir noktada, düzlemsel bir eğrinin **asal birim normal** vektörü şu şekilde verilir:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds}.$$

$d\mathbf{T}/ds$ vektörü, eğri büküldükçe **T**'nin döndüğü yönü işaret eder. Dolayısıyla, artan yay uzunluğu yönüne bakarsak, $d\mathbf{T}/ds$ vektörü, **T** saat yönünde dönüyorsa sağa, saat yönünün tersine dönüyorsa sola işaret eder. Başka bir deyişle, asal birim normal vektör **N** eğrinin konkav tarafını işaret edecektir (Şekil 13.21).

Düzgün bir $\mathbf{r}(t)$ eğrisi, s yay uzunluğu parametresinden farklı bir t parametresi cinsinden verilmişse, **N**'yi doğrudan hesaplamak için Zincir Kuralını kullanabiliriz:

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|} \\ &= \frac{(d\mathbf{T}/dt)(dt/ds)}{|d\mathbf{T}/dt||dt/ds|} \\ &= \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}. \qquad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} > 0 \text{ sadeleşir}\end{aligned}$$

Bu formül önce κ ve s'yi bulmak zorunda kalmadan **N**'yi bulmamızı sağlar.

N'yi Hesaplama Formülü

$\mathbf{r}(t)$ düzgün bir eğri ise, $\mathbf{T} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ teğet birim vektör olmak üzere, asal birim normal

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}, \qquad (2)$$

olur.

ÖRNEK 3 T ve N Bulmak

Aşağıdaki dairesel hareket için **T** ve **N**'yi bulun.

$$\mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j}.$$

Çözüm Önce **T**'yi buluruz.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= -(2\sin 2t)\mathbf{i} + (2\cos 2t)\mathbf{j} \\ |\mathbf{v}| &= \sqrt{4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t} = 2 \\ \mathbf{T} &= \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -(\sin 2t)\mathbf{i} + (\cos 2t)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Bundan,

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -(2\cos 2t)\mathbf{i} - (2\sin 2t)\mathbf{j}$$

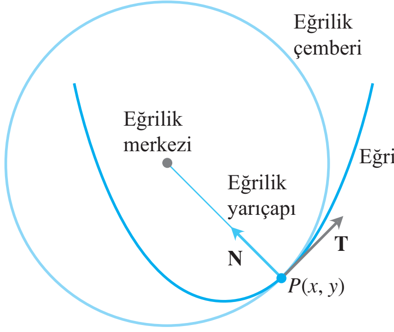
$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \sqrt{4\cos^2 2t + 4\sin^2 2t} = 2$$

ve

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}$$

$$= -(\cos 2t)\mathbf{i} - (\sin 2t)\mathbf{j} \qquad \text{(2) denklemi}$$

buluruz. $\mathbf{T}\cdot\mathbf{N} = 0$'a dikkat edin. Bu, **N**'nin **T**'ye ortogonal olduğunu gerçekler. Ayrıca, buradaki dairesel hareket için, **N**'nin $\mathbf{r}(t)$'den çemberin orijindeki merkezini işaret ettiğine de dikkat edin. ■



ŞEKİL 13.22 $P(x, y)$'de eğriye değen çember eğrinin iç tarafında bulunur.

Düzlem Eğriler İçin Eğrilik Çemberi

Düzlemsel bir eğri üzerinde, $\kappa \neq 0$ olan bir P noktasındaki **eğrilik çemberi** veya **değen çember** eğrinin düzleminde bulunan ve aşağıdaki koşulları sağlayan çemberdir:

1. Eğriye P'de teğettir (teğeti eğrininkiyle aynıdır);
2. P'deki eğriliği eğrininkiyle aynıdır; ve
3. Eğrinin konkav veya iç tarafında bulunur (Şekil 13.22).

Eğrinin P'deki **eğrilik yarıçapı** eğrilik çemberinin yarıçapıdır ve Örnek 2'ye göre

$$\text{Eğrinin yarıçapı} = \rho = \frac{1}{\kappa}$$

ile verilir. ρ'yu bulmak için, κ'yı bulur ve çarpmaya göre tersini alırız. Eğrinin P'deki **eğrilik merkezi** eğrilik çemberinin merkezidir.

ÖRNEK 4 Bir Parabolün Eğrilik Çemberini Bulmak

$y = x^2$ parabolünün orijindeki eğrilik çemberini bulun ve çizin.

Çözüm Parabolü, $t = x$ parametresi ile parametreleriz (Bölüm 10.4, Örnek 1):

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}.$$

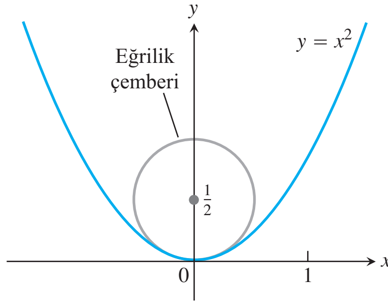
Önce, (1) denklemini kullanarak, parabolün orijindeki eğriliğini buluruz:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

ve dolayısıyla

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = (1 + 4t^2)^{-1/2}\mathbf{i} + 2t(1 + 4t^2)^{-1/2}\mathbf{j}.$$



ŞEKİL 13.23 $y = x^2$ parabolünün orijindeki eğrilik çemberi (Örnek 4).

Buradan,

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -4t(1 + 4t^2)^{-3/2}\mathbf{i} + [2(1 + 4t^2)^{-1/2} - 8t^2(1 + 4t^2)^{-3/2}]\,\mathbf{j}$$

buluruz. Orijinde $t = 0$ dır, dolayısıyla eğrilik

$$\kappa(0) = \frac{1}{|\mathbf{v}(0)|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}(0)\right| \qquad \text{(1) Denklemi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}}|0\mathbf{i} + 2\mathbf{j}|$$

$$= (1)\sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

olur. Bundan dolayı eğrilik yarıçapı $1/\kappa = 1/2$ ve çemberin merkezi $(0, 1/2)$ dir (Şekil 13.23'e bakın). Eğrilik çemberinin denklemi

$$(x - 0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

veya

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

tür.

Şekil 13.23'ten, eğrilik çemberinin, parabolün orijindeki $y = 0$ teğet yaklaşımından daha iyi bir yaklaşımı olduğunu görebilirsiniz. ■

Uzay Eğrileri İçin Eğrilik ve Normal Vektörler

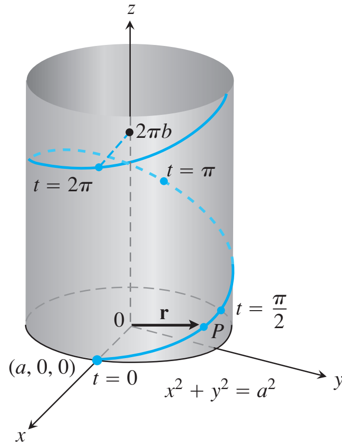
Uzayda bir düzgün eğri, bir t parametresinin fonksiyonu olarak $\mathbf{r}(t)$ konum vektörü ile belirlenmişse ve s eğrinin yay uzunluğu parametresi ise $\mathbf{T}$ birim teğet vektörü $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ dir. Bu durumda uzaydaki eğrilik, düzlem **eğriler** için olduğu gibi

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| \tag{3}$$

ile tanımlanır. $d\mathbf{T}/ds$ vektörü $\mathbf{T}$'ye ortogonaldir ve

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} \tag{4}$$

vektörünü **asal birim normal** olarak tanımlarız.



ŞEKİL 13.24
a ve b pozitif ve $t \geq 0$ için çizilmiş
$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$
helisi (Örnek 5).

ÖRNEK 5 Eğrilik Bulmak

Aşağıdaki helisin (Şekil 13.24) eğriliğini bulun.

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}, \qquad a, b \geq 0, \qquad a^2 + b^2 \neq 0$$

Çözüm Hız vektörü **v**'den **T**'yi hesaplarız:

$$\mathbf{v} = -(a \sin t)\mathbf{i} + (a \cos t)\mathbf{j} + b\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}[-(a \sin t)\mathbf{i} + (a \cos t)\mathbf{j} + b\mathbf{k}].$$

Sonra (3) denklemini kullanarak

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\left|\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}[-(a \cos t)\mathbf{i} - (a \sin t)\mathbf{j}]\right| \\
&= \frac{a}{a^2 + b^2}\left|-(\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j}\right| \\
&= \frac{a}{a^2 + b^2}\sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}
\end{aligned}$$

buluruz. Bu eşitlikten, sabit bir a değeri için b'yi arttırmanın eğriliği azaltacağını görürüz. Sabit bir b değeri için a'yı arttırmak da eğriliği azaltır. Bir yayı germek onu düzleştirir.

$b = 0$ ise, helis a yarıçaplı bir çembere ve eğriliği de, olması gerektiği gibi, $1/a$'ya indirgenir. $a = 0$ ise, helis z-ekseni haline gelir ve eğriliği de, yine olması gerektiği gibi, 0 olur. ■

ÖRNEK 6 Asal Birim Normal Vektör **N**'yi Bulmak

Örnek 5'teki helis için **N**'yi bulun.

Çözüm

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}[(a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}]$$

Örnek 5

$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sqrt{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}$$

(4) Denklemi

$$= -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}[(a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}]$$

$$= -(\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j}$$

buluruz. ■

ALIŞTIRMALAR 13.4

Düzlem Eğriler

1–4 alıştırmalarındaki düzlem eğrileri için **T**, **N** ve κ'yı bulun.

1. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (\ln \cos t)\mathbf{j}, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
2. $\mathbf{r}(t) = (\ln \sec t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
3. $\mathbf{r}(t) = (2t + 3)\mathbf{i} + (5 - t^2)\mathbf{j}$
4. $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}, \quad t > 0$
5. **Bir fonksiyonun *xy*-düzlemindeki grafiğinin eğriliği için bir formül.**
   a. *xy*-düzlemindeki $y = f(x)$ grafiğinin, $x = x$, $y = f(x)$ parametrizasyonu ve $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$ vektör formülü otomatik olarak vardır. Bu formülü, x'in iki kere türetilebilir bir f fonksiyonu için
   $$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{\left[1 + (f'(x))^2\right]^{3/2}}.$$
   olduğunu göstermekte kullanın.
   b. (a) şıkkında k için bulunan formülü kullanarak, $y = \ln(\cos x)$, $-\pi/2 < t < \pi/2$, fonksiyonunu eğriliğini bulun. Yanıtınızı Örnek 1'deki yanıtla karşılaştırın.
   c. Bir büküm noktasında eğriliğin sıfır olduğunu gösterin.
6. **Parametrize bir düzlem eğri için eğrilik formülü.**
   a. İki kere türetilebilir $x = f(t)$ ve $y = g(t)$ fonksiyonlarıyla tanımlanan düzgün bir $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ eğrisinin eğriliğinin
   $$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$
   formülüyle verildiğini gösterin.

   Formülü aşağıdaki eğrilerin eğriliklerini bulmakta kullanın.
   b. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (\ln \sin t)\mathbf{j}, \quad 0 < t < \pi$
   c. $\mathbf{r}(t) = [\tan^{-1}(\sinh t)]\mathbf{i} + (\ln \cosh t)\mathbf{j}$.
7. **Düzlem eğrilerin normalleri**
   a. $\mathbf{n}(t) = -g'(t)\mathbf{i} + f'(t)\mathbf{j}$ ve $-\mathbf{n}(t) = g'(t)\mathbf{i} - f'(t)\mathbf{j}$'nin ikisinin de $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ eğrisine $(f(t), g(t))$ noktasında normal olduklarını gösterin.

   Düzlemdeki belirli bir eğri için **N**'yi elde etmek amacıyla, (a) şıkkındaki eğrinin konkav tarafını gösteren **n** veya –**n**' den birini seçip, bunu bir birim vektör yapabiliriz (Şekil 13.21'e bakın). Bu yöntemi, **N**'yi bulmak için aşağıdaki eğrilere uygulayın.
   b. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j}$
   c. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{4 - t^2}\,\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad -2 \le t \le 2$
8. (*Örnek 7'nin devamı.*)
   a. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1/3)t^3\mathbf{j}$ eğrisi için $t < 0$ ve $t > 0$ iken **N**'yi bulmak üzere, Örnek 7'deki yöntemi kullanın.
   b. (a) şıkkındaki eğri için
   $$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}, \quad t \neq 0.$$
   değerini hesaplayın. $t = 0$'da, **N** bulunabilir mi? Eğriyi çizin ve t negatiften pozitif değerlere geçerken **N**'ye ne olduğunu açıklayın.

Uzay Eğrileri

9–16 alıştırmalarındaki eğriler için **T**, **N** ve κ'yı bulun.

9. $\mathbf{r}(t) = (3 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$
10. $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
11. $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
12. $\mathbf{r}(t) = (6 \sin 2t)\mathbf{i} + (6 \cos 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$
13. $\mathbf{r}(t) = (t^3/3)\mathbf{i} + (t^2/2)\mathbf{j}, \quad t > 0$
14. $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}, \quad 0 < t < \pi/2$
15. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (a \cosh(t/a))\mathbf{j}, \quad a > 0$
16. $\mathbf{r}(t) = (\cosh t)\mathbf{i} - (\sinh t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

Eğrilik Üzerine Başka Alıştırmalar

17. $y = ax^2$, $a \neq 0$, parabolünün en büyük eğriliğe tepe noktasında sahip olduğunu ve minimum eğriliğinin bulunmadığını gösterin. (*Not*: Bir eğri ötelendiğinde veya döndürüldüğünde eğriliği aynı kaldığı için, bu sonuç her parabol için geçerlidir.)
18. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $a > b > 0$, elipsinin en büyük eğriliğe büyük ekseni üzerinde, en küçük eğriliğe küçük ekseni üzerinde sahip olduğunu gösterin (Alıştırma 17'de olduğu gibi, aynısı her elips için geçerlidir).
19. **Bir helisin eğriliğini maksimize etmek** Örnek 5'te, $\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}$, $(a, b \ge 0)$ helisinin eğriliğini $\kappa = a/(a^2 + b^2)$ olarak bulmuştuk. Verilen bir b değeri için κ'nın en büyük değeri nedir? Yanıtınızı açıklayın.
20. **Toplam eğrilik** Düzgün bir eğrinin $s = s_0$'dan $s = s_1 > s_0$' a kadar olan kısmının **toplam eğriliğini** κ'yı s_0'dan s_1'e kadar integre ederek buluruz. Eğrinin başka bir parametresi varsa, örneğin t, toplam eğrilik, t_0 ve t_1 sırası ile s_0 ve s_1'e karşılık gelmek üzere,
   $$K = \int_{s_0}^{s_1} \kappa\, ds = \int_{t_0}^{t_1} \kappa \frac{ds}{dt}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \kappa |\mathbf{v}|\, dt$$
   olarak bulunur.
   a. $\mathbf{r}(t) = (3 \cos t)\mathbf{i} + (3 \sin t)\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ helisinin $0 \le t \le \pi/4$ arasındaki kısmının
   b. $y = x^2$, $-\infty < x < \infty$ parabolünün
21. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$ eğrisinin $(\pi/2, 1)$ noktasındaki eğrilik çemberinin denklemini bulun. (Eğri *xy*-düzlemindeki $y = \sin x$ grafiğini parametrize eder.)

22. $\mathbf{r}(t) = (2 \ln t)\mathbf{i} - [t + (1/t)]\mathbf{j}$, $e^{-2} \le t \le e^2$, eğrisinin $t = 1$ için $(0, -2)$ noktasındaki eğrilik çemberinin denklemini bulun.

Grafik Araştırmaları

Örnek 5'te türetilen

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{\left[1 + (f'(x))^2\right]^{3/2}}$$

Formülü, iki kere türetilebilen bir $y = f(x)$ düzlem eğrisinin $\kappa(x)$ eğriliğini x'in bir fonksiyonu olarak ifade eder. 23–26 alıştırmalarındaki eğrilerin her birinin eğrilik fonksiyonunu bulun. Sonra verilen aralıkta $f(x)$'in grafiğini $\kappa(x)$'in grafiğiyle birlikte çizin. Bazı sürprizlerle karşılaşacaksınız.

23. $y = x^2, \quad -2 \le x \le 2$

24. $y = x^4/4, \quad -2 \le x \le 2$

25. $y = \sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

26. $y = e^x, \quad -1 \le x \le 2$

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Eğrilik Çemberleri

27–34 Alıştırmalarında, bir düzlem eğrinin üzerinde $\kappa \ne 0$ olan bir P noktasına değen çemberi incelemek için bir BCS kullanacaksınız. Aşağıdaki adımları gerçekleştirmek için bir BCS kullanın.

a. Eğriyi belirtilen aralıkta verilen parametrik veya fonksiyon formunda çizerek neye benzediğini görün.

b. Örnek 5 veya 6'daki formüllerden uygun olanını kullanarak eğrinin verilen t_0 noktasındaki κ eğriliğini bulun. Eğri $y = f(x)$ fonksiyonu şeklinde verilmişse, $x = t$ ve $y = f(t)$ parametrizasyonunu kullanın.

c. t_0'daki birim normal vektör **N**'yi bulun. **N**'nin bileşenlerinin işaretlerinin, birim teğet vektör **T**'nin $t = t_0$'da saat yönüne mi, yoksa saat yönünün tersine mi döndüğüne bağlı olduğuna dikkat edin. (Alıştırma 7'ye bakın.)

d. Orijinden, eğrilik çemberinin merkezi (a, b)'ye giden vektör $\mathbf{C} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}$ ise, merkez **C**'yi

$$\mathbf{C} = \mathbf{r}(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\mathbf{N}(t_0)$$

vektör denkleminden bulun. Eğri üzerindeki $P(x_0, y_0)$ noktası konum vektörü $\mathbf{r}(t_0)$ ile verilir.

e. Değen çemberin denklemi $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1/\kappa^2$'yi kapalı olarak çizin. Sonra eğrinin grafiğini ve değen çemberi birlikte çizin. Görüntüleme çerçevenizin boyutlarını değiştirmek zorunda kalabilirsiniz, ama kare olmasına dikkat edin.

27. $\mathbf{r}(t) = (3 \cos t)\mathbf{i} + (5 \sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad t_0 = \pi/4$

28. $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad t_0 = \pi/4$

29. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^3 - 3t)\mathbf{j}, \quad -4 \le t \le 4, \quad t_0 = 3/5$

30. $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 2t^2 - t)\mathbf{i} + \dfrac{3t}{\sqrt{1 + t^2}}\mathbf{j}, \quad -2 \le t \le 5, \quad t_0 = 1$

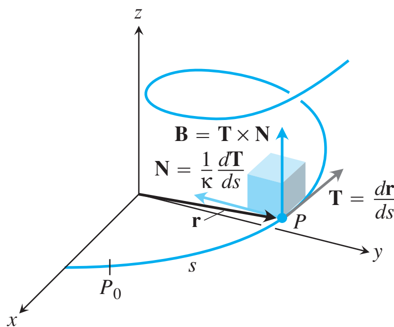
31. $\mathbf{r}(t) = (2t - \sin t)\mathbf{i} + (2 - 2\cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 3\pi,$ $t_0 = 3\pi/2$

32. $\mathbf{r}(t) = (e^{-t}\cos t)\mathbf{i} + (e^{-t}\sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 6\pi, \quad t_0 = \pi/4$

33. $y = x^2 - x, \quad -2 \le x \le 5, \quad x_0 = 1$

34. $y = x(1 - x)^{2/5}, \quad -1 \le x \le 2, \quad x_0 = 1/2$

13.5 Burulma ve Birim Binormal Vektör B

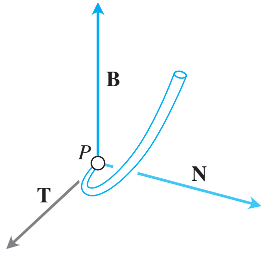


ŞEKİL 13.25 Uzayda bir eğri boyunca ilerleyen, ikişer ikişer ortogonal birim vektörlerin **TNB** çerçevesi.

Bir uzay eğrisi boyunca ilerliyorsanız, Kartezyen **i**, **j** ve **k** koordinat sistemi, hareketinizi tanımlayan vektörleri ifade etmek için size karşı cömert değildir. Bunların yerine anlamlı olan vektörler, ileriye doğru hareketinizi (birim teğet vektör **T**), yolunuzun döndüğü yönü (birim normal vektör **N**) ve bu vektörlerce belirlenen düzlemden bu düzleme dik doğrultuda dışarıya doğru "burulma " eğilimini ($\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ ile tanımlanan *birim binormal vektör*) temsil eden vektörlerdir. İvme vektörünü eğri boyunca, hareket ile birlikte ilerleyen ve ikişer ikişer ortogonal birim vektörlerden oluşan bu **TNB** çerçevesinin (Şekil 13.25) bir lineer kombinasyonu olarak ifade etmek, yolun doğası ve yol boyunca hareket hakkında özel olarak açıklayıcıdır.

Torsiyon

Uzaydaki bir eğrinin **binormal vektörü** $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$, hem **T**'ye hem de **N**'ye ortogonal bir birim vektördür (Şekil 13.26). **T**, **N** ve **B** birlikte, uzayda hareket eden parçacıkların uçuş yörüngelerinin hesaplanmasında önemli bir rol oynayan, hareketli ve sağ el kuralına uyan bir vektör çerçevesi tanımlarlar.



ŞEKİL 13.26 **T**, **N** ve **B** vektörleri (bu sırayla) uzayda ikişer ikişer aralarında ortogonal birim vektörlerden oluşan ve sağ el kuralına uyan bir çerçeve oluştururlar.

Bu çerçeveye **Frenet** ("fre-nay") **çerçevesi** (Jean-Frédérix Frenet'nin anısına, 1816-1900) veya **TNB çerçevesi** denir.

$d\mathbf{B}/ds$ vektörü **T**, **N** ve **B**'ye göre nasıl davranır? Vektörel çarpımın türev alma kuralından

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds}$$

buluruz. **N**, $d\mathbf{T}/ds$'nin yönü olduğundan, $(d\mathbf{T}/ds) \times \mathbf{N} = \mathbf{0}$ olur ve

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \mathbf{0} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds}$$

elde ederiz. Buradan, vektörel bir çarpım çarpanlarına dik olduğu için, $d\mathbf{B}/ds$'nin **T**'ye ortogonal olduğunu görürüz.

$d\mathbf{B}/ds$ ayrıca **B**'ye (uzunluğu sabittir) de dik olduğundan, $d\mathbf{B}/ds$ 'nin **B** ile **T**'nin düzlemine ortogonal olduğu anlaşılır. Başka bir deyişle, $d\mathbf{B}/ds$ **N**'ye paraleldir, dolayısıyla $d\mathbf{B}/ds$ vektörü **N**'nin bir skaler katıdır. Sembolik olarak,

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$$

Bu denklemdeki eksi işareti gelenekseldir. τ skalerine eğri boyunca *burulma* denir.

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N} = -\tau\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = -\tau(1) = -\tau$$

ve dolayısıyla

$$\tau = -\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N}$$

olduğuna dikkat edin.

TANIM **Torsiyon (Burulma)**

$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ olsun. Düzgün bir eğrinin **burulma** fonksiyonu

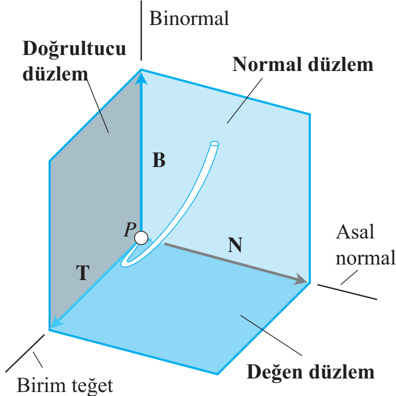
$$\tau = -\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N} \qquad (1)$$

ile verilir.

Asla negatif olmayan eğrilik κ'nın aksine, burulma τ pozitif, negatif veya sıfır olabilir.

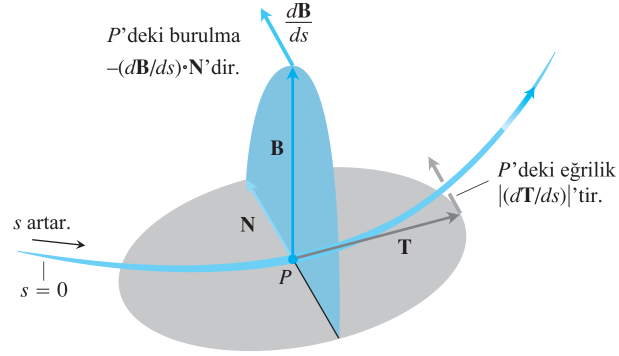
T, **N** ve **B** tarafından belirlenen düzlemler Şekil 13.27'de isimlendirilmiş ve gösterilmişlerdir. Eğrilik $\kappa = |d\mathbf{T}/ds|$, P noktası eğri boyunca ilerlerken, normal düzlemin dönme oranı olarak düşünülebilir. Benzer şekilde, burulma $\tau = -(d\mathbf{B}/ds) \cdot \mathbf{N}$ de, P eğri boyunca ilerlerken, değen düzlemin **T** etrafında dönme oranı olarak düşünülebilir. Burulma, eğrinin nasıl büküldüğünü ölçer.

Eğriyi hareket eden bir cismin yolu olarak düşünürsek, $|d\mathbf{T}/ds|$, cisim eğri boyunca ilerlerken, yolun sola veya sağa ne kadar döndüğünü söyler; $|d\mathbf{T}/ds|$'ye cismin yolunun *eğriliği* denir. $-(d\mathbf{B}/ds) \cdot \mathbf{N}$ sayısı bir cisim bir yol boyunca ilerlerken yolun



ŞEKİL 13.27 **T**, **N** ve **B**'nin belirlediği üç düzlemin isimleri.

hareket düzleminin dışına ne kadar döndüğünü veya kıvrıldığını söyler; buna da cismin yolunun *burulması* denir. Şekil 13.28'e bakın. *P* eğri bir ray üzerinde ilerleyen bir trense, birim mesafede farların bir yandan diğer yana dönüş oranı rayın eğriliğidir. Lokomotifin **T** ile **N**'nin oluşturduğu düzlemden dışarı çıkma eğilimi gösterdiği oransa burulmadır.



ŞEKİL 13.28 Hareket eden her cisim hareket ettiği yolu karakterize eden bir **TNB** çerçevesi ile ilerler.

İvmenin Teğet ve Normal Bileşenleri

Bir cisim yerçekimi, frenler, roket motorlarının bir birleşimi veya başka bir şey tarafından ivmelendirilirse, genellikle ivmenin ne kadarının hareket doğrultusunda, yani teğet **T** doğrultusunda etkidiğini bilmek isteriz. Bunu, Zincir Kuralını kullanarak **v**'yi

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{T}\frac{ds}{dt}$$

şeklinde yazıp, bu eşitlikler zincirinin iki tarafının da türevini alarak hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{T}\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{dt} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\left(\frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\left(\kappa\mathbf{N}\frac{ds}{dt}\right) \qquad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}.\end{aligned}$$

TANIM İVMENIN TEĞET VE NORMAL BİLEŞENLERİ

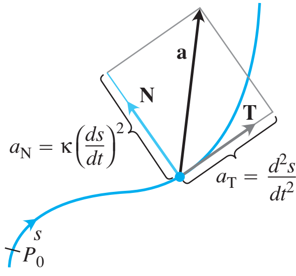
İvme

$$\mathbf{a} = a_{\mathrm{T}}\mathbf{T} + a_{\mathrm{N}}\mathbf{N} \tag{2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$a_{\mathrm{T}} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}|\mathbf{v}| \qquad \text{ve} \qquad a_{\mathrm{N}} = \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \kappa|\mathbf{v}|^2 \tag{3}$$

ivmenin **teğet** ve **normal** skaler bileşenleridir.



ŞEKİL 13.29 İvmenin teğet ve normal bileşenleri. **a** ivmesi her zaman **B**'ye ortogonal olan **T** ile **N**'nin düzleminde bulunur.

(2) denklemi içinde **B** binormal vektörünün yer almadığına dikkat edin. İzlediğimiz hareketli cismin yolu uzay içinde ne şekilde bükülür ve dönerse dönsün, **a** ivmesi her zaman B'ye dik olan **T** ve **N**'nin *düzleminde bulunur*. Denklem ayrıca ivmenin ne kadarının harekete teğet (d^2s/dt^2) ve ne kadarının harekete normal $[\kappa(ds/dt)^2]$ olduğunu söyler (Şekil 13.29).

(3) denklemlerinden hangi bilgileri edinebiliriz? Tanım olarak, **a** ivmesi **v** hızının değişim oranıdır ve genelde bir parçacık, yolu üzerinde ilerlerken, **v**'nin hem uzunluğu hem de yönü değişir. İvmenin teğet bileşeni a_T, **v**'nin *uzunluğunun* değişim oranını (yani, hızdaki değişikliği) ölçer. İvmenin normal bileşeni a_N, **v**'nin *yönünün* değişim oranını ölçer.

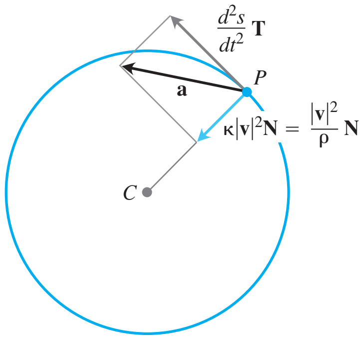
İvmenin normal skaler bileşeninin, eğrilik kere hızın *karesi* olduğuna dikkat edin. Bu, arabanız keskin (κ büyük), yüksek hızlı ($|\mathbf{v}|$ büyük) bir dönüş yaptığında neden tutunmanız gerektiğini açıklar. Arabanızın hızını iki katına çıkarırsanız, aynı eğrilik için ivmenin normal skaler bileşeninin dört katını hissedersiniz.

Eğer bir cisim bir çember üzerinde sabit hızla ilerlerse, d^2s/dt^2 sıfır olur ve ivme'nin tamamı **N** doğrultusunda çemberin merkezini gösterir. Cisim hızlanıyor veya yavaşlıyorsa, **a**'nın sıfırdan farklı bir teğet bileşeni vardır (Şekil 13.30).

a_N'yi hesaplamak için, genellikle $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a_T^2 + a_N^2$ denkleminden a_N çözülerek elde edilen $a_N = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_T^2}$, formülü kullanılır. Bu formülle, a_N'yi önce κ'yı hesaplamak zorunda kalmadan bulabiliriz.

İvmenin Normal Bileşenini Hesaplama Formülü

$$a_N = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_T^2} \qquad (4)$$



ŞEKİL 13.30 ρ yarıçaplı bir çemberin üzerinde saat yönünün tersine hareket ederken hızlanan bir cismin ivmesinin teğet ve normal bileşenleri.

ÖRNEK 1 İvmenin a_T ve a_N Skaler bileşenlerini Bulmak

T ve **N**'yi bulmadan,

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j}, \qquad t > 0$$

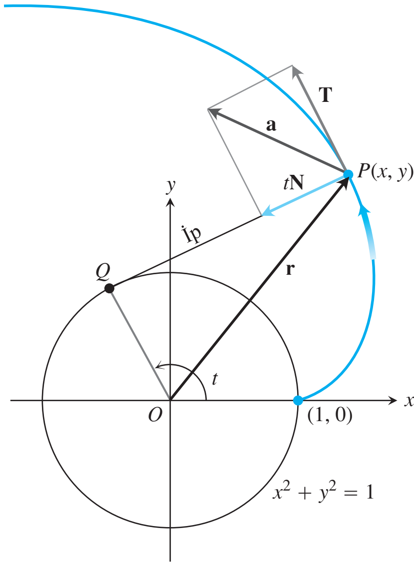
hareketinin ivmesini $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ şeklinde yazın. (Hareketin izlediği yol, Şekil 13.31'deki çemberin involutudur.)

Çözüm (3) denklemlerini kullanarak a_T'yi buluruz:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t + \sin t + t\cos t)\mathbf{i} + (\cos t - \cos t + t\sin t)\mathbf{j}$$
$$= (t\cos t)\mathbf{i} + (t\sin t)\mathbf{j}$$
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} = \sqrt{t^2} = |t| = t \qquad t > 0$$
$$a_T = \frac{d}{dt}|\mathbf{v}| = \frac{d}{dt}(t) = 1 \qquad \text{(3) Denklemi}$$

a_T'yi bildiğimize göre, (4) denklemini kullanarak a_N'yi bulabiliriz:

$$\mathbf{a} = (\cos t - t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t + t\cos t)\mathbf{j}$$
$$|\mathbf{a}|^2 = t^2 + 1 \qquad \text{Biraz işlemden sonra}$$
$$a_N = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_T^2}$$
$$= \sqrt{(t^2 + 1) - (1)} = \sqrt{t^2} = t$$



ŞEKİL 13.31 $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}$ hareketinin ivmesinin $t > 0$ için teğet ve normal bileşenleri. Sabit bir çemberin etrafına sarılmış bir ip, çemberin düzlemi içinde gergin tutularak çözülürse ip'in P ucu çemberin bir involutunu çizer (Örnek 1).

Sonra (2) denklemini kullanarak **a**'yı buluruz:

$$\mathbf{a} = a_{\mathrm{T}}\mathbf{T} + a_{\mathrm{N}}\mathbf{N} = (1)\mathbf{T} + (t)\mathbf{N} = \mathbf{T} + t\mathbf{N}$$ ■

Eğrilik ve Burulmayı Hesaplamak İçin Formüller

Şimdi düzgün bir eğrinin eğriliğini ve burulmasını hesaplamak için kullanımı kolay formüller vereceğiz. (2) denkleminden,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \left(\frac{ds}{dt}\mathbf{T}\right) \times \left[\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}\right] \qquad \mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = (ds/dt)\mathbf{T}$$

$$= \left(\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\right)(\mathbf{T} \times \mathbf{T}) + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^3(\mathbf{T} \times \mathbf{N})$$

$$= \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\mathbf{B}. \qquad \mathbf{T} \times \mathbf{T} = \mathbf{0} \text{ ve } \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \mathbf{B}$$

buluruz. Buradan

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{a}| = \kappa\left|\frac{ds}{dt}\right|^3|\mathbf{B}| = \kappa|\mathbf{v}|^3 \qquad \frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}| \text{ ve } |\mathbf{B}| = 1$$

olduğu ortaya çıkar. Buradan κ'yı çözmek aşağıdaki formülü verir.

Eğrilik İçin Vektör Formülü

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} \qquad (5)$$

(5) denklemi eğrinin geometrik bir özelliği olan eğriliği, $|\mathbf{v}|$'nin sıfırdan farklı olması koşulu ile eğrinin herhangi bir vektör temsilinin hızından ve ivmesinden hesaplar. Bir an durup, bunun aslında ne kadar önemli olduğunu düşünün: Bir eğri boyunca herhangi bir hareket formülünden eğrinin, hareket ne kadar değişken olursa olsun (**v** sıfır olmadığı sürece), eğrinin nasıl bir yol çizdiği ile hiç ilgisi yokmuş gibi görünen, fiziksel bir özelliğini hesaplayabiliyoruz.

Burulma için genelde kullanılan ve daha ileri kitaplarda türetilen formül şöyledir:

Newton'un türevler için nokta gösterimi

(6) denklemindeki noktalar t'ye göre türev almayı göstermektedir, her türev için bir nokta vardır. Yani, $\dot{x}$ ("x nokta) dx/dt, $\ddot{x}$ ("x iki nokta") d^2x/dt^2 ve $\dddot{x}$ ("x üç nokta") d^3x/dt^3 anlamına gelir. Benzer şekilde, $\dot{y} = dy/dt$, vs.

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2} \qquad (\mathbf{v} \times \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \text{ ise}) \qquad (6)$$

Bu formül burulmayı doğrudan, **r**'yi oluşturan $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ bileşen fonksiyonlarının türevlerinden hesaplar. Determinantın birinci satırı **v**'den, ikinci satırı **a**'dan ve üçüncü satırı da $\dot{\mathbf{a}} = d\mathbf{a}/dt$'den gelir.

ÖRNEK 2 Eğrilik ve Burulma Bulmak

(5) ve (6) denklemlerini kullanarak,

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}, \qquad a, b \geq 0, \qquad a^2 + b^2 \neq 0$$

helisi için κ ve t'yu hesaplayın.

Çözüm Eğriliği (50) denkleminden hesaplarız:

$$\mathbf{v} = -(a\sin t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j} + b\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = -(a\cos t)\mathbf{i} - (a\sin t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (ab\sin t)\mathbf{i} - (ab\cos t)\mathbf{j} + a^2\mathbf{k}$$

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^4}}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad (7)$$

(7) denkleminin, eğriliği doğrudan tanımından hesapladığımız Bölüm 13.4, Örnek 5'teki sonuçla uyuştuğuna dikkat edin.

Burulma için (6) denklemini hesaplarken, determinantın elemanlarını **r**' nin t'ye göre türevini alarak buluruz. Elimizde zaten **v** ile **a** vardır ve

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = (a\sin t)\mathbf{i} - (a\cos t)\mathbf{j}$$

olarak bulunur. Böylece,

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|^2} = \frac{\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}}{\left(a\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}$$

(7) Denkleminden $|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|$'nın değeri

$$= \frac{b(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)}{a^2(a^2+b^2)}$$

$$= \frac{b}{a^2+b^2}$$

elde ederiz.

Bu son denklemden, dik bir silindir etrafındaki bir helisin burulmasının sabit olduğunu görürüz. Aslında, sabit eğrilik ve sabit burulma uzaydaki bütün eğriler arasında helisleri karakterize eder. ■

Uzaydaki Eğriler İçin Formüller

Birim teğet vektör: $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

Asal birim normal vektör: $\mathbf{N} = \dfrac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}$

Binormal vektör: $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$

Eğrilik: $\kappa = \left|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \dfrac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}$

Burulma: $\tau = -\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N} = \dfrac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2}$

İvmenin teğet ve normal skaler bileşenleri:

$\mathbf{a} = a_{\mathrm{T}}\mathbf{T} + a_{\mathrm{N}}\mathbf{N}$

$a_{\mathrm{T}} = \dfrac{d}{dt}|\mathbf{v}|$

$a_{\mathrm{N}} = \kappa|\mathbf{v}|^2 = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_{\mathrm{T}}^2}$

ALIŞTIRMALAR 13.5

Burulma ve Binormal Vektör Bulmak

1-8 alıştırmalarındaki eğriler için Bölüm 13.4'te (9–16 alıştırmaları) **T**, **N** ve κ'yı buldunuz. Şimdi bu uzay eğrileri için **B** ve τ'yu bulun.

1. $\mathbf{r}(t) = (3 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$

2. $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

3. $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

4. $\mathbf{r}(t) = (6 \sin 2t)\mathbf{i} + (6 \cos 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$

5. $\mathbf{r}(t) = (t^3/3)\mathbf{i} + (t^2/2)\mathbf{j}, \quad t > 0$

6. $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}, \quad 0 < t < \pi/2$

7. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (a \cosh (t/a))\mathbf{j}, \quad a > 0$

8. $\mathbf{r}(t) = (\cosh t)\mathbf{i} - (\sinh t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

İvmenin Teğet ve Normal Bileşenleri

9 ve 10 alıştırmalarında **T** ve **N**'yi bulmadan, **a**'yı $a_{\mathrm{T}}\mathbf{T} + a_{\mathrm{N}}\mathbf{N}$ şeklinde yazın.

9. $\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$

10. $\mathbf{r}(t) = (1 + 3t)\mathbf{i} + (t - 2)\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$

11–14 alıştırmalarında **T** ve **N**'yi bulmadan, verilen t değerinde **a**'yı $a_{\mathrm{T}}\mathbf{T} + a_{\mathrm{N}}\mathbf{N}$ formunda yazın.

11. $\mathbf{r}(t) = (t + 1)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad t = 1$

12. $\mathbf{r}(t) = (t \cos t)\mathbf{i} + (t \sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad t = 0$

13. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t + (1/3)t^3)\mathbf{j} + (t - (1/3)t^3)\mathbf{k}, \quad t = 0$

14. $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + \sqrt{2}e^t\mathbf{k}, \quad t = 0$

15 ve 16 alıştırmalarında, verilen t değerinde **r**, **T**, **N** ve **B**'yi bulun. Sonra, t'nin bu değerindeki değen, normal ve doğrultucu düzlemlerin denklemlerini bulun.

15. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad t = \pi/4$

16. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t = 0$

Fiziksel Ugulamalar

17. Arabanızdaki sürat göstergesi sürekli 35 mil/sa göstermektedir. İvmeleniyor olabilir misiniz? Açıklayın.

18. Sabit bir süratle ilerleyen bir parçacığın ivmesi hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

19. İvmesi her zaman hızına dik olan bir parçacığın sürati hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

20. m kütleli bir cisim 10 birim/s'lik sabit süratle $y = x^2$ parabolü üzerinde ilerlemektedir. (0, 0) ve $(2^{1/2}, 2)$'de ivmesinden dolayı parçacığın üzerine etkiyen kuvvet nedir? Yanıtınızı **i** ve **j** cinsinden yazın (Newton yasası, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$'yı hatırlayın).

21. Aşağıda, *The American Monthly*'de yayınlanmış olan, Robert Osserman tarafından yazılmış "Seksenlerde Eğrilik" isimli (Ekim 1990, sayfa 731) makaleden bir alıntı vardır:

> Eğrilik fizikte de önemli bir rol oynar. Bir cismi eğri bir yol boyunca sabit süratle haraket ettirmek için gereken kuvvetin büyüklüğü, Newton yasalarına göre, yörüngelerin eğriliğinin sabit bir katıdır.

Alıntının ikinci cümlesinin matematiksel olarak neden doğru olduğunu açıklayın.

22. Hareket eden bir parçacığın ivmesinin normal bileşeni sıfırsa, parçacığın bir doğru üzerinde ilerlediğini gösterin.

23. Eğrilik için arada bir kullanılabilecek bir kestirme $|a_N|$ ve $|\mathbf{v}|$'yi biliyorsanız, $a_N = \kappa|\mathbf{v}|^2$ formülü eğriliği bulmak için uygun bir yol sağlar. Bunu kullanarak

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j}, \quad t > 0$$

eğrisinin eğriliğini ve eğrilik yarıçapını bulun (a_N ve $|\mathbf{v}|$'yi Örnek 1'den alın).

24. κ ve τ'nun ikisinin de

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + At)\mathbf{i} + (y_0 + Bt)\mathbf{j} + (z_0 + Ct)\mathbf{k}$$

eğrisi için sıfır olduğunu gösterin.

Teori ve Örnekler

25. Düzlemdeki (yeteri kadar türetilebilir) bir $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ eğrisinin burulması için ne söylenebilir? Yanıtınızı açıklayın.

26. Bir helisin burulması Örnek 2'de,

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}, \quad a, b \geq 0$$

helisinin burulmasını $\tau = b/(a^2 + b^2)$ olarak bulduk. Verilen bir a değerinde τ'nun en büyük değeri nedir? Yanıtınızı açıklayın.

27. Burulması sıfır olan eğriler bir düzlemde bulunurlar Burulması sıfır olan yeterince türetilebilir eğrilerin bir düzlemde bulunması, hızı bir **C** sabit vektörüne dik kalan bir parçacığın **C**'ye dik bir düzlemde hareket etmesinin özel bir durumudur. Bu, yine, aşağıdaki analiz probleminin çözümü olarak görülebilir.
$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$'nin $[a, b]$ aralığındaki her t için iki kere türetilebildiğini, $t = a$ iken $\mathbf{r} = 0$ ve $[a, b]$' deki her t için $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0$ varsayın. Bu durumda $[a, b]$' deki her t için $h(t) = 0$ dır. Bu problemi çözün (*İpucu*: $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2$ ile başlayın ve başlangıç koşullarını ters sırada uygulayın).

28. τ'yu B ve v'den hesaplayan bir formül $\tau = -(d\mathbf{B}/ds) \cdot \mathbf{N}$ tanımı ile başlayıp Zincir Kuralını uygulayarak $d\mathbf{B}/ds$'yi

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{dt}\frac{1}{|\mathbf{v}|}$$

şeklinde yazarsak,

$$\tau = -\frac{1}{|\mathbf{v}|}\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{N}\right)$$

formülünü buluruz. Bu formülün (6) denklemine göre avantajı türevinin alınmasının ve ifade edilmesinin daha kolay olmasıdır. Dezavantajı ise bir bilgisayar kullanmadan hesaplanmasının çok uğraştırıcı olmasıdır. Yeni formülü kullanarak Örnek 2'deki helisin burulmasını bulun.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Eğrilik, Burulma ve TNB Çerçevesi

Yanıtları dört ondalık basamağa yuvarlayarak, 29–32 alıştırmalarındaki eğriler için, verilen t değerlerinde, **v**, **a**, sürat, **T**, **N**, **B**, κ, τ ve ivmenin teğet ve normal bileşenlerini bulmak için bir BCS kullanın.

29. $\mathbf{r}(t) = (t\cos t)\mathbf{i} + (t\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t = \sqrt{3}$

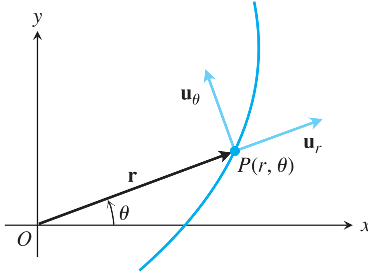
30. $\mathbf{r}(t) = (e^t\cos t)\mathbf{i} + (e^t\sin t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad t = \ln 2$

31. $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + \sqrt{-t}\,\mathbf{k}, \quad t = -3\pi$

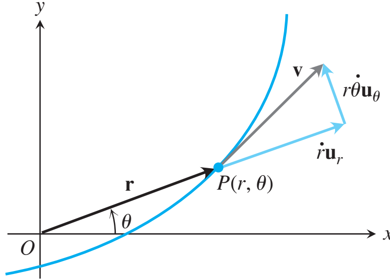
32. $\mathbf{r}(t) = (3t - t^2)\mathbf{i} + (3t^2)\mathbf{j} + (3t + t^3)\mathbf{k}, \quad t = 1$

13.6 Gezegen Hareketi ve Uydular

Bu bölümde, Newton'un hareket yasalarından Kepler'in gezegen hareketi yasalarını türetecek ve Dünya çevresindeki uyduların yörüngelerini tartışacağız. Kepler yasalarının Newton yasalarından türetilmesi analizin zaferlerinden biridir. Neredeyse, uzayda vektörlerin cebri ve geometrisi, vektör fonksiyonların analizi, diferansiyel denklem çözümleri ve başlangıç değer problemleri ile konik kesitlerin kutupsal koordinatlardaki tanımları da dahil olmak üzere, şimdiye kadar işlediğimiz her konuyu kullanır.



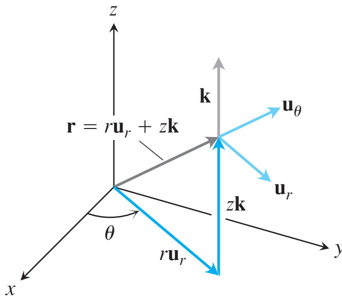
ŞEKİL 13.32 $\mathbf{r}$'nin uzunluğu P noktasının pozitif kutupsal koordinatı $\mathbf{r}$'dir. Yani, $\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ olan $\mathbf{u}_r$ aynı zamanda $\mathbf{r}/r$'dir. (1) denklemleri $\mathbf{u}_r$ ve $\mathbf{u}_\theta$'yı $\mathbf{i}$ ve $\mathbf{j}$ cinsinden ifade eder.



ŞEKİL 13.33 Kutupsal koordinatlarda, hız vektörü şöyledir:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$

$z \neq 0$ ise $|\mathbf{r}| \neq r$ olduğuna dikkat edin.



ŞEKİL 13.34 Silindirik koordinatlarda konum vektörü ve temel birim vektörler.

Kutupsal ve Silindirik Koordinatlarda Hareket

Bir parçacık kutupsal koordinat düzlemindeki bir eğri boyunca ilerlerken, konum, hız ve ivmesini Şekil 13.32'de gösterilen, hareketli

$$\mathbf{u}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}, \qquad \mathbf{u}_\theta = -(\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j}$$

birim vektörleriyle ifade ederiz. $\mathbf{u}_r$ vektörü $\overrightarrow{OP}$, konum vektörü yönünü gösterir, dolayısıyla $\mathbf{r} = r\,\mathbf{u}_r$ olur. $\mathbf{u}_r$ 'ye ortogonal olan $\mathbf{u}_\theta$ vektörü artan θ yönünü gösterir.

(1) denklemlerinden aşağıdakileri elde ederiz:

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} = -(\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j} = \mathbf{u}_\theta$$
$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = -(\cos\theta)\mathbf{i} - (\sin\theta)\mathbf{j} = -\mathbf{u}_r \tag{2}$$

$\mathbf{u}_r$ ve $\mathbf{u}_\theta$'nın zamana göre nasıl değiştiklerini görmek için, t'ye göre türevlerini alırsak, Zincir Kuralı

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta}\dot{\theta} = \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta, \qquad \dot{\mathbf{u}}_\theta = \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta}\dot{\theta} = -\dot{\theta}\mathbf{u}_r \tag{3}$$

verir. Buradan

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\left(r\,\mathbf{u}_r\right) = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \tag{4}$$

elde edilir. Şekil 13.33'e bakın. Önceki bölümdeki gibi, formülleri olabildiğince basit tutmak üzere zamana göre türevler için Newton'un nokta notasyonunu kullanıyoruz: $\dot{\mathbf{u}}_r$ 'nin anlamı $d\mathbf{u}_r/dt$, $\dot{\theta}$'nın anlamı $d\theta/dt$ vs. dir.

İvme

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = (\ddot{r}\mathbf{u}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{u}}_r) + (\dot{r}\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{u}}_\theta) \tag{5}$$

olarak bulunur. $\dot{\mathbf{u}}_r$ ve $\dot{\mathbf{u}}_\theta$'yı hesaplamak için (3) denklemleri kullanılır ve bileşenler ayrılırsa, ivme denklemi şu hali alır:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta \tag{6}$$

Bu hareket denklemlerini uzaya genişletmek için, $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$ denkleminin sağ tarafına $z\mathbf{k}$ ekleriz. Bu durumda, *silindirik koordinatlarda,*

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{k} \tag{7}$$
$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}$$

elde edilir.

$\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$ ve $\mathbf{k}$ vektörleri,

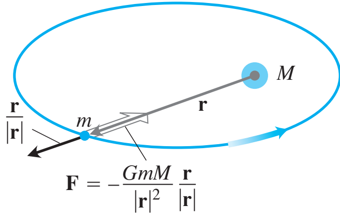
$$\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{u}_\theta \times \mathbf{k} = \mathbf{u}_r, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta. \tag{8}$$

olmak üzere, sağ el kuralına uyan bir çerçeve oluştururlar.

Gezegenler Düzlem Üzerinde Hareket Ederler

Newton'un Yerçekimi Yasası, $\mathbf{r}$, M kütleli bir güneşin merkezinden m kütleli bir gezegenin merkezine giden yarıçap vektörü ise, gezegen ile güneş arasındaki çekim kuvveti $\mathbf{F}$'nin

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{|\mathbf{r}|^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \tag{9}$$



ŞEKİL 13.35 Yerçekimi kuvveti kütle merkezlerini birleştiren doğru boyunca etki eder.

olduğunu söyler (Şekil 13.35). G sayısı **evrensel çekim sabiti**dir. Kütleyi kilogram, kuvveti newton ve uzaklığı metre olarak ölçersek, G yaklaşık olarak 6.6726×10^{-11} Nm^2 kg^{-2} civarında bulunur.

Gezegene etkiyen kuvveti bulmak için (9) denklemlerini Newtonun ikinci yasası, $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ ile birleştirmek

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GmM}{|\mathbf{r}|^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{|\mathbf{r}|^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \tag{10}$$

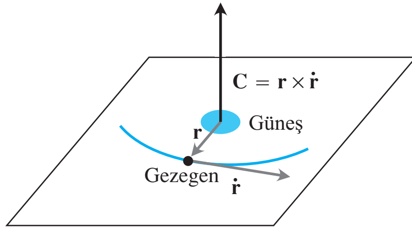
verir. Gezegen sürekli olarak güneşin merkezine doğru çekilmektedir.

(10) denklemi $\ddot{\mathbf{r}}$ 'nın $\mathbf{r}$'nin skaler bir katı olduğunu söyler, dolayısıyla

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0 \tag{11}$$

olur. Kolay bir işlem $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$ 'nın $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ 'nın türevi olduğunu gösterir:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}}_{\mathbf{0}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}. \tag{12}$$



ŞEKİL 13.36 Newton'un çekim ve hareket yasalarına uyan bir gezegen güneşin merkezinden geçen ve $\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$'ya dik olan düzlemde dolaşır.

Yani (11) denklemi

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}, \tag{13}$$

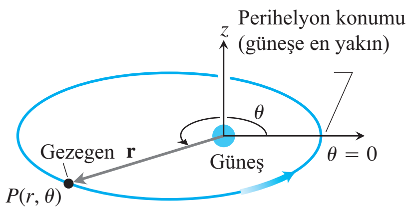
denklemine eşdeğerdir ve denklem integre edilirse, $\mathbf{C}$ bir sabit vektör olmak üzere,

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C} \tag{14}$$

bulunur.

(14) denklemi, $\mathbf{r}$ ve $\dot{\mathbf{r}}$'nın $\mathbf{C}$'ye dik bir düzlemde bulunduğunu söyler. Dolayısıyla, gezegen güneşinin merkezinden geçen sabit bir düzlemde hareket eder (Şekil 13.36).

Koordinatlar ve Başlangıç Koşulları



ŞEKİL 13.37 Gezegen hareketinin koordinat sistemi. Burada görüldüğü gibi, üstten bakılırsa ve $\dot{\theta} > 0$ ise, hareket saat yönünün tersindedir.

Şimdi silindirik koordinatları, orijini güneşin kütle merkezine yerleştiren ve gezegenin hareket düzlemini kutupsal koordinat düzlemi yapan bir şekilde tanımlayacağız. Bu $\mathbf{r}$'yi gezegenin kutupsal koordinatlardaki konum vektörü yapar ve $|\mathbf{r}|$'yi r'ye, $\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$'yi de $\mathbf{u}_r$'ye eşitler. Ayrıca, z-eksenini, $\mathbf{k}$ vektörü $\mathbf{C}$ yönünde olacak şekilde yerleştiririz. Böylece, $\mathbf{k}$ ile $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ arasındaki ilişki, $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ ile $\mathbf{C}$ arasında var olan aynı sağ el kuralına uyar ve pozitif z-ekseninden bakıldığında hareket saat yönünün tersinedir. Bu θ'nın t ile artmasına neden olur, böylece her t için $\dot{\theta} > 0$'dır. Son olarak, kutupsal koordinat düzlemini, gerekirse, z-ekseni etrafında döndürerek, başlangıç ışınının, gezegenin güneşe en yakın konumundaki $\mathbf{r}$ yönüyle çakışmasını sağlarız. Bu, ışını gezegenin **perihelyon** konumundan geçirir (Şekil 13.37).

Zamanı, perihelyonda $t = 0$ olacak şekilde ölçersek, gezegenin hareketi için aşağıdaki başlangıç koşullarını buluruz.

1. $t = 0$ iken, $r = r_0$, yani minimum yarıçap olur,
2. $t = 0$ iken $\dot{r} = 0$'dır (çünkü o anda r'nin bir minimum değeri vardır),
3. $t = 0$ iken $\theta = 0$'dır.
4. $t = 0$ iken $|\mathbf{v}| = v_0$ olur.

$$
\begin{aligned}
v_0 &= |\mathbf{v}|_{t=0} \\
&= |\dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta|_{t=0} && \text{(4) Denklemi} \\
&= |r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta|_{t=0} && t = 0 \text{ iken } \dot{r} = 0 \\
&= (|r\dot{\theta}||\mathbf{u}_\theta|)_{t=0} \\
&= |r\dot{\theta}|_{t=0} && |\mathbf{u}_\theta| = 1 \\
&= (r\dot{\theta})_{t=0}, && \text{Hem } r \text{ hem } \dot{\theta} \text{ pozitiftir.}
\end{aligned}
$$

olduğundan, ayrıca

5. $t = 0$ iken $r\dot{\theta} = v_0$ olur.

Kepler'in Birinci Kanunu (Konik Kesit Yasası)

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Johannes Kepler
(1571–1630)

Kepler'in birinci yasası, bir gezegenin izlediği yol, bir odağında güneş bulunan bir konik kesittir der. Koniğin dışmerkezliği

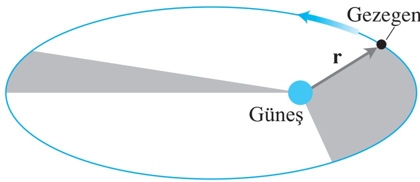
$$e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \tag{15}$$

ve kutupsal denklemi

$$r = \frac{(1 + e)r_0}{1 + e\cos\theta} \tag{16}$$

Formülün türetilmesi Kepler'in ikinci kanunun kullanılmasını gerektirir, o nedenle birinci kanunu ispatlamadan önce ikinci kanunun ifadesini verecek ve onu ispatlayacağız.

Kepler'in İkinci Kanunu (Eşit Alanlar Yasası)



ŞEKİL 13.38 Bir gezegeni güneşine bağlayan doğru eşit zamanlarda eşit alanlar tarar.

Kepler'in ikinci kanunu bir güneşten bir gezegene giden yarıçap vektörünün (bizim modelimizdeki **r** vektörü) eşit zamanlarda eşit alanlar taradığını söyler (Şekil 13.38). Yasayı türetmek için, (14) denklemindeki $\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ vektörel çarpımını hesaplamak üzere (4) denklemini kullanırız:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C} &= \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \\
&= r\mathbf{u}_r \times (\dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta) && \text{(4) Denklemi} \\
&= r\dot{r}\underbrace{(\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_r)}_{\mathbf{0}} + r(r\dot{\theta})\underbrace{(\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta)}_{\mathbf{k}} \\
&= r(r\dot{\theta})\mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

t'yi sıfıra eşitlemek

$$\mathbf{C} = [r(r\dot{\theta})]_{t=0}\,\mathbf{k} = r_0 v_0 \mathbf{k} \tag{18}$$

olduğunu gösterir. (17) denklemine bu **C** değerini yerleştirmek,

$$r_0 v_0 \mathbf{k} = r^2\dot{\theta}\mathbf{k}, \qquad \text{veya} \qquad r^2\dot{\theta} = r_0 v_0 \tag{19}$$

verir. İşte alan burada işin içine girmektedir. Kutupsal koordinatlardaki alan diferansiyeli

$$dA = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$$

ile verilir (Bölüm 10.7). Buna göre, dA/dt'nin değeri Kepler'in ikinci yasası olan

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}r_0 v_0. \tag{20}$$

sabitidir.

Dünya için, r_0 150.000.000.000 km civarında, v_0 30 km/s civarında ve dA/dt de 2.250.000.000 km^2/s civarındadır. Kalbiniz her çarptığında, Dünya yörüngesi boyunca 30 km kadar kat eder ve Dünya'yı güneşe bağlayan yarıçap 2.250.000.000 km^2'lik bir alan tarar.

Kepler'in Birinci Yasasının İspatı

Bir gezegenin, odaklarından birinde güneşin bulunduğu bir konik kesit üzerinde hareket ettiğini ispatlamak için, gezegenin yarıçapı r'yi θ'nın bir fonksiyonu olarak ifade etmemiz gerekir. Bu uzun bir işlem dizisi ve bazıları açık olmayan değişken dönüşümleri gerektirir.

(6) ve (10) denklemlerindeki $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$'nin katsayılarını eşitlemekle işe başlarız:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \tag{21}$$

$\dot{\theta}$'yı geçici olarak, yerine (19) denklemindeki $r_0 v_0 / r_2$ değerini yazarak ortadan kaldırırız ve ortaya çıkan denklemi düzenleyerek

$$\ddot{r} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2} \tag{22}$$

elde ederiz. Bunu bir değişken dönüşümüyle birinci derece bir diferansiyel denkleme dönüştürürüz.

$$p = \frac{dr}{dt}, \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dr}\frac{dr}{dt} = p\frac{dp}{dr}$$ Zincir Kuralı

ile, (22) denklemi

$$p\frac{dp}{dr} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2} \tag{23}$$

halini alır. 2 ile çarpıp, r'ye göre integre etmek

$$p^2 = (\dot{r})^2 = -\frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} + \frac{2GM}{r} + C_1 \tag{24}$$

verir. $t = 0$ iken, $r = r_0$ ve $\dot{r} = 0$ başlangıç koşulları C_1'in değerini

$$C_1 = v_0^2 - \frac{2GM}{r_0}$$

olarak belirlerler. Buna göre, (24) denklemi, uygun bir düzenlemeden sonra,

$$\dot{r}^2 = v_0^2\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \tag{25}$$

halini alır.

(21) denkleminden (25) denklemine geçişin etkisi, r'nin ikinci derece bir diferansiyel denkleminin yerine birinci derece bir diferansiyel denkleminin gelmesi olmuştur. Amacımız hala r'yi θ cinsinden yazmaktır, o nedenle θ'yı yeniden işin içine sokmamız gerekir. Bunu gerçekleştirmek için, (25) denkleminin iki tarafını da $r^2\dot{\theta} = r_0 v_0$ (19 denklemi)

denkleminin bunlara karşılık gelen taraflarının karesiyle böler ve $\dot{r}/\dot{\theta} = (dr/dt)/(d\theta/dt) = dr/d\theta$ olduğunu kullanarak

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GM}{r_0^2 v_0^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \\ &= \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} + 2h\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \qquad h = \frac{GM}{r_0^2 v_0^2}\end{aligned} \tag{26}$$

elde ederiz. Sonucu daha da basitleştirmek için, denklemde

$$u = \frac{1}{r}, \qquad u_0 = \frac{1}{r_0}, \qquad \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}, \qquad \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

yazarak,

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = u_0^2 - u^2 + 2hu - 2hu_0 = (u_0 - h)^2 - (u - h)^2, \tag{27}$$

$$\frac{du}{d\theta} = \pm\sqrt{(u_0 - h)^2 - (u - h)^2} \tag{28}$$

elde ederiz.

Hangi işareti almamız gerekir? $\dot{\theta} = r_0 v_0 / r^2$'nin pozitif olduğunu biliyoruz. Ayrıca, r de $t = 0$'da bir minimum değerden başlamaktadır, o nedenle hemen azalamaz ve en azından t'nin küçük pozitif değerleri için $\dot{\mathbf{r}} \geq 0$'dır. Dolayısıyla,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} \geq 0 \qquad \text{ve} \qquad \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} \leq 0$$

bulunur. (28) denklemi için doğru işaret negatif işarettir. Bunu belirledikten sonra, (28) denklemini düzenler ve iki tarafı da θ'ya göre integre ederiz:

$$\begin{aligned}\frac{-1}{\sqrt{(u_0 - h)^2 - (u - h)^2}}\frac{du}{d\theta} &= 1 \\ \cos^{-1}\left(\frac{u - h}{u_0 - h}\right) &= \theta + C_2\end{aligned} \tag{29}$$

C_2 sabiti sıfırdır, çünkü $\theta = 0$ iken $u = u_0$ ve $\cos^{-1}(1) = 0$'dir. Dolayısıyla,

$$\frac{u - h}{u_0 - h} = \cos\theta$$

ve

$$\frac{1}{r} = u = h + (u_0 - h)\cos\theta \tag{30}$$

elde edilir. Birkaç cebirsel manevra denklemin son halini verir:

$$r = \frac{(1 + e)r_0}{1 + e\cos\theta} \tag{31}$$

Burada

$$e = \frac{1}{r_0 h} - 1 = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \tag{32}$$

olarak verilir.

(31) ve (32) denklemleri birlikte, bir gezegenin yörüngesinin bir odağında güneş bulunan ve dışmerkezliği $(r_0 v_0^2/GM) - 1)$ olan bir konik kesit olduğunu söyler. Bu Kepler'in ilk yasasının modern formülasyonudur.

Kepler'in Üçüncü Kanunu (Zaman-Uzaklık Kanunu)

Bir gezegenin, güneşi etrafında bir kere dönmesi için gereken T zamanı gezegenin **yörüngesel periyodu**dur. *Kepler'in üçüncü kanunu* T'nin ve yörüngenin yarı büyük ekseni a'nın

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \tag{33}$$

denklemiyle birbirine bağlı olduğunu söyler. Belirlenen bir güneş sisteminde bu denklemin sağ tarafı sabit olduğu için, T^2'nin a^3'e oranı *sistemdeki her gezegen için aynıdır.*

Kepler'in üçüncü kanunu, güneş sistemimizin büyüklüğünü hesaplamanın çıkış noktasıdır. Her gezegenin yörüngesinin yarı büyük ekseninin, astronomik birimlerle ifade edilmesini sağlar. Dünyanın yarı büyük ekseni bir birimdir. Herhangi bir anda iki gezegen arasındaki mesafe astronomik birimlerle tahmin edilebilir ve geriye kalan bu mesafeleri kilometreye çevirmektir. Bu, örneğin, Venüs'ten radar dalgaları yansıtarak yapılabilir. Astronomik birimin, böyle bir seri ölçümden sonra, 149.597.870 km olduğu bilinmektedir.

Kepler'im üçüncü yasasını gezegenin eliptik yörüngesinin kapladığı alanın iki formülünü birleştirerek türetiriz:

Formül 1: $\text{Alan} = \pi ab$ — *a'nın yarı büyük eksen, b'nin de yarı küçük eksen olduğu geometrik formül*

Formül 2:

$$\begin{aligned} \text{Alan} &= \int_0^T dA \\ &= \int_0^T \frac{1}{2} r_0 v_0 \, dt \qquad \text{(20) Denklemi} \\ &= \frac{1}{2} T r_0 v_0 . \end{aligned}$$

Bunları eşitlemek

$$T = \frac{2\pi ab}{r_0 v_0} = \frac{2\pi a^2}{r_0 v_0}\sqrt{1 - e^2} \qquad \text{Herhangi bir elips için, } b = a\sqrt{1-e^2} \tag{34}$$

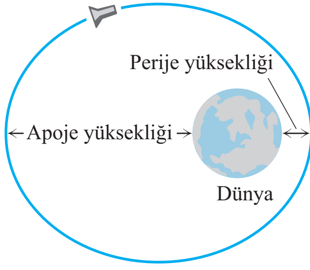
verir. Artık geriye sadece a ve e'yi r_0, v_0, G ve M cinsinden ifade etmek kalır. (32) denklemi e'yi bu şekilde verir. a için, (31) denkleminde θ'yı π'ye eşitlemenin

$$r_{\max} = r_0 \frac{1 + e}{1 - e}$$

verdiğini gözleriz. Dolayısıyla,

$$2a = r_0 + r_{\max} = \frac{2r_0}{1 - e} = \frac{2r_0 GM}{2GM - r_0 v_0^2} \tag{35}$$

bulunur. (34) denkleminin iki tarafının da karesini alıp, (32) ve (35) denklemlerinin sonuçlarını koymak Kepler'in üçüncü kanununu verir (Alıştırma 15).



ŞEKİL 13.39 Dünya çevresindeki bir uydunun hareketi: $2a$ = dünyanın çapı + perije yüksekliği + apoje yüksekliği.

Yörünge Verileri

Kepler, yasalarını gözlemsel olarak bulmasına ve onları sadece o zaman bilinen altı gezegen için söylemesine rağmen, Kepler'in yasalarının modern türetilişi, bunların, (9) denklemi gibi bir ters kare yasasına uyan bir kuvvetin etkisindeki her cisim için geçerli olduğunu göstermiştir. Halley kuyruklu yıldızı ve Icarus asteroidi için de geçerlidirler. Ayın dünya çevresindeki yörüngesine uygulanabilirler ve *Apollo* 8 uzay aracının ay çevresindeki yörüngesine uygulanmışlardır.

13.1-13.3 Tabloları, gezegen yörüngeleri ve Dünya'nın yedi tane yapay uydusunun yörüngeleri (Şekil 13.39) hakkında ek bilgi verir. *Vanguard* I Dünya'daki okyanusların seviyelerindeki farkları ortaya koyan veriler göndermiş ve ıssız Pasifik adalarının bazılarının kesin yerlerinin ilk defa belirlenmesini sağlamıştır. Veriler ayrıca güneşin ve ayın çekimlerinin Dünya'nın uydularının yörüngelerini etkileyebileceğini ve güneş radyasyonunun bir yörüngeyi bozabilecek kadar basınç uygulayabileceğini doğrulamıştır.

TABLO 13.1 Büyük gezegenler için a, e ve T değerleri

Gezegen	Yarı büyük eksen a^*	Dışmerkezlik e	Periyod T
Merkür	57.95	0.2056	87.967 gün
Venüs	108.11	0.0068	224.701 gün
Dünya	149.57	0.0167	365.256 gün
Mars	227.84	0.0934	1.8808 yıl
Jupiter	778.14	0.0484	11.8613 yıl
Satürn	1427.0	0.0543	29.4568 yıl
Uranüs	2870.3	0.0460	84.0081 yıl
Neptün	4499.9	0.0082	164.784 yıl
Plüto	5909	0.2481	248.35 yıl

* Milyon kilometre

TABLO 13.2 Dünya uyduları hakkında bilgi

İsim	Atılış tarihi	Kaldığı veya beklenen kalış süresi	Atılıştaki kütle (kg)	Periyod (min)	Perije yüksekliği (km)	Apoje yüksekliği (km)	Yarı büyük eksen a (km)	Dışmerkezlik
Sputnik 1	Ekim 1957	57.6 gün	83.6	96.2	215	939	6955	0.052
Vanguard 1	Mart 1958	300 yıl	1.47	138.5	649	4340	8872	0.208
Syncom 3	Ağus. 1964	$>10^6$ yıl	39	1436.2	35,718	35,903	42,189	0.002
Skylab 4	Kasım 1973	84.06 gün	13,980	93.11	422	437	6808	0.001
Tiros II	Ekim 1978	500 yıl	734	102.12	850	866	7236	0.001
GOES 4	Eylül 1980	$>10^6$ yıl	627	1436.2	35,776	35,800	42,166	0.0003
Intelsat 5	Aralık 1980	$>10^6$ yıl	1928	1417.67	35,143	35,707	41,803	0.007

TABLO 13.3 Sayısal veriler

Evrensel Çekim sabiti:	$G = 6.6726 \times 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2}
Güneşin kütlesi:	1.99×10^{30} kg
Dünyanın kütlesi:	5.975×10^{24} kg
Dünyanın ekvatordaki yarıçapı:	6378.533 km
Dünyanın kutupsal yarıçapı:	6356.912 km
Dünyanın dönme periyodu:	1436.1 min
Dünyanın yörüngesel periyodu:	1 yıl = 365.256 gün

Syncom 3 Amerikan Savunma Bakanlığı'nın haberleşme uydularından biridir. Tiros 11 ("Televizyon kızılötesi gözlem uydusu"nun kısaltılması) bir hava tahmin uyduları serisinden biridir. GOES 4 ("geostationary operational environmental satellite"- "jeostasyoner operasyonel çevresel uydu" kısaltması) dünyanın atmosferi hakkında bilgi toplamak için tasarlanmış bir uydular serisinden bir uydu. Yörünge periyodu, 1436.2 dak, neredeyse dünyanın dönme periyoduyla (1436.1 dak) aynıdır ve yörüngesi neredeyse daireseldir ($e = 0.0003$). *İntelsat 5* yüksek kapasiyeli bir ticari telekomünikasyon uydusudur.

ALIŞTIRMALAR 13.6

Hatırlatma: Bir hesaplama çekim sabiti G'yi içeriyorsa, kuvveti newton, uzaklığı metre, kütleyi kilogram, zamanı da saniye olarak ifade edin.

1. ***Skylab* 4'ün periyodu** *Skylab 4*'ün yörüngesinin yarı büyük ekseni $a = 6808$ km olduğundan, M dünyanın kütlesine eşit olmak üzere Kepler'in üçüncü yasasının periyodu vermesi gerekir. Bunu hesaplayın. Sonucunuzu Tablo 13.2'deki değerle karşılaştırın.

2. **Dünyanın perihelyondaki hızı** Dünyanın perihelyonda güneşten uzaklığı yaklaşık olarak 149.577.000 km ve dünyanın güneş çevresindeki yörüngesinin dışmerkezliği 0.0167'dir. Dünya perihelyondayken, hızı v_0'ı bulun (15 denklemini kullanın).

3. ***Proton I*'in yarı büyük ekseni** Temmuz 1965'te, SSCB ağırlığı 12.200 kg (kalkışta), perije yüksekliği 183 km, apoje yüksekliği 589 km ve periyodu 92.25 dakika olan *Proton 1*'i fırlattı. Dünyanın kütlesinin ve çekim sabiti G'nin verilen değerlerini kullanarak, (3) denkleminden yörüngenin yarı büyük ekseni a' yı bulun. Yanıtınızı perije ile apoje yüksekliklerini dünyanın çapına ekleyerek bulduğunuz sayıyla karşılaştırın.

4. ***Viking I*'in yarı büyük ekseni** Ağustos 1975'ten Haziran 1976'ya kadar Mars'ı araştıran Viking 1 uydusunun periyodu 1639 dakikaydı. Bunu ve Mars'ın kütlesinin 6.418×10^{23} kg olduğunu kullanarak, *Viking 1*'in yörüngesinin yarı büyük eksenini bulun.

5. **Mars'ın ortalama çapı** (*Alıştırma 4'ün devamı*) *Viking I* uydusu Mars'tan en yakın noktada 1499 km, en uzak noktada ise 35.800 km uzaktaydı. Bu bilgileri ve (a) şıkkında bulduğunuz değeri kullanarak, Mars'ın ortalama çapını hesaplayın.

6. ***Viking 2*'nin periyodu** Eylül 1975'ten Ağustos 1976'ya kadar Mars'ı inceleyen *Viking 2* uydusu, yarı büyük ekseni 22.030 km olan bir elips üzerinde ilerliyordu. Yörüngesel periyodu neydi? (Yanıtınızı dakika olarak verin.)

7. **Jeosenkronize yörüngeler** Dünyanın ekvator düzlemindeki birkaç uydunun, periyotları dünyanın dönme periyoduyla aynı olan, dairesele yakın yörüngeleri vardır. Böyle yörüngelere *jeosenkronize* veya *jeostasyoner* denir, çünkü uyduyu Dünya yüzeyi üzerinde aynı noktada tutarlar.
   a. Bir jeosenkronize yörüngenin yarı büyük ekseni yaklaşık olarak nedir? Yanıtınızı açıklayın.
   b. Bir jeosenkronize yörünge dünyadan yaklaşık ne kadar yüksektedir?
   c. Tablo 13.2'deki uyduların hangilerinin (neredeyse) jeosenkronize yörüngeleri vardır?

8. Mars'ın kütlesi 6.418×10^{23} kg'dır. Mars çevresinde dönen bir uydu stasyoner (1477.4 dak olan Mars'ın dönme periyoduyla aynı

periyotlu) bir yörünge izleyecekse, yörüngesinin yarı büyük ekseni ne olmalıdır? Yanıtınızı açıklayın.

9. **Dünya'dan Ay'a uzaklık** Ayın dünya çevresindeki dönüşünün periyodu 2.36055×10^6 saniyedir. Ay ne kadar uzaktadır?

10. **Uydu hızı bulmak** Bir uydu Dünya çevresinde dairesel bir yörünge üzerinde ilerler. Uydunun süratini yörünge yarıçapının fonksiyonu olarak ifade edin.

11. **Yörünge peryotları** T saniye ve a metre olarak ölçülürse, güneş sistemimizdeki gezegenler, dünya çevresindeki uydular ve ay çevresindeki uydular için T^2/a^3'ün değeri nedir? (Ayın kütlesi 7.354×10^{22} kg'dır.)

12. **Yörünge tipi** (15) denklemindeki hangi v_0 değerleri için (16) denklemindeki yörünge bir çember, bir elips, bir parabol veya bir hiperboldür?

13. **Dairesel yörüngeler** Yörüngesi dairesel olan bir gezegenin sabit süratle ilerlediğini gösterin (*İpucu*: Kepler'in yasalarından birinin sonucudur).

14. **r**'nin düzlemdeki bir eğri üzerinde ilerleyen bir parçacığın konum vektörü, dA/dt'nin de vektörün alan tarama oranı olduğunu varsayın. Koordinatları tanımlamadan ve gerekli türevlerin var olduğunu varsayarak,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}|$$

denkleminin geçerliğini artım ve limitlerle veren geometrik bir yorum yapın.

15. **Keplerin üçüncü kanunu** Kepler'in üçüncü kanununun türetilişini tamamlayın (34 denklemini izleyen kısım).

16 ve 17 alıştırmalarında iki gezegen, gezegen A ve gezegen B, güneş çevresinde, A içteki ve B de dıştaki gezegen olmak üzere, dairesel yörüngelerde dönüyorlar. A ve B'nin t anındaki konumlarının sırasıyla

$$\mathbf{r}_A(t) = 2\cos(2\pi t)\mathbf{i} + 2\sin(2\pi t)\mathbf{j}$$

ve

$$\mathbf{r}_B(t) = 3\cos(\pi t)\mathbf{i} + 3\sin(\pi t)\mathbf{j},$$

olduğunu varsayın. Burada güneşin merkezde bulunduğu varsayılmakta ve uzaklık astronomik birimlerle ölçülmektedir (Gezegen A'nın gezegen B'den hızlı hareket ettiğine dikkat edin).

Gezegen A'daki insanlar güneşe değil, gezegenlerine güneş sistemlerinin merkezi olarak bakmaktadırlar.

16. Gezegen A'yı yeni koordinat sisteminin merkezi olarak kullanarak, gezegen B'nin t anındaki konumunun parametrik denklemlerini bulun. Yanıtınızı cos (πt) ve sin (πt) cinsinden ifade edin.

T 17. Gezegen A'yı merkez olarak kullanarak, gezegen B'nin izlediği yolun bir grafiğini çizin.

Bu alıştırma Kepler'in zamanından önceki, akıllarında dünya merkezli (gezegen A) bir güneş sistemi olan, insanların gezegenlerin hareketlerini anlamada çektikleri zorlukları örnekler (mesela, gezegen B = Mars). The *American Mathematical Monthly*, Vol. 97, Şubat 1990, s. 105-119'daki D.G. Saari'nin makalesine bakın.

18. Kepler, dünyanın güneş etrafındaki yörüngesinin odaklarından biri güneş olan bir elips olduğunu keşfetmiştir. $\mathbf{r}(t)$, t anında güneşin merkezinden dünyanın merkezine giden konum vektörü olsun. **w** da dünyanın Güney Kutbundan Kuzey Kutbuna giden vektör olsun. **w**'nın sabit olduğu ve elips düzlemine dik olmadığı (dünyanın ekseni eğiktir) bilinmektedir. $\mathbf{r}(t)$ ve **w** cinsinden, (i) perihelyonun, (ii) aphelyonun, (iii) ekinoksun, (iv) yaz gündönümü ve (v) kış gündönümünün matematiksel anlamını açıklayın.

Bölüm 13 Bölüm Tekrar Soruları

1. Vektör fonksiyonların türevlerini ve integrallerini alma kurallarını ifade edin. Örnekler verin.
2. Uzayda, yeterince türetilebilen bir eğri üzerinde hareket eden bir cismin hızını, süratini, hareket yönünü ve ivmesini nasıl tanımlar ve hesaplarsınız? Örnek verin.
3. Sabit uzunluklu vektör fonksiyonların türevlerinin ne gibi bir özelliği vardır? Bir örnek verin.
4. İdeal mermi hareketinin vektörel ve parametrik denklemleri nedir? Bir merminin maksimum yüksekliğini, uçuş zamanını ve menzilini nasıl bulursunuz? Örnekler verin.
5. Uzaydaki düzgün bir eğrinin bir parçasının uzunluğunu nasıl tanımlar ve hesaplarsınız? Bir örnek verin. Tanımda hangi matematiksel varsayımlar kullanılır?
6. Uzaydaki düzgün bir eğri üzerinde önceden seçilmiş bir baz noktasından itibaren uzaklığı nasıl ölçersiniz? Örnek verin.
7. Türetilebilir bir eğrinin birim teğet vektörü nedir? Bir örnek verin.
8. Düzlemdeki iki kere türetilebilen eğrilerin eğrilik, eğrilik çemberi (değen çember), eğrilik merkezi ve eğrilik yarıçaplarını tanımlayın. Örnekler verin. Hangi eğrilerin eğrilikleri sıfır veya sabittir?
9. Düzlemdeki bir eğrinin asal normal vektörü nedir? Ne zaman tanımlıdır? Nereye işaret eder? Örnek verin.
10. Uzaydaki eğriler için **N** ve κ'yı nasıl tanımlarsınız? Bu büyüklükler arasındaki ilişki nedir? Örnekler verin.

11. Bir eğrinin binormal vektörü nedir? Bir örnek verin. Bu vektörle eğrinin burulması arasındaki ilişki nedir? Örnek verin.

12. Hareket eden bir cismin ivmesini, teğet ve normal bileşenlerinin toplamı olarak yazabilmek için hangi formüller vardır? Örnek verin. Neden ivmeyi bu şekilde yazmak isteyelim? Ya cisim sabit süratle hareket ediyorsa? Ya sabit bir süratle bir çember üzerinde hareket ediyorsa?

13. Kepler'in yasalarını söyleyin. Neye uygulanırlar?

Bölüm 13 Problemler

Kartezyen Düzlemde Hareket

1 ve 2 problemlerinde, verilen t değerlerinde eğrilerin grafiklerini, hız ve ivme vektörlerini çizin. Sonra, **T** ve **N**'yi bulmadan, **a**'yı $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ şeklinde yazın ve verilen t değerlerinde κ'nın değerini bulun.

1. $\mathbf{r}(t) = (4\cos t)\mathbf{i} + \left(\sqrt{2}\sin t\right)\mathbf{j}, \quad t = 0$ ve $\pi/4$

2. $\mathbf{r}(t) = \left(\sqrt{3}\sec t\right)\mathbf{i} + \left(\sqrt{3}\tan t\right)\mathbf{j}, \quad t = 0$

3. Düzlemdeki bir parçacığın t anındaki konumu

$$\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}.$$

dir. Parçacığın en yüksek süratini bulun.

4. $\mathbf{r}(t) = (e^t\cos t)\mathbf{i} + (e^t\sin t)\mathbf{j}$ olsun. **r** ile **a** arasındaki açının hiç değişmediğini gösterin. Açı nedir?

5. Eğrilik bulmak P noktasında, düzlemde ilerleyen bir parçacığın hız ve ivmesi $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ ve $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$'dir. Parçacığın izlediği yolun P'deki eğriliğini bulun.

6. $y = e^x$ eğrisi üzerinde, eğriliğin en büyük olduğu noktayı bulun.

7. Bir parçacık xy-düzlemindeki bir birim çemberin üzerinde ilerlemektedir. t anındaki konumu, x ve y t'nin türetilebilir fonksiyonları olmak üzere, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ile verilmektedir. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{i} = y$ ise, dy/dt'yi bulun. Hareket saat yönüne mi, yoksa saat yönünün tersine midir?

8. $9y = x^3$ eğrisini izleyen pnömatik bir tüp içinde bir mesaj yolluyorsunuz (uzaklıklar metredir). (3, 3) noktasında $\mathbf{v}\cdot\mathbf{i} = 4$ ve $\mathbf{a}\cdot\mathbf{i} = -2$'dir. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{j}$ ve $\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}$'nin (3, 3)'teki değerlerini bulun.

9. Dairesel hareketi tanımlamak Bir parçacık bir düzlemde hız ve konum vektörleri hep dik olacak şekilde ilerlemektedir. Parçacığın merkezi orijinde olan bir çember üzerinde ilerlediğini gösterin.

10. Bir sikloid boyunca sürat Yarıçapı 1 ft ve merkezi C olan bir tekerlek x-ekseni boyunca saniyede yarım tur atarak sağa doğru yuvarlanmaktadır (Aşağıdaki şekle bakın). t. saniyede, tekerleğin çevresi üzerindeki P noktasının konum vektörü

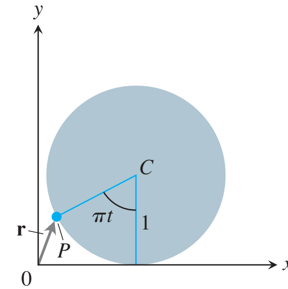
$$\mathbf{r} = (\pi t - \sin \pi t)\mathbf{i} + (1 - \cos \pi t)\mathbf{j}$$

ile verilir.

a. $0 \le t \le 3$ aralığında P'nin izlediği eğriyi çizin.

b. $t = 0, 1, 2$ ve 3'te **v** ve **a**'yı bulun ve bu vektörleri çiziminize ekleyin.

c. Herhangi bir zamanda, tekerleğin en tepedeki noktasının ve C'nin ileri doğru sürati nedir?



Mermi Hareketi ve Bir Düzlemde Hareket

11. Gülle atışı Bir gülle atıcının, yerden 6.5 ft yüksekteki elinden 45°'lik açıyla 44 ft/s süratle çıkıyor. 3 saniye sonra nerededir?

12. Cirit Bir cirit atıcının, yerden 7 ft yüksekteki elinden 45°'lik açıyla 80 ft/s süartle çıkıyor. Ne kadar yükselir?

13. Bir golf topuna, yatayla ϕ açısı yapan düzgün yüzeyli bir tepenin yamacından yatayla α açısı yapacak şekilde v_0 başlangıç süratiyle vurulmaktadır. Burada

$$0 < \phi < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

olarak verilmektedir. Topun tepenin üzerinden ölçülen

$$\frac{2v_0^2\cos\alpha}{g\cos^2\phi}\sin(\alpha - \phi)$$

uzaklığında yere düşeceğini gösterin. Buradan, verilen bir v_0 için en büyük menzilin $\alpha = (\phi/2) + (\pi/4)$ iken, yani başlangıç hızı vektörünün dikey ile tepe arasındaki açının açıortayı olduğu zaman, ortaya çıkacağını gösterin.

T **14. Diktatör** Sivil Savaş havan topu Diktatör o kadar ağırdı (17.120 lb) ki, bir trene yüklenmesi gerekiyordu. Ağzı 13 inçti ve 200 lb'-lik bir top fırlatmak için 20 lb barut harcıyordu. Havan, Pittsburg, Pensilvanya'daki işliğinde Bay Charles Knapp tarafından yapılmış ve 1864'te Petersburg, Virginia, kuşatmasında Kuzey ordusu tarafından kullanılmıştı. Ne kadar uzağa ateş edebiliyordu? Burada bir görüş ayrılığı vardır. Kullanım kitabı 4325 yd olduğunu iddia ederken, saha subayları 4752 yd olduğunu iddia ediyorlardı. 45°'lik bir ateşleme açısı varsayarak, burada hangi hızlar söz konusudur?

T **15. Bir şampanya mantarı patlama dünya rekoru**

a. 1988'e kadar, bir şampanya mantarı patlatma rekoru İngiliz Kraliyet Ordusu Topçu Yüzbaşısı (elbette ki) Michael Hill tarafından kırılan 109 ft 6 inçti. Yüzbaşı Hill'in şişeyi yerle 45∞ yapacak şekilde tuttuğunu ve mantarın ideal bir mermi gibi davrandığını varsayarak, mantarın şişeden ayrılma hızını bulun.

b. 117 ft 9 inçlik yeni rekor 5 Haziran 1988'de Rensselaer Politeknik Enstitüsü'nden Prof. Emeritus Heinrich tarafından Woodburry Bağları Şaraphanesi, New York'ta yerden 4 ft yüksekten atılarak kırılmıştır. İdeal bir yörünge varsayarsanız, mantarın ilk hızı nedir?

T **16. Cirit** 1988'de Potsdam'da, (o zamanki) Doğu Alman Petra Felke bir ciriti 262 ft 5 inç fırlatarak kadınlar dünya rekorunu kırdı.

a. Felke'nin ciriti yatayla 40°'lik bir açı yapacak şekilde yerden 6.5 ft yukarıdan attığını varsayarsak, ciritin ilk hızı neydi?

b. Cirit ne kadar yükseğe çıktı?

17. Senkronize eğriler İdeal mermi denklemleri olan

$$x = (v_0 \cos\alpha)t, \quad y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2,$$

denklemlerinden α'yı yok ederek, $x^2 + (y + gt^2/2) = v_0^2 t^2$ olduğunu gösterin. Bu orijinden aynı başlangıç süratiyle aynı anda fırlatılan mermilerin, herhangi bir anda, atış açılarına bakılmaksızın, merkezi $(0, -gt^2/2)$' de olan $v_0 t$ yarıçaplı çember üzerinde bulunduklarını gösterir. Bu çemberler atışın *senkronize eğrileri*dir.

18. Eğrilik yarıçapı İki kere türetilebilir bir $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ düzlem eğrisinin eğrilik yarıçapının

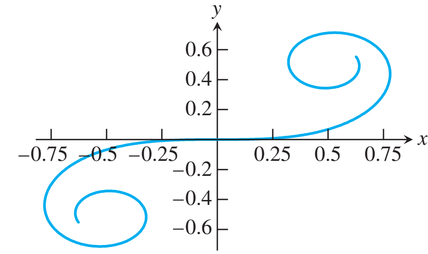
$$\ddot{s} = \frac{d}{dt}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \text{ olmak üzere } \rho = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 - \ddot{s}^2}}$$

olduğunu gösterin.

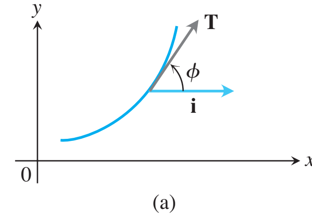
19. Eğrilik

$$\mathbf{r}(t) = \left(\int_0^t \cos\left(\frac{1}{2}\pi\theta^2\right) d\theta\right)\mathbf{i} + \left(\int_0^t \sin\left(\frac{1}{2}\pi\theta^2\right) d\theta\right)\mathbf{j}$$

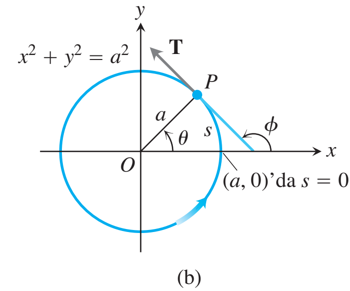
eğrisinin eğriliğini eğri boyunca orijinden ölçülen yönlü s mesafesinin fonksiyonu olarak ifade edin. (Şekle bakın.)



20. Düzlemde eğriliğin alternatif bir tanımı Alternatif bir tanım düzlemde yeterince türetilebilen bir eğrinin eğriliğini, **T** ile **i** arasındaki açı ϕ olmak üzere, $|d\phi/ds|$ olarak verir (Şekil 13.40a). Şekil 13.40b, $x^2 + y^2 = a^2$ çemberi üzerinde $(a, 0)$ noktasından bir P noktasına kadar saat yönünün tersine ölçülen s mesafesini, P'deki açısıyla birlikte göstermektedir. Alternatif tanımı kullanarak çemberin eğriliğini hesaplayın (*İpucu*: $\phi = \theta + \pi/2$).



(a)



(b)

ŞEKİL 13.40 Alıştırma 20'nin şekilleri

Uzayda Hareket

21 ve 22 problemlerindeki eğrilerin uzunluklarını bulun.

21. $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi/4$

22. $\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 3$

23–26 problemlerinde verilen t değerinde **T**, **N**, **B**, κ ve τ'yu bulun.

23. $\mathbf{r}(t) = \frac{4}{9}(1 + t)^{3/2}\mathbf{i} + \frac{4}{9}(1 - t)^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{3}t\mathbf{k}, \quad t = 0$

24. $\mathbf{r}(t) = (e^t \sin 2t)\mathbf{i} + (e^t \cos 2t)\mathbf{j} + 2e^t\mathbf{k}, \quad t = 0$

25. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}e^{2t}\mathbf{j}, \quad t = \ln 2$

26. $\mathbf{r}(t) = (3 \cosh 2t)\mathbf{i} + (3 \sinh 2t)\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}, \quad t = \ln 2$

27 ve 28 problemlerinde, **T** ve **N**'yi bulmadan, $t = 0$'da **a**'yı $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ şeklinde yazın.

27. $\mathbf{r}(t) = (2 + 3t + 3t^2)\mathbf{i} + (4t + 4t^2)\mathbf{j} - (6 \cos t)\mathbf{k}$

28. $\mathbf{r}(t) = (2 + t)\mathbf{i} + (t + 2t^2)\mathbf{j} + (1 + t^2)\mathbf{k}$

29. $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\sqrt{2} \cos t)\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}$ ise, **T**, **N**, **B**, κ ve τ' yu t'nin fonksiyonları olarak bulun.

30. $0 \le t \le \pi$ aralığının hangi zamanlarında $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + (5 \cos t)\mathbf{j} + (3 \sin t)\,\mathbf{k}$ hareketinin hız ve ivme vektörleri ortogonaldir?

31. $t \ge 0$ zamanında uzayda ilerleyen bir parçacığın konumu

$$\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + \left(4 \sin \frac{t}{2}\right)\mathbf{j} + \left(3 - \frac{t}{\pi}\right)\mathbf{k}$$

olarak verilmektedir. **r**'nin $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ vektörüne ilk olarak ne zaman ortogonal olduğunu bulun.

32. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ eğrisinin değen, normal ve doğrultucu düzlemlerinin denklemlerini bulun.

33. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + \ln(1 - t)\mathbf{k}$ eğrisine $t = 0$'da teğet olan doğrunun parametrik denklemlerini bulun.

34. $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2} \cos t)\mathbf{i} + (\sqrt{2} \sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ helisine $t = \pi/4$'te teğet olan doğrunun parametrik denklemlerini bulun.

35. ***Skylab 4*'ten bir manzara** *Skylab 4* apoje yüksekliğinde, yani yeryüzünden 437 km yüksekteyse, astronotlar Dünya yüzeyinin yüzde kaçını görebilirler? Bunu bulmak için, görünebilir yüzeyi aşağıda görülen GT yayının y-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzey olarak modelleyin. Sonra aşağıdaki adımları gerçekleştirin:

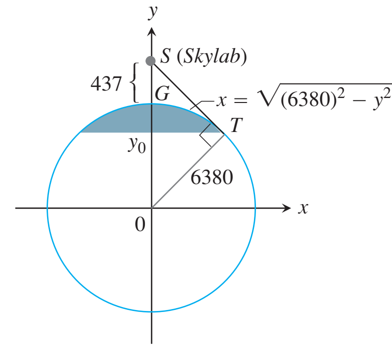
1. Şekildeki benzer üçgenleri kullanarak, $y_0/6380 = 6380/(6380 + 437)$ olduğunu gösterin. y_0'ı çözün.

2. Dört basamak hassaslıkla, görünebilir yüzeyi

$$VA = \int_{y_0}^{6380} 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

olarak hesaplayın.

3. Sonucu Dünya'nın yüzey alanının bir yüzdesi olarak ifade edin.



Bölüm 13 Ek ve İleri Alıştırmalar

Uygulamalar

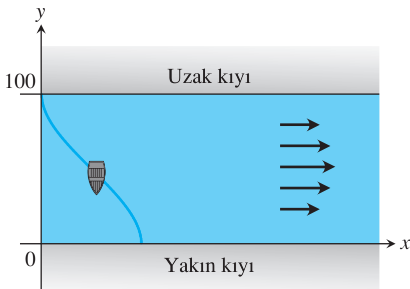
1. Düz bir nehir 100 m genişliğindedir. Bir sandal uzaktaki kıyıdan $t = 0$ anında ayrılmaktadır. Sandaldaki kişi sürekli yakın kıyıya doğru 20 m/dak süratle kürek çekmektedir. Nehrin (x, y)'deki hızı

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{1}{250}(y - 50)^2 + 10\right)\mathbf{i} \text{ m/min}, \quad 0 < y < 100$$

m/dak ile verilmektedir.

a. $\mathbf{r}(0) = 0\mathbf{i} + 100\mathbf{j}$ ise, t anında kayığın konumu nedir?

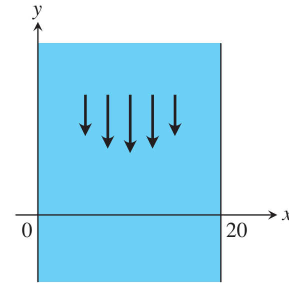
b. Sandal yakın kıyıya başladığı yerden ne kadar uzakta varacaktır?



2. Düz bir nehir 20 m genişliğindedir. Nehrin (x, y)'deki hızı

$$\mathbf{v} = -\frac{3x(20 - x)}{100}\mathbf{j} \text{ m/min}, \quad 0 \le x \le 20$$

ile verilmektedir. Bir sandal kıyıdaki (0, 0) noktasından ayrılır ve suda sabit bir hızla gider. Karşı kıyıya (20, 0)'da varır. Kayığın sürati hep $\sqrt{20}$ m/dak'dır.



a. Sandalın hızını bulun.

b. t anında sandalın konumunu bulun.

c. Sandalın izlediği yolu çizin.

3. $t = 0$ anında $(a, 0, 0)$ noktasından durgun durumdan harekete başlayan sürtünmesiz P parçacığı aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi yerçekiminin etkisiyle

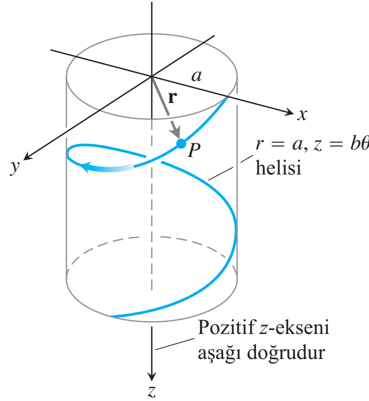
$$\mathbf{r}(\theta) = (a\cos\theta)\mathbf{i} + (a\sin\theta)\mathbf{j} + b\theta\mathbf{k} \quad (a, b > 0)$$

helisinden aşağı kaymaktadır. Bu denklemdeki θ silindirik koordinat θ'dır ve helis, silindirik koordinatlarda, $r = a,\ z = b\theta,\ \theta \geq 0$ eğrisidir. Hareket boyunca θ'nın t'nin türetilebilir bir fonksiyonu olduğunu varsayıyoruz. Enerji korunumu yasası z mesafesi kadar düştükten sonra parçacığın süratinin, g sabit yerçekimi ivmesi olmak üzere, $\sqrt{2gz}$, olduğunu söyler.

a. $\theta = 2\pi$ iken, açısal hız $d\theta/dt$'yi bulun.

b. Parçacığın θ- ve z-koordinatlarını t'nin fonksiyonları olarak ifade edin.

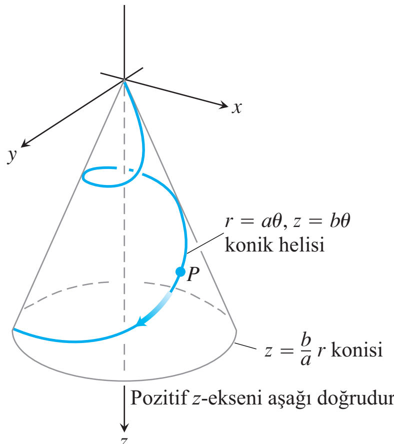
c. $d\mathbf{r}/dt$ hızı ve $d^2\mathbf{r}/dt^2$ ivmesinin teğet ve normal bileşenlerini t'nin fonksiyonları olarak ifade edin. İvmenin binormal $\mathbf{B}$ vektörü yönünde sıfırdan farklı bir bileşeni varmıdır?



4. Alıştırma 3'teki eğri yerine, aşağıdaki şekilde görülen $r = a\theta$, $z = b\theta$ konik helisinin konulduğunu varsayın.

a. Açısal hız $d\theta/dt$'yi θ'nın bir fonksiyonu olarak ifade edin.

b. Parçacığın helis üzerinde gittiği yolu θ'nın bir fonksiyonu olarak ifade edin



Kutupsal Koordinat Sistemi ve Uzayda Hareket

5.

$$r = \frac{(1 + e)r_0}{1 + e\cos\theta}$$

yörünge denkleminden bir gezegenin $\theta = 0$ iken güneşine en yakın durumda olduğunu çıkarın ve o anda $r = r_0$ olduğunu gösterin.

T **6. Bir Kepler denklemi** Verilen bir zaman ve tarihte bir gezegenin yörüngesi üzerinde nerede olduğunu belirleme problemi

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{2}\sin x = 0$$

şeklinde "Kepler" denklemlerini çözmeyi gerektirir.

a. Bu özel denklemin $x = 0$ ile $x = 2$ arasında bir çözümünün olduğunu gösterin.

b. Radyan modundaki bilgisayarınız veya hesap makinenizle, Newton yöntemini kullanarak yapabildiğiniz basamağa kadar çözümü bulun.

7. Bölüm 13.6'da, düzlemde ilerleyen bir parçacığın hızını

$$\mathbf{v} = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} = \dot{r}\,\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta$$

olarak bulduk.

a. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{i}$ ve $\mathbf{v}\cdot\mathbf{j}$ skaler çarpımlarını hesaplayarak, $\dot{x}$ ve $\dot{y}$ 'yı $\dot{r}$ ve $r\dot{\theta}$ cinsinden ifade edin.

b. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_r$ ve $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_\theta$ skaler çarpımlarını hesaplayarak, $\dot{r}$ ve $r\dot{\theta}$'yı $\dot{x}$ ve $\dot{y}$ cinsinden ifade edin.

8. Kutupsal düzlemde iki kere türetilebilir bir $r = f(\theta)$ eğrisinin eğriliğini f ve türevleri cinsinden ifade edin.

9. Kutupsal koordinat düzleminin orijininden geçen ince bir çubuk orijin etrafında 3 rad/dak hızla dönmektedir (düzlem içinde). (2, 0) noktasından harekete başlayan bir böcek çubuk üzerinde orijine doğru 1 inç/dak hızla ilerler.

a. Orijinden yarı yol (1 inç) uzaktayken, böceğin ivmesini ve hızını kutupsal formda bulun.

T **b.** Bir inçin onda biri hassaslıkla, orijine ulaştığında böceğin izlemiş olduğu yolun uzunluğu ne olacaktır?

10. Açısal momentum korunumu $\mathbf{r}(t)$ uzayda hareket eden bir cismin t anındaki konumunu göstersin. Cisme t anında etkiyen kuvvetin, c bir sabit olmak üzere,

$$\mathbf{F}(t) = -\frac{c}{|\mathbf{r}(t)|^3}\mathbf{r}(t)$$

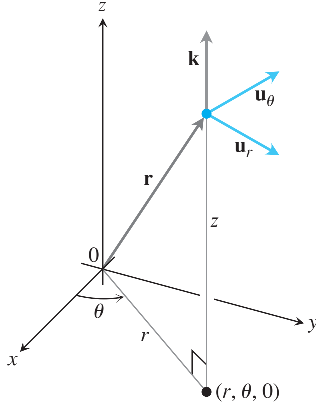
olduğunu varsayın. Fizikte, bir cismin t anındaki **açısal momentumu**, m cismin kütlesi ve $\mathbf{v}(t)$ de hızı olmak üzere, $\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times m\mathbf{v}(t)$ şeklinde tanımlanır. Açısal momentumun korunan bir büyüklük olduğunu ispatlayın; yani, $\mathbf{L}(t)$'nin zamandan bağımsız, sabit bir vektör olduğunu ispatlayın. Newton yasası $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$'yı hatırlayın (Bu bir fizik değil, bir analiz problemidir).

Silindirik Koordinat Sistemi

11. Silindirik koordinatlarda konum ve hareket için birim vektörler Uzayda hareket eden bir parçacığın konumu silindirik koordinatlarda verildiğinde, konumunu ve hareketini tanımlamada kullandığımız birim vektörler

$$\mathbf{u}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}, \qquad \mathbf{u}_\theta = -(\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j},$$

ve **k**'dir (şekle bakın). Bu durumda parçacığın konum vektörü, **r** parçacığın konumunun pozitif kutupsal uzunluğu olmak üzere, $\mathbf{r} = r\,\mathbf{u}_r + z\,\mathbf{k}$ olur.



a. $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$ ve **k**'nin, bu sırayla, sağ el kuralına uyan bir çerçeve oluşturduklarını gösterin.

b.

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} = \mathbf{u}_\theta \quad \text{ve} \quad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{u}_r$$

olduğunu gösterin.

c. t'ye göre gerekli türevlerin var olduğunu varsayarak, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ ve $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$'yı $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$, **k**, $\dot{r}$ ve $\dot{\theta}$ cinsinden ifade edin (Noktalar t'ye göre türevi belirtirler, $\dot{\mathbf{r}}$ $d\mathbf{r}/dt$, $\ddot{\mathbf{r}}$ $d^2\mathbf{r}/dt^2$ anlamına gelir vs.). Bölüm 13.6 bu formülleri türetir ve burada söz edilen vektörlerin gezegen hareketini tanımlamada nasıl kullanıldıklarını gösterir.

12. Silindirik koordinatlarda yay uzunluğu

a. $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$'yi silindirik koordinatlarda ifade ettiğinizde, $ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2$ elde edeceğinizi gösterin.

b. Bu sonucu bir kutunun köşeleri ve bir köşegeni cinsinden geometrik olarak yorumlayın. Kutuyu çizin.

c. (a) şıkkındaki sonucu kullanarak $r = e^\theta$, $z = e^\theta$, $0 \le \theta \le \theta$ ln 8, eğrisinin uzunluğunu bulun.

Bölüm 13 Teknoloji Uygulama Projeleri

Mathematica/Maple Module

Hareketli Bir Cismin Radar Takibi

Hareketi analiz etmek için konum, hız ve ivme vektörlerini canlandırın.

Mathematica/Maple Module

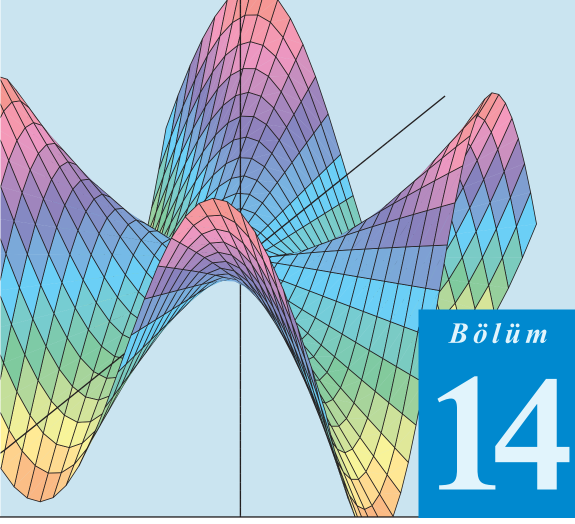
Bir Şekil çizici ile Parametrik ve Kutupsal Denklemler

Hareketi analiz etmek için konum, hız ve ivme vektörlerini canlandırın.

Mathematica/Maple Module

Üç Boyutta Hareket

Bir uzay eğrisi boyunca hareket için kat edilen mesafe, hız, eğrilik ve burulma hesaplayın. Bir uzay eğrisi boyunca harekete karşı gelen teğet, normal ve binormal vektörleri canlandırın ve hesaplayın.



Bölüm

14 KISMİ TÜREVLER

GİRİŞ Bir gerçek-dünya olayının araştırılmasında incelenen çokluk genelde iki veya daha çok bağımsız değişkene bağlıdır. Dolayısıyla, tek değişkenli fonksiyonların analizindeki temel fikirleri çok değişkenli fonksiyonlara genişletmeliyiz. Aslında kurallar aynı kalsa da analizleri daha zengindir. Değişkenlerin etkileşim yollarının farklılığı nedeniyle çok değişkenli fonksiyonların türevleri daha çeşitli ve daha ilginçtir. İntegrallerinin çok daha geniş uygulama alanları vardır. Birkaçından bahsetmek gerekirde, olasılık, istatistik, akışkanlar dinamiği ve elektik araştırmalarının hepsi doğal bir şekilde birden fazla değişkenli fonksiyonlara yol açarlar.

14.1 Çok Değişkenli Fonksiyonlar

Çoğu fonksiyon birden fazla bağımsız değişkene bağlıdır. $V = \pi r^2 h$ fonksiyonu, yarıçapı ve yüksekliğinden dik bir silindirin hacmini hesaplar. $f(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonu $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin $P(x, y)$ noktasının üzerindeki yüksekliğini P'nin iki koordinatından hesaplar. Dünya yüzeyindeki bir noktanın sıcaklığı T, enlemi x ve boylamı y'ye bağlıdır ve $T(x, y)$ yazarak ifade edilir. Bu bölümde, birden fazla bağımsız değişkenli fonksiyonları tanımlayacak ve grafiklerinin nasıl çizileceğini tartışacağız.

Çok değişkenli reel değerli fonksiyonlar tek değişkenli durumdakine benzer şekilde tanımlanırlar. Tanım kümeleri reel sayı ikililerinden (üçlülerinden, dörtlülerinden, n-lilerinden) oluşan kümeler, değer kümeleri ise şimdiye kadar çalışmış olduğumuz reel sayı kümeleridir.

TANIMLAR ***n* Bağımsız Değişkenli Fonksiyonlar**

D'nin reel sayılardan oluşan $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n–lilerinin bir kümesi olduğunu varsayın. D üzerinde **reel değerli** bir f **fonksiyonu**, D'deki her elemana bir

$$w = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

reel sayısı atayan bir kuraldır. D kümesi fonksiyonun **tanım kümesi**dir. f'nin aldığı w değerlerinin kümesi fonksiyonun **değer kümesi**dir. w sembolü f'nin bağımlı değişkenidir ve f'ye x_1'den x_n'e kadar olan n **bağımsız değişkenin** bir fonksiyonu denir. Ayrıca x'lere fonksiyonun **girdi değişkenleri**, w'ye de fonksiyonun **çıktı değişkeni** deriz.

f iki bağımsız değişkenli bir fonksiyon ise, genellikle bağımsız değişkenleri x ve y olarak adlandırır ve f'nin tanım kümesini xy-düzleminde bir bölge olarak gözümüzde canlandırırız. Üç bağımsız değişkenli bir fonksiyon için de değişkenlere x, y ve z der ve tanım kümesini uzayda bir bölge olarak düşünürüz.

Uygulamalarda, değişkenlerin neyi temsil ettiklerini bize hatırlatan harfler kullanmayı tercih ederiz. Bir dik silindirin hacminin, silindirin yarıçapının ve yüksekliğinin bir fonksiyonu olduğunu söylemek için, $V = f(r, h)$ yazabiliriz. Daha açık olmak gerekirse, $f(r, h)$ gösterimi yerine V'yi r ve h'nin değerlerinden hesaplayan bir formül koyabilir ve $V = \pi r^2 h$ yazabiliriz. Her iki durumda da, r ve h fonksiyonun bağımsız değişkenlerini, V de bağımlı değişkeni simgeleyecektir.

Her zamanki gibi, formüllerle tanımlanan fonksiyonları, bağımsız değişkenlerin değerlerini formülde yerine yazıp karşı gelen bağlı değişkenin değerini bularak hesaplarız.

ÖRNEK 1 Bir Fonksiyonu Hesaplamak

$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$'nin (3, 0, 4) noktasındaki değeri

$$f(3, 0, 4) = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

olarak bulunur. Bölüm 12.1'den f'yi Kartezyen uzay koordinatlarında orijinden (x, y, z) noktasına uzaklık fonksiyonu olarak hatırlıyoruz. ■

Tanım Kümeleri

Birden fazla değişkenli fonksiyonları tanımlarken, her zamanki gibi kompleks sayılara veya sıfırla bölmeye yol açan girdiler koymamaya çalışırız. $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ ise, y değeri x^2'den küçük olamaz. $f(x, y) = 1/(xy)$ ise, xy çarpımı sıfır olamaz. Bunların dışında, fonksiyonların tanım kümeleri tanımlayıcı kuralların reel sayı ürettikleri en büyük kümelerdir.

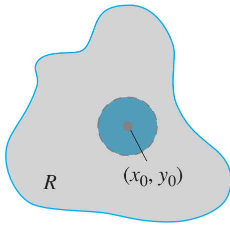
ÖRNEK 2(a) İki Değişkenli Fonksiyonlar

Fonksiyon	Tanım kümesi	Değer Kümesi
$w = \sqrt{y - x^2}$	$y \geq x^2$	$[0, \infty)$
$w = \dfrac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$w = \sin xy$	Tüm düzlem	$[-1, 1]$

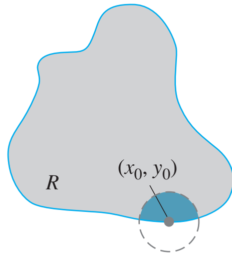
(b) Üç Değişkenli Fonksiyonlar

Fonksiyon	Tanım kümesi	Değer Kümesi
$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	Tüm düzlem	$[0, \infty)$
$w = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$	$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$	$(0, \infty)$
$w = xy \ln z$	$z > 0$ yarım uzayı	$(-\infty, \infty)$

■



(a) İç nokta



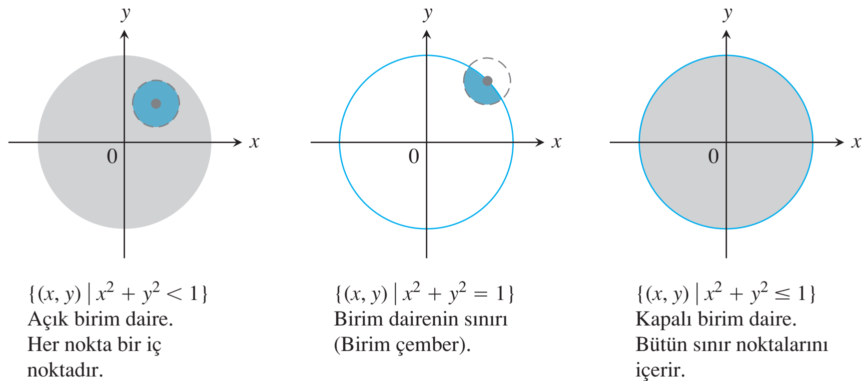
(b) Sınır noktası

ŞEKİL 14.1 Düzlemdeki bir R bölgesinin iç noktaları ve sınır noktaları. Bir iç noktanın R'nin bir noktası olması gerekir. R'nin bir sınır noktasının R'ye ait olması gerekmez.

İki Değişkenli Fonksiyonlar

Tıpkı reel doğrudaki aralıklarda olduğu gibi düzlemdeki bölgelerin de iç noktaları ve sınır noktaları var olabilir. $[a, b]$ kapalı aralıkları sınır noktalarını içerirler, (a, b) açık aralıkları sınır noktalarını içermezler, $[a, b)$ gibi aralıklar da ne açık ne de kapalıdırlar.

> **TANIMLAR İç ve Sınır Noktalar, Açık, Kapalı**
>
> xy-düzleminde bir R bölgesindeki (kümesindeki) bir (x_0, y_0) noktası, bütünüyle R'nin içinde bulunan pozitif yarıçaplı bir dairenin merkezi ise R'nin bir **iç noktası**dır (Şekil 14.1). Merkezi (x_0, y_0)'da olan her daire R'nin içinden noktaların yanı sıra R'nin dışından da noktalar içeriyorsa, R'nin bir **sınır noktası**dır. (Sınır noktasının R'ye ait olması gerekmez.)
>
> Bir bölgenin iç noktaları, bir küme olarak, bölgenin **içini** oluştururlar. Bölgenin sınır noktaları bölgenin **sınırını** oluştururlar. Bir bölge sadece iç noktalarından oluşuyorsa **açık**tır. Bir bölge bütün sınır noktalarını içeriyorsa **kapalıdır** (Şekil 14.2).

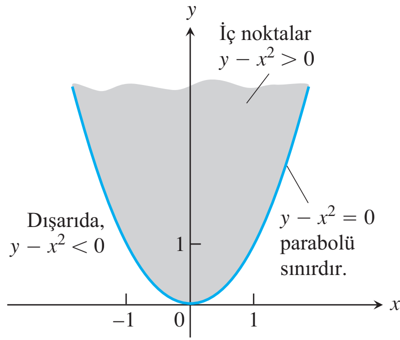


ŞEKİL 14.2 Düzlemde birim dairenin iç noktaları ve sınır noktaları.

Reel sayı aralıklarında olduğu gibi, düzlemdeki bazı bölgeler ne açık ne de kapalıdırlar. Şekil 14.2'deki açık daire ile işe başlar ve ona sınır noktalarının hepsini değil de bazılarını eklerseniz, ortaya çıkan küme ne açık ne de kapalıdır. Orada bulunan sınır noktaları kümenin açık olmasını engeller. Kalan sınır noktalarının bulunmayışı ise kümenin kapalı olmasını engeller.

> **TANIMLAR Düzlemde Sınırlı ve Sınırlı Olmayan Bölgeler**
>
> Düzlemdeki bir bölge sabit yarıçaplı bir dairenin içindeyse **sınırlı**dır.
> Aksi taktirde bölge, **sınırlı olmayan (sınırsız)** bir bölgedir.

Düzlemde *sınırlı* kümelere örnekler doğru parçaları, üçgenler, üçgenlerin içleri, dikdörtgenler, çemberler ve dairelerdir. *Sınırlı olmayan* kümelere örnekler de doğrular, koordinat eksenleri, sonsuz aralıklarda tanımlı fonksiyonların grafikleri, dörtte bir bölgeler, yarı düzlemler ve düzlemin kendisidir.



ŞEKİL 14.3 $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$'nin tanım kümesi renkli bölge ve sınırlayıcı parabol $y = x^2$'den oluşur (Örnek 3).

ÖRNEK 3 İki Değişkenli Bir Fonksiyonun Tanım Kümesini Belirlemek

$f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ fonksiyonunun tanım kümesini belirleyin.

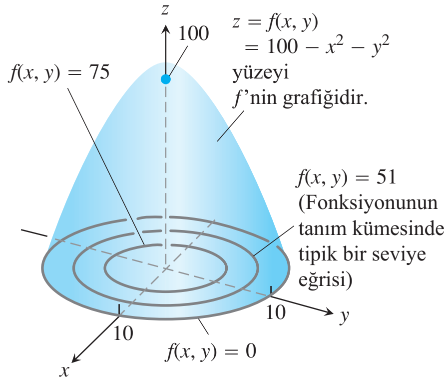
Çözüm f fonksiyonu sadece $y - x^2 \geq 0$ olduğu yerlerde tanımlı olduğundan, tanım kümesi Şekil 14.3'te gösterilen kapalı, sınırlı olmayan bölgedir. $y - x^2$ parabolü tanım kümesinin sınırıdır. Parabolün üst tarafındaki noktalar tanım kümesinin içini oluşturur. ■

İki Değişkenli Fonksiyonların Grafikler, Seviye Eğrileri ve Kontur Çizgileri

Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun değerlerini resimlemenin iki standart yolu vardır. Biri, tanım kümesinde f'nin sabit bir değer aldığı eğrileri çizip isimlendirmektir. Diğeri ise, uzayda $z = f(x, y)$ yüzeyini çizmektir.

TANIMLAR Seviye Eğrisi, Grafik, Yüzey

Düzlemde, bir $f(x, y)$ fonksiyonunun $f(x, y) = c$ gibi sabit bir değer aldığı noktalar kümesine f'nin bir **seviye eğrisi** denir. (x, y) noktası f'nin tanım aralığında olmak üzere, bütün $(x, y, f(x, y))$ noktalarının kümesine f'nin **grafiği** denir. f'nin grafiğine ayrıca $z = f(x, y)$ **yüzeyi** de denir.



ŞEKİL 14.4 $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ fonksiyonunun grafiği ve seçilmiş seviye eğrileri (Örnek 4).

ÖRNEK 4 İki Değişkenli Bir Fonksiyonu Çizmek

$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$'nin grafiğini çizin ve f'nin düzlemdeki tanım kümesinde $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = 51$ ve $f(x, y) = 75$ seviye eğrilerini işaretleyin.

Çözüm f'nin tanım kümesi bütün xy-düzlemidir ve f'nin değer kümesi 100'e eşit veya 100'den küçük reel sayıların kümesidir. Grafiği, Şekil 14.4'te bir kısmı gösterilen $z = 100 - x^2 - y^2$ paraboloidi dir.

$f(x, y) = 0$ seviye eğrisi, xy-düzleminde

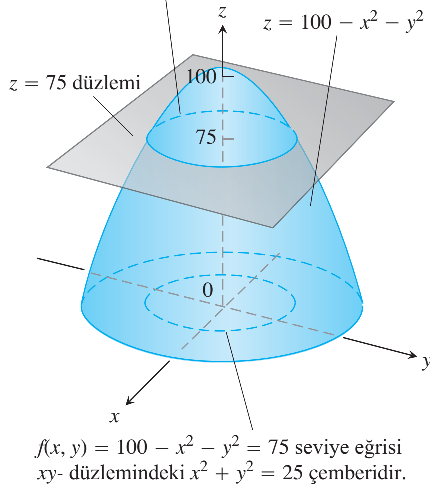
$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 0 \quad \text{veya} \quad x^2 + y^2 = 100$$

koşulunu sağlayan noktalar kümesidir ki, o da merkezi orijinde olan 10 yarıçaplı çemberdir. Benzer şekilde, $f(x, y) = 51$ ve $f(x, y) = 75$ seviye eğrileri (Şekil 14.4)

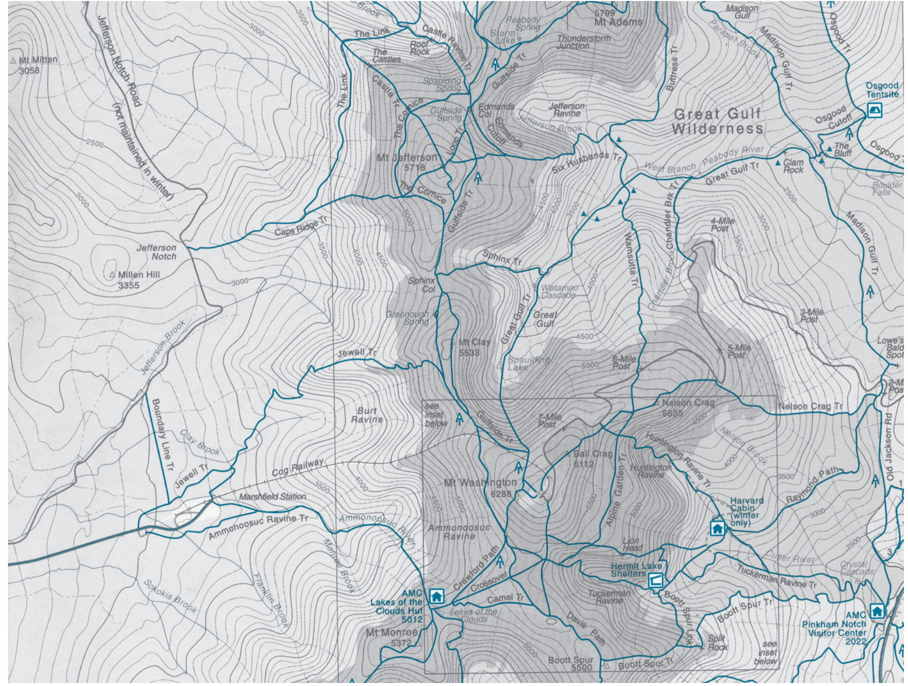
$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 51 \qquad \text{veya} \qquad x^2 + y^2 = 49$$
$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 75 \qquad \text{veya} \qquad x^2 + y^2 = 25$$

çemberleridir. $f(x, y) = 100$ seviye eğrisi sadece orijinden oluşur (Yine de bir seviye eğrisidir). ■

Uzayda $z = c$ düzleminin bir $z = f(x, y)$ yüzeyini kestiği eğri, $f(x, y) = c$ fonksiyon değerini temsil eden noktalardan oluşur. Buna, f'nin tanım kümesindeki $f(x, y) = c$ seviye eğrisinden ayırt etmek için, $f(x, y) = c$ kontur eğrisi denir. Şekil 14.5, $z = 100 - x^2 - y^2$ yüzeyi üzerinde $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ fonksiyonuyla tanımlanan $f(x, y) = 75$ kontur çizgisini göstermektedir. Kontur eğrisi, fonksiyonun tanım kümesindeki $f(x, y) = 75$ seviye eğrisi olan $x^2 + y^2 = 25$ çemberinin yukarısında bulunmaktadır.
Ancak herkes bu ayrımı yapmaz ve iki eğriyi de aynı isimle adlandırmak isteyebilir ve aklınızda hangisinin bulunduğunu bildiğinize güvenebilirsiniz. Örneğin, çoğu haritalarda, sabit yükseklikleri (deniz seviyesinden yükseklik) temsil eden eğrilere seviye eğrileri değil, kontür denir (Şekil 14.6).



ŞEKİL 14.5 xy-düzlemine paralel ve $z = f(x,y)$ yüzeyini kesen bir $z = c$ düzlemi bir kontur çizgisi üretir.



ŞEKİL 14.6 New Hampshire'deki Mt. Washington'un konturları (Appalachian Mountain Club'ın izniyle yeniden üretilmiştir).

Üç Değişkenli Fonksiyonlar

Düzlemde, iki bağımsız değişkenli bir fonksiyonun sabit bir $f(x, y) = c$ değerine sahip olduğu noktalar fonksiyonun tanım kümesinde bir eğri oluşturur. Uzayda, üç bağımsız değişkenli bir fonksiyonun sabit bir $f(x, y, z) = c$ değerine sahip olduğu noktalar fonksiyonun tanım kümesinde bir yüzey oluşturur.

TANIM Seviye Yüzeyi

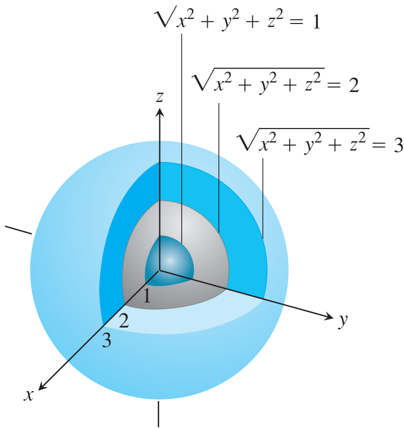
Uzayda, üç bağımsız değişkenli bir fonksiyonun sabit bir $f(x, y, z) = c$ değerine sahip olduğu (x, y, z) noktaları f'nin bir **seviye yüzeyini** oluştururlar.

Üç değişkenli bir fonksiyonların grafikleri, dört boyutlu bir uzayda bulunan $(x, y, z, f(x, y, z))$ noktalarından oluştuğu için, bunları üç-boyutlu referans çerçevemizde etkili olarak çizemeyiz. Ancak, üç-boyutlu seviye yüzeylerine bakarak, fonksiyonun nasıl davrandığını görebiliriz.

ÖRNEK 5 Üç Değişkenli Bir Fonksiyonun Seviye Yüzeylerini Belirlemek

Aşağıdaki fonksiyonun seviye yüzeylerini tanımlayın:

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



ŞEKİL 14.7 $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$'nin seviye yüzeyleri eşmerkezli kürelerdir (Örnek 5).

Çözüm f'nin değeri, orijinden (x, y, z) noktasına olan uzaklıktır. Her $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c, c > 0$, seviye yüzeyi, merkezi orijinde olan c yarıçaplı bir küredir. Şekil 14.7 bu kürelerden üçünün görünüşünü sunmaktadır. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0$ seviye yüzeyi sadece orijinden oluşmaktadır.

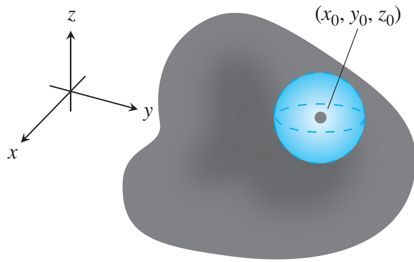
Burada fonksiyonun grafiğini çizmiyoruz; fonksiyonun tanım kümesindeki seviye yüzeylerine bakıyoruz. Fonksiyonun seviye yüzeyleri tanım kümesinde ilerlerken, fonksiyonun değerlerinin nasıl değiştiğini gösterir. Merkezi orijinde olan c yarıçaplı bir kürenin üzerinde kalırsak, fonksiyon sabit bir değer, yani c değerini alır. Bir küreden diğerine geçersek fonksiyonun değeri değişir. Orijinden uzaklaşırsak bu değer artar, orijine yaklaşırsak bu değer azalır. Fonksiyonun değerlerinin değişimi izlediğimiz yöne bağlıdır. Değişikliğin yöne bağımlılığı önemlidir. Buna Bölüm 14.5'te geri döneceğiz.

Uzaydaki bölgeler için iç, sınır, açık, kapalı, sınırlı ve sınırlı olmama tanımları düzlemdeki tanımların benzeridir. Ekstra boyutu işin içine katmak için, daireler yerine katı toplar kullanırız.

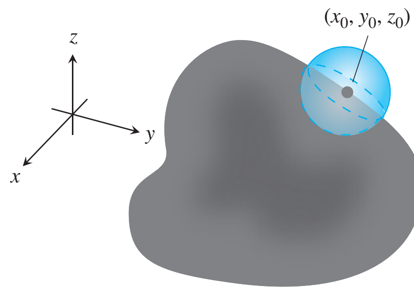
TANIMLAR Uzay Bölgeleri İçin İç ve Sınır Noktaları

Uzaydaki bir R bölgesinde bir (x_0, y_0, z_0) noktası, bütünüyle R'nin içinde bulunan bir katı topun merkeziyse R'nin bir **iç noktası**dır (Şekil 14.8a). Merkezi (x_0, y_0, z_0) 'da olan her küre R 'nin içinden noktaların yanı sıra R'nin dışından da noktalar içeriyorsa (x_0, y_0, z_0) noktası R'nin bir **sınır noktası**dır. R'nin iç noktaları, bir küme olarak, R'nin **içini** oluştururlar. R'nin sınır noktalarının kümesi R'nin **sınırı**dır.

Bir R bölgesi sadece iç noktalardan oluşuyorsa **açık**tır. Bir bölge bütün sınır noktalarını içeriyorsa **kapalı**dır.



(a) İç noktaları



(b) Sınır noktaları

ŞEKİL 14.8 Uzaydaki bir bölgenin iç noktaları ve sınır noktaları.

Uzayda açık kümelere örnekler; bir kürenin içi, $z > 0$ açık yarı düzlemi, birinci sekizde bir bölge (x, y ve z her biri pozitif) ve uzayın kendisidir.

Uzayda *kapalı* kümelere örnekler; doğrular, düzlemler, $z \geq 0$ kapalı yarı-düzlemi, sınırlayıcı düzlemleriyle birlikte birinci sekizde bir bölge ve uzayın kendisi (sınır noktası var olmadığından) dir.

Sınırlayıcı küresinin bir kısmı kaldırılmış katı bir küre veya bir yüzü, kenarı veya köşe noktası olmayan katı bir küp *ne açık ne de kapalı* olacaktır.

Üçten daha fazla bağımsız değişkenli fonksiyonlar da önemlidir. Örneğin, uzayda bir yüzeyin üzerindeki sıcaklık sadece yüzeyin üzerindeki $P(x, y, z)$ noktasının konumuna değil aynı zamanda t zamanına da bağlı olabilir dolayısıyla böyle bir durumda $f(x, y, z, t)$ yazacağız.

Bilgisayarla Grafik Çizme

Bilgisayarların üç-boyutlu grafik çizim programları iki değişkenli fonksiyonların grafiklerini sadece birkaç tuşa basarak çizmeyi olası kılmıştır. Genellikle, bir formülden öğrendiğimizi, bir grafikten daha çabuk öğreniriz.

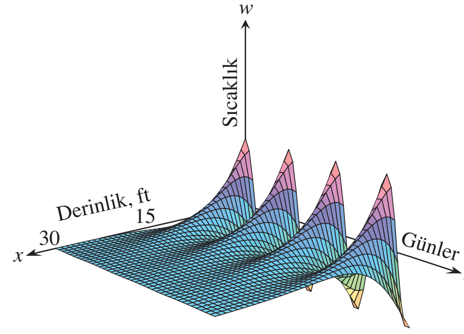
ÖRNEK 6 Yeryüzünün Altındaki Sıcaklığı Modellemek

Yeryüzünün altındaki sıcaklık, yeryüzü altındaki x derinliğinin ve yılın t zamanının bir fonksiyonudur. x'i feet olarak t'yi de yeryüzünde yüzey sıcaklığının en yüksek olmasının beklendiği günden itibaren geçen gün olarak alırsak, sıcaklıktaki değişimi

$$w = \cos(1.7 \times 10^{-2}t - 0.2x)e^{-0.2x}$$

fonksiyonu ile modelleyebiliriz. (0 ft'teki sıcaklık +1 ile –1 arasında değişecek şekilde ölçeklenmiştir. Öyle ki x feet'teki değişim yüzeydeki değişimin bir kesri olarak yorumlanabilsin.)

Şekil 14.9, fonksiyonun bilgisayarla üretilmiş bir grafiğini göstermektedir. 15 ft derinlikteki değişim (şekilde dikey genlikteki değişim) yüzeydeki değişimin yaklaşık %5'idir. 30 ft derinlikte yıl boyunca neredeyse hiç değişim yoktur.



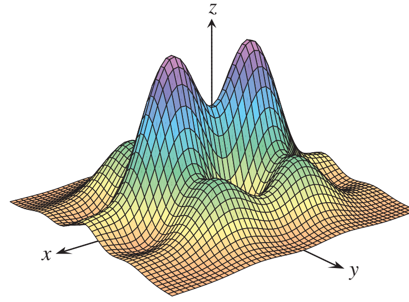
ŞEKİL 14.9

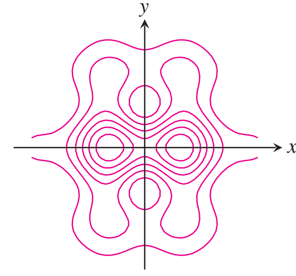
$$w = \cos(1.7 \times 10^{-2}t - 0.2x)e^{-0.2x}$$

fonksiyonunun bilgisayarla üretilmiş bu grafiği yer altı sıcaklığının mevsimlik değişimini yüzey sıcaklığının bir kesri olarak göstermektedir. $x = 15$ ft'te, değişim yüzeydeki değişimin sadece %5'idir. $x = 30$ ft'te değişim yüzeydeki değişimin %0.25'inden azdır (Örnek 6). (Norton Starr'ın hazırladığı çizimden alınmıştır.)

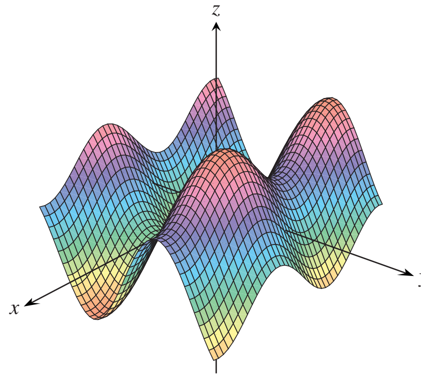
Grafik ayrıca, yüzeyin 15 ft altındaki sıcaklıkla yüzey sıcaklığı arasında neredeyse yarım yıllık bir faz farkı olduğunu göstermektedir. Yüzeyde sıcaklık en düşükken (örneğin, Şubat'ta), 15 ft aşağıda en yüksektir. Yerin 15 ft altında, mevsimlerin sırası değişmiştir. ■

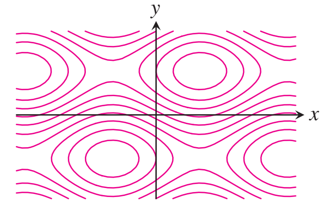
Şekil 14.10 iki değişkenli birkaç fonksiyonun bilgisayarla üretilmiş grafiklerini seviye eğrileri ile birlikte göstermektedir.



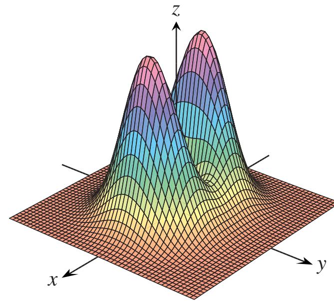


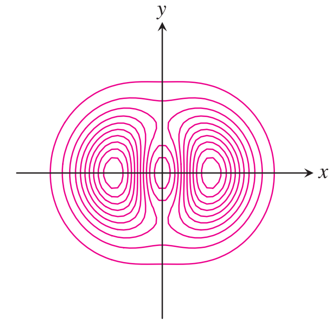
(a) $z = e^{-(x^2 + y^2)/8}(\sin x^2 + \cos y^2)$



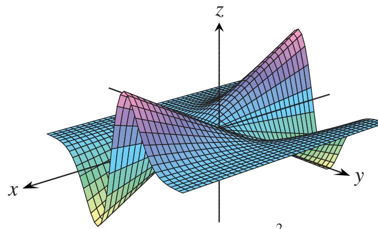


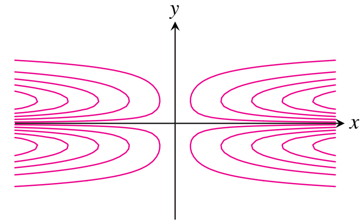
(b) $z = \sin x + 2 \sin y$





(c) $z = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$





(d) $z = xye^{-y^2}$

ŞEKİL 14.10 İki değişkenli tipik fonksiyonların bilgisayarla üretilmiş grafikleri ve seviye eğrileri.

ALIŞTIRMALAR 14.1

Tanım ve Değer Kümeleri, Seviye Eğrileri

1–12 alıştırmalarında, **(a)** fonksiyonun tanım kümesini bulun, **(b)** fonksiyonun değer kümesini bulun, **(c)** fonksiyonun seviye eğrilerini tanımlayın, **(d)** fonksiyonun tanım kümesinin sınırını bulun, **(e)** tanım kümesinin kapalı mı, açık mı, yoksa ikisi de olmayan bir bölge mi olduğunu belirleyin ve **(f)** tanım kümesinin sınırlı mı yoksa sınırlı olmayan mı olduğunu belirleyin.

1. $f(x, y) = y - x$ **2.** $f(x, y) = \sqrt{y - x}$

3. $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ **4.** $f(x, y) = x^2 - y^2$

5. $f(x, y) = xy$ **6.** $f(x, y) = y/x^2$

7. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$ **8.** $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

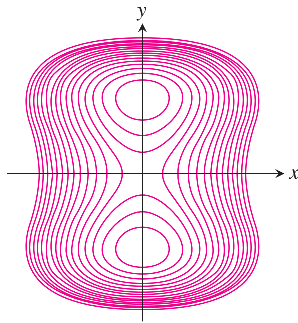
9. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ **10.** $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

11. $f(x, y) = \sin^{-1}(y - x)$ **12.** $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

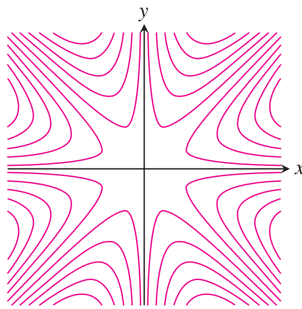
Yüzeyleri ve Seviye Eğrilerini Belirlemek

13–18 alıştırmaları (a)–(f)'de grafikleri verilen fonksiyonların seviye eğrilerini göstermektedir. Her eğri kümesini uygun fonksiyonla eşleştirin.

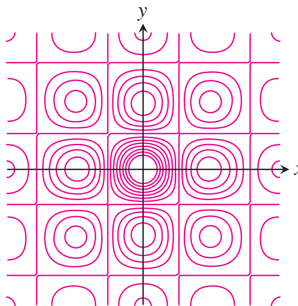
13.



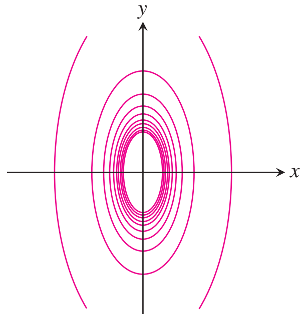
14.



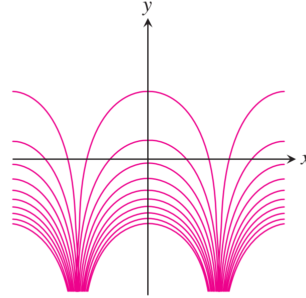
15.



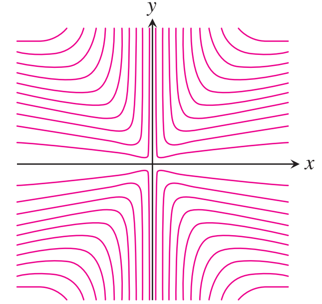
16.



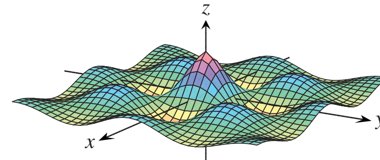
17.



18.

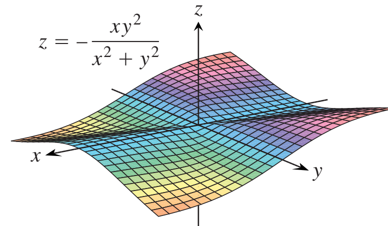


a.

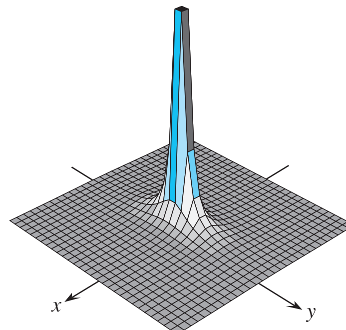


$z = (\cos x)(\cos y)\, e^{-\sqrt{x^2 + y^2}/4}$

b.

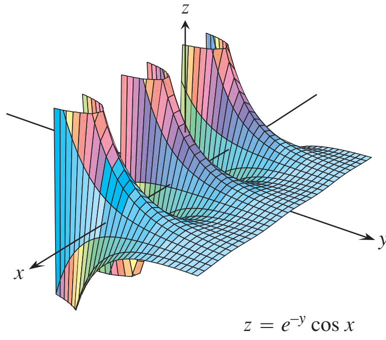


c.

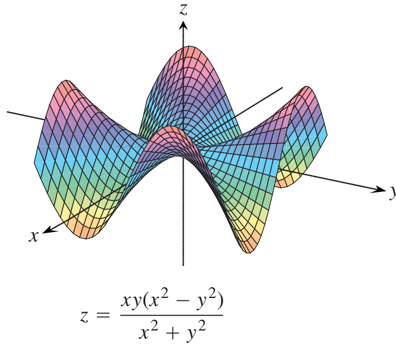


$z = \dfrac{1}{4x^2 + y^2}$

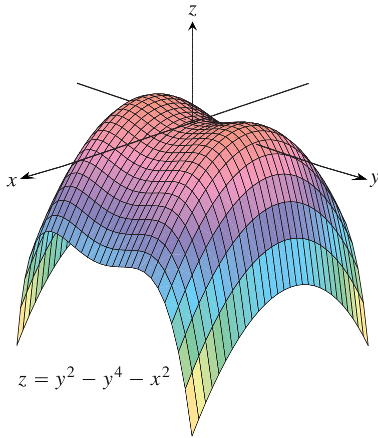
d.



e.



f.



İki Değişkenli Fonksiyonları Tanımlama

19–28 alıştırmalarındaki fonksiyonların değerlerini iki şekilde gösterin: **(a)** $z = f(x, y)$ yüzeyini çizerek ve **(b)** fonksiyonun tanım kümesindeki seviye eğrilerinden birkaçını çizerek. Her eğriyi fonksiyon değeriyle isimlendirin.

19. $f(x, y) = y^2$

20. $f(x, y) = 4 - y^2$

21. $f(x, y) = x^2 + y^2$

22. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

23. $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$

24. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$

25. $f(x, y) = 4x^2 + y^2$

26. $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

27. $f(x, y) = 1 - |y|$

28. $f(x, y) = 1 - |x| - |y|$

Bir Seviye Eğrisini Bulmak

29–32 alıştırmalarında, $f(x, y)$ fonksiyonun verilen noktadan geçen seviye eğrisinin denklemini bulun.

29. $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2, \quad \left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

30. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad (1, 0)$

31. $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y \frac{dt}{1 + t^2}, \quad \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

32. $f(x, y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n, \quad (1, 2)$

Seviye Yüzeyleri Çizmek

33–40 alıştırmalarında, fonksiyonun tipik bir seviye yüzeyini çizin.

33. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

34. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

35. $f(x, y, z) = x + z$

36. $f(x, y, z) = z$

37. $f(x, y, z) = x^2 + y^2$

38. $f(x, y, z) = y^2 + z^2$

39. $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$

40. $f(x, y, z) = (x^2/25) + (y^2/16) + (z^2/9)$

Bir Seviye Yüzeyi Bulmak

41–44 alıştırmalarında, $f(x, y)$ fonksiyonunun verilen noktadan geçen seviye yüzeyinin denklemini bulun.

41. $f(x, y, z) = \sqrt{x - y} - \ln z, \quad (3, -1, 1)$

42. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y + z^2), \quad (-1, 2, 1)$

43. $g(x, y, z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + y)^n}{n!\,z^n}, \quad (\ln 2, \ln 4, 3)$

44. $g(x, y, z) = \displaystyle\int_x^y \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}} + \int_{\sqrt{2}}^z \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}}, \quad (0, 1/2, 2)$

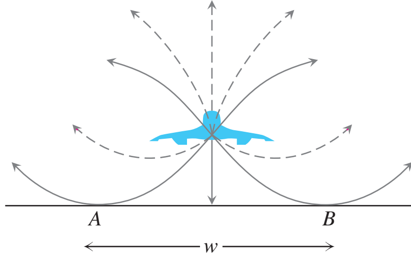
Teori ve Örnekler

45. Bir fonksiyonun, bir uzay doğrusu üzerindeki maksimum değeri $f(x, y, z) = xyz$ fonksiyonunun $x = 20 - t$, $y = t$, $z = 20$ doğrusu üzerinde bir maksimum değeri var mıdır? Varsa, nedir? Yanıtınızı açıklayın (*İpucu*: Doğru boyunca, $w = f(x, y, z)$ fonksiyonu t'nin türetilebilir bir fonksiyonudur.)

46. Bir fonksiyonun, bir uzay doğrusu üzerindeki maksimum değeri $f(x, y, z) = xy - z$ fonksiyonunun $x = t - 1$, $y = t - 2$, $z = t + 7$ doğrusu üzerinde bir maksimum değeri var mıdır? Varsa, nedir? Yanıtınızı açıklayın (*İpucu*: Doğru boyunca, $w = f(x, y, z)$ fonksiyonu t'nin türetilebilir bir fonksiyonudur.)

47. Concorde'un sonik patlamaları *Concorde*'dan gelen ses dalgaları, uçağın uçtuğu yüksekliğin üstünde ve altında sıcaklık değiştikçe, eğilir. Sonik patlama halısı yer yüzeyinde şok dalgalarını

atmosferden yansıtılmış veya yerden kırılmış bir şekilde değil de doğrudan uçaktan alan bölgedir. Halı, uçağın altındaki noktadan doğrudan yere çarpan sıyırıcı dalgalarla belirlenmiştir. (Şekle bakın)



Sonik patlama halısı

Yerde bulunan insanların *Concorde*'un sonik patlamasını atmosferdeki bir katmandan yansıyarak değil de doğrudan duydukları bölgenin genişliği w,

T = yer seviyesindeki hava sıcaklığı (Kelvin derece),

h = Concorde'un yüksekliği (km),

d = dikey sıcaklık gradyanı (km başına Kelvin derece sıcaklık düşüşü)

değişkenlerinin bir fonksiyonudur.

w'nun formülü

$$w = 4\left(\frac{Th}{d}\right)^{1/2}.$$

olarak verilir.

Washington'a gitmekte olan *Concorde* uçağı Avrupa'dan Birleşik Devletlere Nantucket adasının kuzeyinde 16.8 km yükseklikte geçirecek bir rota izlemektedir. Yüzey sıcaklığı 290 K ve dikey sıcaklık gradyanı 5 K/km ise, uçağın sonik patlama halısını adadan uzak tutmak için uçak Nantucket'ın kaç kilometre güneyinden uçurulmalıdır? (N.K. Balachandra, W.L. Donn ve D.H. Rind tarafından *Science*, July 1, 1977, Vol. 197, sayfa 47-49'da yayınlanan "Concorde Sonic Booms as an Atmospheric Probe" dan.)

48. Bildiğiniz gibi, tek reel değişkenli, reel değerli bir fonksiyonun grafiği iki koordinatlı bir uzayda bir kümedir. İki bağımsız reel değişkenli, reel değerli bir fonksiyonun grafiği üç koordinatlı bir uzayda bir kümedir. Üç bağımsız reel değişkenli, reel değerli bir fonksiyonun grafiği dört koordinatlı bir uzayda bir kümedir. Dört bağımsız reel değişkenli, reel değerli bir $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ fonksiyonunun grafiğini nasıl tanımlarsınız? n bağımsız reel değişkenli, reel değerli bir $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ fonksiyonunun grafiğini nasıl tanımlarsınız?

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Açıkça Verilen Yüzeyler

49–52 alıştırmalarındaki fonksiyonların her biri için aşağıdaki adımları gerçekleştirmek üzere bir BCS kullanın.

a. Verilen dikdörtgen üzerinde yüzeyi çizin.

b. Dikdörtgendeki birkaç seviye eğrisini çizin.

c. f'nin verilen noktadaki seviye eğrisini çizin.

49. $f(x, y) = x\sin\frac{y}{2} + y\sin 2x, \quad 0 \le x \le 5\pi \quad 0 \le y \le 5\pi,$ $P(3\pi, 3\pi)$

50. $f(x, y) = (\sin x)(\cos y)e^{\sqrt{x^2+y^2}/8}, \quad 0 \le x \le 5\pi,$ $0 \le y \le 5\pi, \quad P(4\pi, 4\pi)$

51. $f(x, y) = \sin(x + 2\cos y), \quad -2\pi \le x \le 2\pi,$ $-2\pi \le y \le 2\pi, \quad P(\pi, \pi)$

52. $f(x, y) = e^{(x^{0.1}-y)}\sin(x^2 + y^2), \quad 0 \le x \le 2\pi,$ $-2\pi \le y \le \pi, \quad P(\pi, -\pi)$

Kapalı Olarak Verilen Yüzeyler

53–56 alıştırmalarındaki seviye yüzeylerini çizmek için bir BCS kullanın.

53. $4\ln(x^2 + y^2 + z^2) = 1$ **54.** $x^2 + z^2 = 1$

55. $x + y^2 - 3z^2 = 1$

56. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) - (\cos y)\sqrt{x^2 + z^2} = 2$

Parametrize Yüzeyler

Düzlemdeki eğrileri, bir I parametre aralığında tanımlanmış bir $x = f(t)$, $y = g(t)$ denklem çiftiyle tanımladığınız gibi, bazen uzaydaki yüzeyleri de bir $a \le u \le b$, $c \le v \le d$ parametre dikdörtgeninde tanımlanmış bir $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$ denklem üçlüsüyle tanımlayabilirsiniz. Çoğu bilgisayarlı cebir sistemi böyle yüzeyleri parametre modunda çizer (Parametrize yüzeyler Bölüm 16.6'da daha detaylı olarak incelenmektedir). 57–60 alıştırmalarındaki yüzeyleri çizmek için bir BCS kullanın. Ayrıca xy-düzlemindeki birkaç seviye eğrisini çizin.

57. $x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = u, \quad 0 \le u \le 2,$ $0 \le v \le 2\pi$

58. $x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = v, \quad 0 \le u \le 2,$ $0 \le v \le 2\pi$

59. $x = (2 + \cos u)\cos v, \quad y = (2 + \cos u)\sin v, \quad z = \sin u,$ $0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le 2\pi$

60. $x = 2\cos u\cos v, \quad y = 2\cos u\sin v, \quad z = 2\sin u,$ $0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le \pi$

14.2 Yüksek Boyutlarda Limitler ve Süreklilik

Bu bölüm çok değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliğini ele almaktadır. İki veya üç değişkenli bir fonksiyonun limitinin tanımı tek değişkenli bir fonksiyonun limitinin tanımına benzerdir fakat şimdi göreceğimiz gibi önemli bir fark vardır.

Limitler

Bir (x_0, y_0) noktasına yeterince yakın bütün (x, y) noktaları için $f(x, y)$'nin değerleri belirli bir L reel sayısına keyfi derecede yakın ise, (x, y) noktası (x_0, y_0)'a yaklaşırken f fonksiyonu L limitine yaklaşır deriz. Bu, tek değişkenli bir fonksiyonun formel olmayan tanımına benzerdir. Ancak, (x_0, y_0) noktası f'nin tanım kümesinin içinde bulunuyorsa, (x, y)'nin (x_0, y_0)'a herhangi bir yönden yaklaşabileceğine dikkat edin. Yaklaşımın yönü, aşağıdaki bazı örneklerde olduğu gibi, bir sorun yaratabilir.

TANIMLAR İki Değişkenli Bir Fonksiyonun Limiti

Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık, f'nin tanım kümesine ait (x, y) noktaları için,

$$0 > 2\ \overline{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \quad \text{iken} \quad |f(x, y) - L| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı karşılık getirilebiliyorsa, (x, y) noktası (x_0, y_0)'a yaklaşırken f fonksiyonu L **limitine** yaklaşır der ve şu şekilde yazarız.

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

Limit tanımı, (x, y)'den (x_0, y_0)'a uzaklık yeterince küçük (fakat 0 değil) bırakıldığında, $f(x, y)$ ile L arasındaki uzaklığın keyfi derecede küçüldüğünü söyler.

Limit tanımı f'nin tanım kümesinin iç noktalarıyla birlikte (x_0, y_0) sınır noktaları için de geçerlidir. Tek koşul (x, y) noktasının her zaman tanım kümesinin içinde kalmasıdır. Tek değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi,

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} x = x_0$$

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} y = y_0$$

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} k = k \qquad \text{(Herhangi bir } k\text{)}$$

olduğu gösterilebilir. Örneğin, yukarıdaki ilk limit ifadesinde $f(x, y) = x$ ve $L = x_0$'dır. Limit tanımını kullanarak, $\epsilon > 0$ sayısının seçildiğini varsayın. Eğer δ'yı bu ϵ'a eşit olarak alırsak

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta = \epsilon$$

eşitsizliğinin

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2} < \epsilon$$

$$|x - x_0| < \epsilon \qquad \sqrt{a^2} = |a|$$

$$|f(x, y) - x_0| < \epsilon \qquad x = f(x, y)$$

sonucunu gerektirdiğini görürüz:

Yani,

$$\text{her ne zaman } 0 > 2\ \overline{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \text{ ise } \quad |f(x, y) - x_0| < \epsilon$$

olur. Dolayısıyla,

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = \lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} x = x_0$$

dır. Ayrıca, iki fonksiyonun toplamının limitinin limitlerinin toplamı olduğu da gösterilebilir (ikisi de varsa) ve farkların, çarpımların, sabitlerle çarpımların, bölümlerin ve kuvvetlerin limitleri için de benzer sonuçlar elde edilir.

TEOREM 1 İki Değişkenli Fonksiyonların Limitlerinin Özellikleri

L, M ve *k* reel sayılar ve

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = L \qquad \text{ve} \qquad \lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} g(x, y) = M.$$

1. *Toplam Kuralı:* $\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (f(x, y) + g(x, y)) = L + M$
2. *Fark Kuralı:* $\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (f(x, y) - g(x, y)) = L - M$
3. *Çarpım Kuralı:* $\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (f(x, y) \cdot g(x, y)) = L \cdot M$
4. *Sabitle Çarpı Kuralı:* $\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (kf(x, y)) = kL$ (Herhangi bir k)
5. *Bölüm Kuralı:* $\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} = \dfrac{L}{M}$ $\quad M \neq 0$
6. *Kuvvet Kuralı:* r ve s tamsayılar ve $s \neq 0$, $L^{r/s}$ bir reel sayı ise,

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (f(x, y))^{r/s} = L^{r/s}$$

(s çift ise $L > 0$'ın pozitif olduğunu varsayıyoruz)

Teorem 1'i burada ispatlamamakla birlikte, neden doğru olduğuna dair formel olmayan bir düşünce veriyoruz. (x, y) noktası (x_0, y_0) noktasına yeterince yakın ise $f(x, y)$ değeri L'ye ve $g(x, y)$ değeri de M'ye yakındır (limitlerin formel olmayan açıklamasından). Şu halde $f(x, y) + g(x, y)$ değerinin $L + M$'ye yakın olması; $f(x, y) - g(x, y)$'nin $L - M$'ye yakın olması; $f(x, y)g(x, y)$'nin LM'ye yakın olması; $kf(x, y)$'nin kL'ye yakın olması; ve $M \neq 0$ ise $f(x, y)/g(x, y)$'nin L/M'ye yakın olması anlamlıdır.

Teorem 1'i polinomlara ve rasyonel fonksiyonla uyguladığımızda, bu fonksiyonların $(x, y) \to (x_0, y_0)$ iken limitlerinin, fonksiyonları (x_0, y_0)'da hesaplayarak bulabileceğini söyleyen yararlı sonucu elde ederiz. Tek koşul rasyonel fonksiyonların (x_0, y_0)'da tanımlı olmalarıdır.

ÖRNEK 1 Limitleri Hesaplamak

(a) $$\lim_{(x, y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = \frac{0 - (0)(1) + 3}{(0)^2(1) + 5(0)(1) - (1)^3} = -3$$

(b) $$\lim_{(x, y)\to(3, -4)} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$ ■

ÖRNEK 2 Limitleri Hesaplamak

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

limitini bulun.

Çözüm $(x, y) \to (0, 0)$ iken, payda $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ farkı 0'a yaklaştığından, Teorem 1'deki Bölüm Kuralını kullanamayız. Ama, pay ve paydayı $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ile çarparsak, limitini *bulabileceğimiz* eşdeğer bir kesir elde ederiz:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^2 - xy\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x - y)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)}{x - y} \qquad \text{Cebir}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) \qquad \text{Sıfırdan farklı } (x-y) \text{ çarpanını kısaltın}$$

$$= 0\left(\sqrt{0} + \sqrt{0}\right) = 0$$

$y = x$ yolu (üzerinde $x - y = 0$ dır)

$$\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

fonksiyonunun tanım kümesinde *bulunmadığından* $(x - y)$ çarpanını kısaltabiliriz. ■

ÖRNEK 3 Limit Tanımını Uygulamak

Varsa $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2}$'yi bulun.

Çözüm Önce, $x = 0$ doğrusu boyunca $y \neq 0$ iken fonksiyonun daima 0 değerini aldığını gözlemleriz. Benzer şekilde doğrusu boyunca, $x \neq 0$ olması koşulu ile fonksiyonun değeri yine 0 dır. Dolayısıyla, (x, y) noktası $(0, 0)$ noktasına yaklaşırken limit varsa bu limit değeri 0 olmalıdır. Bunun doğru olup olmadığını görmek için limit tanımını uygularız.

Bir $\epsilon > 0$ değeri keyfi olarak verilmiş olsun. Bir $\delta > 0$ değeri bulmak istiyoruz. Öyle ki,

$$\text{her ne zaman} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \ \text{ iken } \left|\frac{4xy^2}{x^2 + y^2} - 0\right| < \epsilon$$

veya

$$\text{her ne zaman} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \ \text{ iken } \frac{4|x|y^2}{x^2 + y^2} < \epsilon$$

olsun. $y^2 \leq x^2 + y^2$ olduğundan

$$\frac{4|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq 4|x| = 4\sqrt{x^2} \leq 4\sqrt{x^2 + y^2}$$

elde ederiz.

Şu halde $\delta = \epsilon/4$ seçer ve $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, alırsak

$$\left|\frac{4xy^2}{x^2 + y^2} - 0\right| \le 4\sqrt{x^2 + y^2} < 4\delta = 4\left(\frac{\epsilon}{4}\right) = \epsilon$$

elde ederiz. Tanımdan

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

sonucu elde edilir. ■

Süreklilik

Tek değişkenli fonksiyonlardaki gibi, süreklilik limit cinsinden ifade edilir.

TANIM İki Değişkenli Sürekli Fonksiyonlar

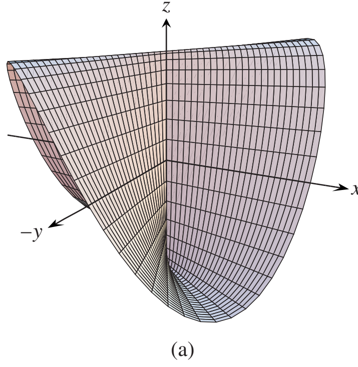
Aşağıdaki koşullar sağlanırsa, bir $f(x, y)$ fonksiyonu **(x_0, y_0) noktasında sürekli**dir:

1. $f(x_0, y_0)$'da tanımlıdır,
2. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ vardır,
3. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

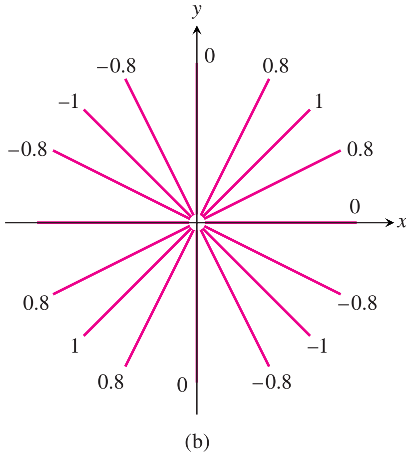
Tanım kümesinin her noktasında sürekli olan fonksiyona **sürekli fonksiyon** denir.

Limit tanımında olduğu gibi, süreklilik tanımı da f'nin tanım kümesinin iç noktaları kadar sınır noktalarında da geçerlidir. Tek koşul (x, y) noktasının her zaman tanım kümesi içinde olmasıdır.

Tahmin edebileceğiniz gibi, Teorem 1'in sonuçlarından biri sürekli fonksiyonların cebirsel kombinasyonlarının, söz konusu fonksiyonların tanımlı oldukları her noktada sürekli olduklarıdır. Bu, sürekli fonksiyonların toplam, fark, çarpım, sabitle çarpım, bölüm ve kuvvetlerinin tanımlı oldukları yerlerde sürekli oldukları anlamına gelir. Özel olarak, iki değişkenli polinomlar ve rasyonel fonksiyonlar tanımlandıkları her noktada süreklidirler.



(a)



(b)

ŞEKİL 14.11 (a)

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \ne (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

f fonksiyonunun grafiği. Fonksiyon, orijin hariç her yerde süreklidir. (b) f'nin seviye eğrileri (Örnek 4).

ÖRNEK 4 Tek Süreksizlik Noktası Olan Bir Fonksiyon

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \ne (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

fonksiyonunun orijin hariç her yerde sürekli olduğunu gösterin (Şekil 14.11).

Çözüm f fonksiyonu $(x, y) \ne (0, 0)$ olan her noktada süreklidir çünkü değerleri x ve y'nin rasyonel bir fonksiyonuyla

(0, 0)'da f'nin değeri tanımlıdır, ama $(x, y) \to (0, 0)$ iken f'nin limitinin olmadığını iddia ediyoruz. Bunun nedeni orijine farklı yollardan yaklaşmanın, şimdi göreceğimiz gibi farklı sonuçlar vermesidir.

Her m değeri için, f fonksiyonunun "delinmiş" $y = mx$, $x \neq 0$, doğrusu üzerinde sabit bir değeri vardır, çünkü

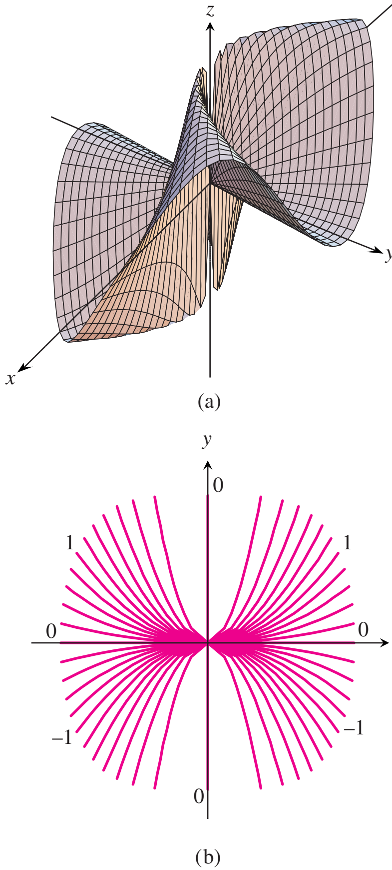
$$f(x, y)\Big|_{y=mx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}\Big|_{y=mx} = \frac{2x(mx)}{x^2 + (mx)^2} = \frac{2mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{2m}{1 + m^2}.$$

bulunur. Dolayısıyla, (x, y) doğru boyunca $(0, 0)$'a yaklaşırken f'nin değeri bu sayıdır:

$$\lim_{\substack{(x, y)\to(0,0) \\ y = mx \text{ boyunca}}} f(x, y) = \lim_{(x, y)\to(0,0)} \left[f(x, y)\Big|_{y=mx} \right] = \frac{2m}{1 + m^2}.$$

Bu limit m ile değişir. Dolayısıyla, (x, y) orijine yaklaşırken f'nin limiti diyebileceğimiz tek bir sayı yoktur. Limit bulunmaz ve fonksiyon sürekli değildir. ■

Örnek 4 iki (veya daha fazla değişkenli) fonksiyonların limitleri hakkında önemli bir noktayı ortaya koyar. Bir noktada bir limitin var olması için, limit her yaklaşım yolu için aynı olmalıdır. Bu sonuç, tek-değişken durumunda soldan ve sağdan limitlerin her ikisinin de aynı değere eşit olması gerekliliği ile benzerdir. Bu yüzden, iki veya daha fazla değişkenli fonksiyonlar için, farklı limitli yollar bulursak, yaklaştıkları noktada fonksiyonun limitinin olmadığını anlarız.



ŞEKİL 14.12 (a) $f(x, y) = 2x^2y/(x^4 + y^2)$'nin grafiği. Grafikte görüldüğü ve (b)'deki seviye eğrilerinin doğruladığı gibi, $\lim_{(x, y)\to(0,0)} f(x, y)$ yoktur (Örnek 5).

Bir Limitin Var Olmaması İçin İki-Yol Testi

(x, y) noktası (x_0, y_0)'a yaklaşırken bir $f(x, y)$ fonksiyonunun iki farklı yol boyunca farklı limitleri varsa, $\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$ yoktur.

ÖRNEK 5 İki-Yol Testini Uygulamak

(x, y) noktası $(0, 0)$'a yaklaşırken

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

fonksiyonunun (Şekil 14.12) limitinin olmadığını gösterin.

Çözüm Doğrudan yerine yazmakla limiti bulamayız. $0/0$ belirsiz formu ortaya çıkar. f'nin değerlerini $(0, 0)$'da sona eren yollar boyunca inceleriz. $y = kx^2$, $x \neq 0$ eğrisi boyunca, fonksiyonun değeri sabittir:

$$f(x, y)\Big|_{y=kx^2} = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}\Big|_{y=kx^2} = \frac{2x^2(kx^2)}{x^4 + (kx^2)^2} = \frac{2kx^4}{x^4 + k^2x^4} = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

Dolayısıyla,

$$\lim_{\substack{(x, y)\to(0,0) \\ y = kx^2 \text{ boyunca}}} f(x, y) = \lim_{(x, y)\to(0,0)} \left[f(x, y)\Big|_{y=kx^2} \right] = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

olur. Bu limit yola göre değişir. Örneğin, (x, y) noktası $(0, 0)$'a $y = x^2$ parabolü üzerinden yaklaşırsa, $k = 1$ olur ve limit 1'dir. (x, y) noktası $(0, 0)$'a x-ekseni üzerinden yaklaşırsa, $k = 0$'dır ve limit 0 olur. İki yol testine göre, (x, y) noktası $(0, 0)$'a yaklaşırken f'nin limiti yoktur.

Buradaki ifade çelişkili gözükebilir. "(x, y) orijine yaklaşırken f'nin limiti yoktur demekle neyi kastediyorsunuz—bir sürü limiti var" diyebilirsiniz. Ama sorun da budur.

Yoldan bağımsız tek bir limit yoktur ve dolayısıyla, tanıma göre, $\lim_{(x,y)\to(0,\,0)} f(x,\, y)$ yoktur. ■

Sürekli fonksiyonların bileşkeleri de süreklidir. İspatı, burada ihmal edilmiştir, tek değişkenli fonksiyonlardakine benzerdir (Bölüm 2.6, Teorem 10)

> **Bileşkelerin Sürekliliği**
> f fonksiyonu $(x_0,\, y_0)$ noktasında sürekli ise ve g fonksiyonu da $f(x_0,\, y_0)$'da sürekli tek-değişkenli bir fonksiyon ise $h(x,\, y) = g(f(x,\, y))$ ile tanımlı $h = g \circ f$ bileşke fonksiyonu (x_0, y_0)'da süreklidir.

Örneğin,

$$e^{x-y}, \qquad \cos\frac{xy}{x^2+1}, \qquad \ln(1+x^2y^2)$$

fonksiyonları her (x, y) noktasında süreklidirler.

Tek değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi, genel kural sürekli fonksiyonların bileşkelerinin sürekli olduğudur. Tek koşul her fonksiyonun uygulandığı yerde sürekli olmasıdır.

İkiden Fazla Değişkenli Fonksiyonlar

İki değişkenli fonksiyonların limit ve süreklilik kavramları ile toplam, fark, çarpım, sabitle çarpım, bölüm ve kuvvetlerin limitleri ve süreklilikleriyle ilgili sonuçlar üç veya daha fazla değişkenli fonksiyonlar için de geçerlidir.

$$\ln(x+y+z) \qquad \text{ve} \qquad \frac{y\sin z}{x-1}$$

gibi fonksiyonlar tanım kümelerinde süreklidirler ve P, (x, y, z) noktasını belirtmek üzere

$$\lim_{P\to(1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^2+\cos\sqrt{xy}} = \frac{e^{1-1}}{(-1)^2+\cos 0} = \frac{1}{2},$$

gibi limitler doğrudan yerine koymayla bulunabilir.

Sürekli Fonksiyonların Kapalı ve Sınırlı Bölgelerde Ekstremum Değerleri

Kapalı ve sınırlı bir $[a,\, b]$ aralığında sürekli olan tek değişkenli bir fonksiyonun, $[a,\, b]$ içinde en az bir defa bir mutlak maksimum değer ve bir mutlak minimum değer aldığını gördük. Aynısı, düzlemin kapalı ve sınırlı bir R bölgesinde (bir doğru parçası, bir disk veya içi dolu bir üçgen gibi) sürekli olan bir $z = f(x,\, y)$ fonksiyonu için doğrudur. Fonksiyon, R'nin bir noktasında bir mutlak maksimum değer ve R'nin bir noktasında da bir mutlak minimum değer alır.

Bunlara ve bu bölümdeki diğer teoremlere benzer teoremler üç veya daha fazla değişkenli fonksiyonlar için de geçerlidir. Örneğin, bir $w = f(x,\, y,\, z)$ sürekli fonksiyonu tanımlı olduğu herhangi bir kapalı ve sınırlı küme üzerinde (katı top veya küp, silindirik kabuk, dikdörtgensel bir katı cisim) mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini alması gerekir.

Bu ekstremum değerleri nasıl bulacağımızı Bölüm 14.7'de öğreneceğiz, fakat önce yüksek boyutlarda türevleri çalışmalıyız. Bu, sıradaki bölümün konusudur.

ALIŞTIRMALAR 14.2

İki Değişkenli Limitler

1–12 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2 - y^2 + 5}{x^2 + y^2 + 2}$

2. $\lim_{(x,y)\to(0,4)} \dfrac{x}{\sqrt{y}}$

3. $\lim_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

4. $\lim_{(x,y)\to(2,-3)} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^2$

5. $\lim_{(x,y)\to(0,\pi/4)} \sec x \tan y$

6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos \dfrac{x^2 + y^3}{x + y + 1}$

7. $\lim_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y}$

8. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \ln|1 + x^2y^2|$

9. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^y \sin x}{x}$

10. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \cos \sqrt[3]{|xy| - 1}$

11. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{x \sin y}{x^2 + 1}$

12. $\lim_{(x,y)\to(\pi/2,0)} \dfrac{\cos y + 1}{y - \sin x}$

Bölümlerin Limiti

13–20 alıştırmalarındaki limitleri, önce kesirleri yeniden yazarak bulun.

13. $\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$

14. $\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y}$

15. $\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq 1}} \dfrac{xy - y - 2x + 2}{x - 1}$

16. $\lim_{\substack{(x,y)\to(2,-4)\\ y\neq -4,\, x\neq x^2}} \dfrac{y + 4}{x^2y - xy + 4x^2 - 4x}$

17. $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \dfrac{x - y + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

18. $\lim_{\substack{(x,y)\to(2,2)\\ x+y\neq 4}} \dfrac{x + y - 4}{\sqrt{x + y} - 2}$

19. $\lim_{\substack{(x,y)\to(2,0)\\ 2x-y\neq 4}} \dfrac{\sqrt{2x - y} - 2}{2x - y - 4}$

20. $\lim_{\substack{(x,y)\to(4,3)\\ x\neq y+1}} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y + 1}}{x - y - 1}$

Üç Değişkenli Limitler

21–26 alıştırmalarındaki limitleri bulun.

21. $\lim_{P\to(1,3,4)} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)$

22. $\lim_{P\to(1,-1,-1)} \dfrac{2xy + yz}{x^2 + z^2}$

23. $\lim_{P\to(3,3,0)} (\sin^2 x + \cos^2 y + \sec^2 z)$

24. $\lim_{P\to(-1/4,\pi/2,2)} \tan^{-1} xyz$

25. $\lim_{P\to(\pi,0,3)} ze^{-2y} \cos 2x$

26. $\lim_{P\to(0,-2,0)} \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Düzlemde Süreklilik

27–30 alıştırmalarındaki fonksiyonlar düzlemin hangi (x, y) noktalarında süreklidir?

27. **a.** $f(x, y) = \sin(x + y)$ **b.** $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

28. **a.** $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$ **b.** $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + 1}$

29. **a.** $g(x, y) = \sin \dfrac{1}{xy}$ **b.** $g(x, y) = \dfrac{x + y}{2 + \cos x}$

30. **a.** $g(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - 3x + 2}$ **b.** $g(x, y) = \dfrac{1}{x^2 - y}$

Uzayda Süreklilik

31–34 alıştırmalarındaki fonksiyonlar uzayın hangi (x, y, z) noktalarında süreklidir?

31. **a.** $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

b. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

32. **a.** $f(x, y, z) = \ln xyz$ **b.** $f(x, y, z) = e^{x+y} \cos z$

33. **a.** $h(x, y, z) = xy \sin \dfrac{1}{z}$ **b.** $h(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + z^2 - 1}$

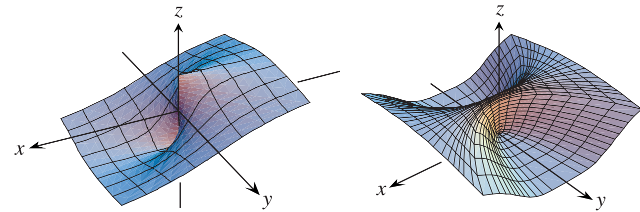
34. **a.** $h(x, y, z) = \dfrac{1}{|y| + |z|}$ **b.** $h(x, y, z) = \dfrac{1}{|xy| + |z|}$

Bir Noktada Limit Bulunmaması

Farklı yaklaşma yolları ele alarak, $(x, y) \to (0, 0)$ iken 35–42 alıştırmalarındaki fonksiyonların limitlerinin olmadığını gösterin.

35. $f(x, y) = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

36. $f(x, y) = \dfrac{x^4}{x^4 + y^2}$



37. $f(x, y) = \dfrac{x^4 - y^2}{x^4 + y^2}$

38. $f(x, y) = \dfrac{xy}{|xy|}$

39. $g(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

40. $g(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$

41. $h(x, y) = \dfrac{x^2 + y}{y}$

42. $h(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 - y}$

Teori ve Örnekler

43. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ ise, f'nin (x_0, y_0)'da tanımlı olması gerekir mi? Yanıtınızı açıklayın.

44. $f(x_0, y_0) = 3$ ise

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$$

için, f fonksiyonu (x_0, y_0)'da sürekli ise? ve $f(x_0, y_0)$'da sürekli değilse ne söyleyebilirsiniz? Yanıtınızı açıklayın.

İki değişkenli **fonksiyonlar için Sandviç Teoremi**, merkezi (x_0, y_0)'da olan bir dairenin içindeki her $(x, y) \leq (x_0, y_0)$ için $g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y)$ ise ve $(x, y) \to (x_0, y_0)$ iken g ile h'nin limitleri sonlu ve aynı L sayısı ise

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

olduğunu söyler. Bu sonucu kullanarak 45–48 alıştırmalarındaki soruları yanıtlayın.

45.

$$1 - \frac{x^2y^2}{3} < \frac{\tan^{-1} xy}{xy} < 1$$

olduğunu bilmek, size

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan^{-1} xy}{xy}$$

hakkında bir şey söyler mi? Yanıtınızı açıklayın.

46.

$$2|xy| - \frac{x^2y^2}{6} < 4 - 4\cos\sqrt{|xy|} < 2|xy|$$

olduğunu bilmek, size

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4 - 4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$$

hakkında bir şey söyler mi? Yanıtınızı açıklayın.

47. $|\sin(1/x)| \leq 1$ |olduğunu bilmek size

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \sin\frac{1}{x}$$

hakkında bir şey söyler mi? Yanıtınızı açıklayın.

48. $|\cos(1/y)| \leq 1$ olduğunu bilmek size

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cos\frac{1}{y}$$

hakkında bir şey söyler mi? Yanıtınızı açıklayın.

49. (*Örnek 4'ün devamı*)

a. Örnek 4'ü yeniden okuyun. Sonra

$$f(x, y)\Big|_{y=mx} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

formülüne $m = \tan\theta$ koyun ve sonucu sadeleştirerek, f'nin değerlerinin doğrunun eğim açısıyla nasıl değiştiğini gösterin.

b. (a) şıkkında elde ettiğiniz sonucu kullanarak $y = mx$ doğrusu boyunca $(x, y) \to (0, 0)$ iken f'nin limitinin yaklaşma açısına bağlı olarak –1'den 1'e değiştiğini gösterin.

50. Sürekli genişleme $f(0, 0)$'ı

$$f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

fonksiyonu orijinde sürekli olacak şekilde tanımlayın.

Kutupsal Koordinatlara Dönüştürme

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ ile ilerleme kaydedemiyorsanız, kutupsal koordinatlara geçmeyi deneyin. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ yazın ve ortaya çıkan ifadenin $r \to 0$ iken limitini araştırın. Başka bir deyişle, aşağıdaki kriteri sağlayan bir L sayısı olup olmadığına karar vermeye çalışın:

$\epsilon > 0$ sayısına karşılık, her r ve θ için

$$|r| < \delta \quad\Rightarrow\quad |f(r, \theta) - L| < \epsilon. \qquad (1)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Böyle bir L varsa,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{r\to 0} f(r, \theta) = L$$

olur. Örneğin,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\cos^3\theta = 0.$$

Bu eşitliklerin sonuncusunu doğrulamak için, $f(r, \theta) = r\cos^3\theta$ ve $L = 0$'ın (1) denklemini sağladığını göstermemiz gerekir. Yani, bir $\epsilon > 0$ sayısına karşılık, her r ve θ için,

$$|r| < \delta \quad\Rightarrow\quad |r\cos^3\theta - 0| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının var olduğunu göstermemiz gerekir.

$$|r\cos^3\theta| = |r||\cos^3\theta| \leq |r|\cdot 1 = |r|$$

olduğu için, $\delta = \epsilon$ alırsak, söylenenler doğru olur.

Tam tersine

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta$$

$|r|$'nin küçüklüğünden bağımsız olarak 0'dan 1'e kadar bütün değerleri alır, bu nedenle $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2/(x^2 + y^2)$ yoktur.

Bu örneklerin her birinde, $r \to 0$ iken limitin varlığı veya yokluğu oldukça açıktır. Ama kutupsal koordinatlara geçmek her zaman yararlı olmayabilir ve bizi yanlış sonuçlara götürebilir. Örneğin, limit her $\theta =$ sabit doğrusu (veya ışını) üzerinde bulunabilir, ama daha geniş anlamda bulunmayabilir. Örnek 4 bu noktayı belirtmektedir. Kutupsal koordinatlarda, $f(x, y) = (2x^2y)/(x^4 + y^2)$ fonksiyonu, $r \neq 0$ için

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta\sin 2\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}$$

halini alır. θ'yı sabit tutar ve $r \to 0$ alırsak, limit 0'dır. Ancak $y = x^2$ yolu üzerinde, $r \sin\theta = r^2 \cos^2\theta$ olur ve

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta\sin 2\theta}{r^2\cos^4\theta + (r\cos^2\theta)^2}$$

$$= \frac{2r\cos^2\theta\sin\theta}{2r^2\cos^4\theta} = \frac{r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta} = 1.$$

bulunur.

51–56 alıştırmalarında, $(x, y) \to (0, 0)$ iken f'nin limitini bulun veya limitin bulunmadığını gösterin.

51. $f(x, y) = \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}$

52. $f(x, y) = \cos\left(\dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right)$

53. $f(x, y) = \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}$

54. $f(x, y) = \dfrac{2x}{x^2 + x + y^2}$

55. $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{|x| + |y|}{x^2 + y^2}\right)$

56. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

57 ve 58 alıştırmalarında, $f(0, 0)$'ı, f fonksiyonu orijinde sürekli olacak şekilde tanımlayın.

57. $f(x, y) = \ln\left(\dfrac{3x^2 - x^2y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}\right)$

58. $f(x, y) = \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2}$

δ-ϵ Tanımlarını Kullanmak

59–62 alıştırmalarının her biri bir $f(x, y)$ fonksiyonu ve pozitif bir ϵ sayısı vermektedir. Her alıştırmada,

$$\sqrt{x^2 - y^2} < d$$

eşitsizliğini sağlayan her (x, y) için

$$|f(x, y) - f(0, 0)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının var olduğunu gösterin.

59. $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \epsilon = 0.01$

60. $f(x, y) = y/(x^2 + 1), \quad \epsilon = 0.05$

61. $f(x, y) = (x + y)/(x^2 + 1), \quad \epsilon = 0.01$

62. $f(x, y) = (x + y)/(2 + \cos x), \quad \epsilon = 0.02$

63–66 alıştırmalarının her biri bir $f(x, y, z)$ fonksiyonu ve pozitif bir ϵ sayısı vermektedir. Her alıştırmada,

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < d$$

eşitsizliğini sağlayan her (x, y) için

$$|f(x, y, z) - f(0, 0, 0)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının var olduğunu gösterin.

63. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad \epsilon = 0.015$

64. $f(x, y, z) = xyz, \quad \epsilon = 0.008$

65. $f(x, y, z) = \dfrac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}, \quad \epsilon = 0.015$

66. $f(x, y, z) = \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 z, \quad \epsilon = 0.03$

67. $f(x, y, z) = x + y - z$ fonksiyonunun her (x_0, y_0, z_0) noktasında sürekli olduğunu gösterin.

68. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$'nin orijinde sürekli olduğunu gösterin.

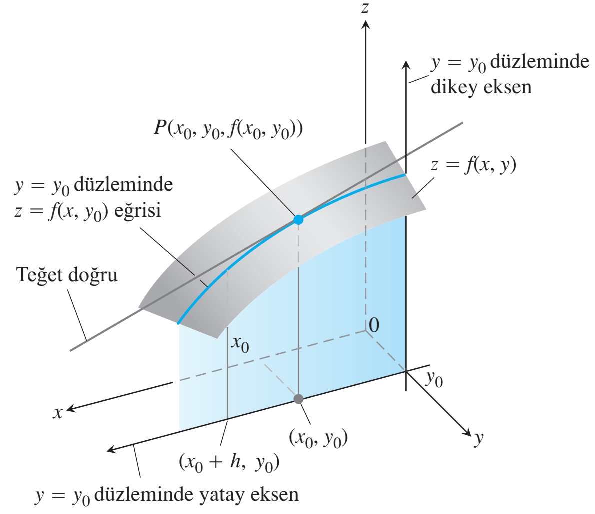
14.3 Kısmi Türevler

Çok değişkenli analiz, temelde tek değişkenli analizin her defasında bir değişkene uygulanmasıdır. Bir fonksiyonun bağımsız değişkenlerinden biri dışında hepsini sabit tutar ve o tek değişkene göre türev alırsak, bir "kısmi" türev elde ederiz. Bu bölüm kısmi türevlerin nasıl ortaya çıktıklarını, geometrik olarak nasıl yorumlandıklarını ve tek değişkenli bir fonksiyonun türev kurallarından bir kısmi türevin nasıl hesaplanacağını gösterir.

İki Değişkenli Bir Fonksiyonun Kısmi Türevleri

(x_0, y_0), bir $f(x, y)$ fonksiyonunun tanım kümesinde bir noktaysa, dikey $y = y_0$ düzlemi $z = f(x, y)$ yüzeyini $z = f(x, y_0)$ eğrisinde kesecektir (Şekil 14.13). Bu eğri $y = y_0$ düzlemindeki $z = f(x, y_0)$ fonksiyonunun grafiğidir. Bu düzlemdeki yatay koordinat x; dikey koordinat z'dir. y-değeri y_0'da sabit tutulmaktadır dolayısıyla y bir değişken değildir.

f'nin (x_0, y_0) noktasında, x'e göre kısmi türevini $f(x, y_0)$'ın $x = x_0$ noktasında x'e göre normal türevi olarak tanımlarız. Kısmi türevleri normal türevlerden ayırt etmek için önceden kullandığımız d yerine ∂ sembolünü kullanırız.



ŞEKİL 14.13 xy-düzleminin birinci dörtte bir bölgesinin üst tarafından bakıldığında, $y = y_0$ düzleminin $z = f(x, y)$ yüzeyi ile kesişimi.

> **TANIM** ***x*'e Göre Kısmi Türev**
>
> ***f(x, y)*'nin** (x_0, y_0) noktasında ***x*'e göre kısmi türevi**, limitin var olması şartıyla
>
> $$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
>
> olarak tanımlanır.

Kısmi türev için eşdeğer bir gösterim

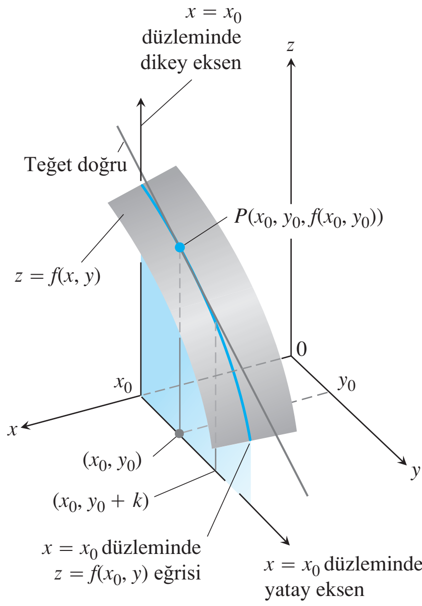
$$\left.\frac{d}{dx} f(x, y_0)\right|_{x = x_0}$$

dır.

$z = f(x, y_0)$ eğrisinin $y = y_0$ düzleminde $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ noktasındaki eğimi f'nin (x_0, y_0)'da x'e göre kısmi türevinin değeridir. Eğrinin P'deki teğeti ise $y = y_0$ düzleminde P'den bu eğimle geçen doğrudur. (x_0, y_0)'daki $\partial f/\partial x$ kısmi türevi, y değişkeni y_0 değerinde sabit tutulurken f'nin x'e göre değişim oranıdır. Bu (x_0, y_0)'da f' nin **i** yönündeki değişim oranıdır.

Bir kısmi türevin gösterimi neyi vurgulamak istediğimize bağlıdır:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ veya $f_x(x_0, y_0)$	"f'nin (x_0, y_0)'da x'e göre türevi" veya "(x_0, y_0) da f altı x." (x_0, y_0) noktasını vurgulamak için uygundur.
$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_{(x_0, y_0)}$	"z'nin (x_0, y_0)'da x'e göre kısmi türevi." Bilim ve mühendislikte değişkenlerle uğraşmak ve fonksiyonu açık olarak belirtmemek için yaygın olarak kullanılır.
$f_x, \frac{\partial f}{\partial x}, z_x$, veya $\frac{\partial z}{\partial x}$	"f'nin (veya z'nin) x'e göre kısmi türevi." Kısmi türeve kendisi de bir fonksiyonmuş gibi bakıyorsanız uygundur.



ŞEKİL 14.14 $x = x_0$ düzlemininin $z = f(x, y)$ yüzeyi ile kesişiminin, xy-düzleminin birinci dörtte bir bölgesinden görünüşü.

$f(x, y)$'nin bir (x_0, y_0) noktasında y'ye göre kısmi türevinin tanımı f'nin x'e göre kısmi türevinin tanımına benzerdir. x'i bir x_0 noktasında sabit tutar ve $f(x_0, y)$'nin y_0'da y'ye göre normal türevini alırız.

TANIM ***y*'ye Göre Kısmi Türev**

$f(x, y)$'nin (x_0, y_0) noktasında **y'ye göre kısmi türevi**, limitin var olması şartıyla

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = \left.\frac{d}{dy} f(x_0, y)\right|_{y=y_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

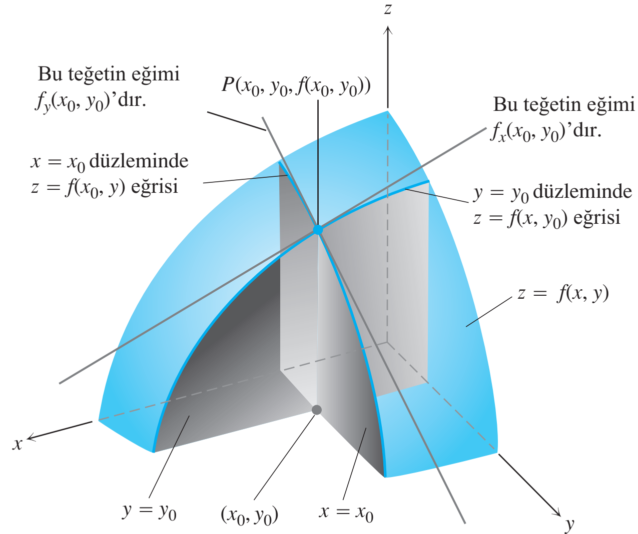
olarak tanımlanır.

$z = f(x_0, y)$ eğrisinin dikey $x = x_0$ düzleminde $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ noktasındaki (Şekil 14.14) eğimi, f'nin (x_0, y_0)'da y'ye göre kısmi türevidir. Eğrinin P'deki teğeti ise $x = x_0$ düzleminde P'den bu eğimle geçen doğrudur. Kısmi türev, x-değişkeni x_0 değerinde sabit tutulurken f'nin (x_0, y_0)'da y'e göre değişim oranıdır. Bu, (x_0, y_0)'da f'nin $\mathbf{j}$ yönündeki değişim oranıdır.

y'ye göre kısmi türev, x'e göre kısmi türevle aynı şekilde gösterilir:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad f_y(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad f_y.$$

Elimizde, $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ noktasında $z = f(x, y)$ düzlemiyle ilgili iki tane teğet bulunduğuna dikkat edin (Şekil 14.15). Bunların belirledikleri düzlem yüzeye P'de teğet midir? Öyle olduğunu göreceğiz, ama neden böyle olduğunu bulmadan önce kısmi türevler hakkında daha fazla şey öğrenmemiz gerekir.



ŞEKİL 14.15 Şekil 14.13 ve 14.14'ün birleşmiş hali $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ noktasındaki teğetler, en azından bu resimde, yüzeye teğet olan bir düzlem belirlemektedir.

Hesaplamalar

$\partial f/\partial x$ ve $\partial f/\partial y$'nin tanımları f'nin bir noktada türetilmesi için iki farklı yol verir: y'ye bir sabit gibi davranarak x'e göre her zamanki gibi türev ve x'e bir sabit gibi davranarak y'ye göre her zamanki gibi türev. Aşağıdaki örneklerin gösterdikleri gibi bu kısmi türevlerin değerleri verilen bir (x_0, y_0) noktasında genellikle farklıdırlar.

ÖRNEK 1 Bir Noktada Kısmi Türevlerin Bulunması

ise (4, –5) noktasında $\partial f/\partial x$ ve $\partial f/\partial y$ değerlerini bulun:

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1.$$

Çözüm $\partial f/\partial x$'i bulmak için, y'ye bir sabit olarak bakar ve x'e göre türev alırız:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + y - 1) = 2x + 3 \cdot 1 \cdot y + 0 - 0 = 2x + 3y$$

$\partial f/\partial x$'in (4, –5)'teki değeri 2(4) + 3(–5) = –7'dir.

$\partial f/\partial y$'yi bulmak için, x'e bir sabit olarak bakar ve y'ye göre türev alırız:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy + y - 1) = 0 + 3 \cdot x \cdot 1 + 1 - 0 = 3x + 1$$

$\partial f/\partial y$'nin (4, –5)'teki değeri 3(4) + 1 = 13'tür. ■

ÖRNEK 2 Bir Kısmi Türevi Bir Fonksiyon Olarak Bulmak

$f(x, y) = y \sin xy$ ise $\partial f/\partial y$'yi bulun.

Çözüm x'e bir sabit, f'ye de y ve $\sin xy$'nin bir çarpımı olarak bakarız:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y \sin xy) = y \frac{\partial}{\partial y} \sin xy + (\sin xy)\frac{\partial}{\partial y}(y)$$

$$= (y \cos xy)\frac{\partial}{\partial y}(xy) + \sin xy = xy \cos xy + \sin xy.$$ ■

TEKNOLOJİ KULLANMAK **Kısmi Türev Alma**

Basit bir grafik çizicisi hesaplamalarınızı çok boyutta bile destekleyebilir. Bir tek değişken dışındaki bütün değişkenlerin değerlerini belirlerseniz, grafik çiziciniz kısmi türevleri hesaplayıp, kalan değişkene göre izleri çizebilir. Tipik olarak bir Bilgisayarlı Cebir Sistemi kısmi türevleri sembolik ve sayısal olarak basit türevler kadar kolaylıkla hesaplayabilir. Çoğu sistem değişken sayısına bakmaksızın, bir fonksiyonun türevini almak için aynı komutu kullanır (Sadece hangi değişkene göre türev almak istediğinizi belirtin).

ÖRNEK 3 Kısmi Türevler Farklı Fonksiyonlar Olabilirler

$$f(x, y) = \frac{2y}{y + \cos x}$$

ise f_x ve f_y'yi bulun.

Çözüm f'ye bir bölüm olarak bakarız. y'yi bir sabit olarak alırsak,

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{y + \cos x}\right) = \frac{(y + \cos x)\frac{\partial}{\partial x}(2y) - 2y\frac{\partial}{\partial x}(y + \cos x)}{(y + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(y + \cos x)(0) - 2y(-\sin x)}{(y + \cos x)^2} = \frac{2y \sin x}{(y + \cos x)^2}.$$

buluruz. x'e bir sabit olarak bakmakla

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{y + \cos x}\right) = \frac{(y + \cos x)\frac{\partial}{\partial y}(2y) - 2y\frac{\partial}{dy}(y + \cos x)}{(y + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(y + \cos x)(2) - 2y(1)}{(y + \cos x)^2} = \frac{2\cos x}{(y + \cos x)^2}$$ ■

Kapalı türev alma, sıradaki örnekte görüleceği gibi, kısmi türev alma için de normal türev almada olduğu gibidir.

ÖRNEK 4 Kapalı Türev Alma

$$yz - \ln z = x + y$$

denklemi z'yi x ve y'nin iki bağımsız değişkenli bir fonksiyonu olarak tanımlıyorsa, ve kısmi türev varsa, $\partial z/\partial x$'i bulun.

Çözüm y'yi sabit olarak tutup, z'ye x'in türetilebilir bir fonksiyonu gibi bakarak, denklemin iki tarafının da x'e göre türevini alırız:

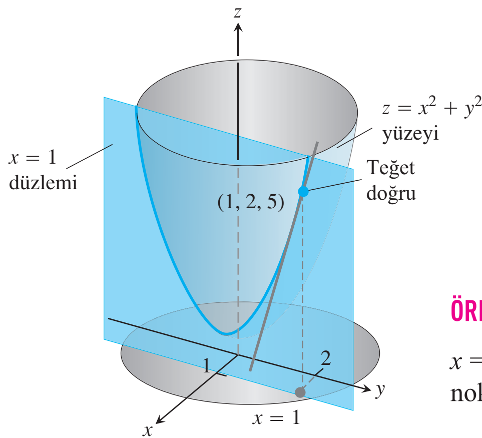
$$\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}\ln z = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 0$$

y-sabitken, $\frac{\partial}{\partial x}(yz) = y\frac{\partial z}{\partial x}$.

$$\left(y - \frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{yz - 1}.$$ ■



ŞEKİL 14.16 $x = 1$ düzlemi ile $z = x^2 + y^2$ yüzeyinin kesişim eğrisinin (1, 2, 5) noktasındaki teğeti (Örnek 5).

ÖRNEK 5 Bir Yüzeyin y-Yönündeki Eğimini Bulmak

$x = 1$ düzlemi $z = x^2 + y^2$ paraboloidiyle bir parabol üzerinde kesişir. Parabolün (1, 2, 5) noktasındaki teğetinin eğimini bulun (Şekil 14.16).

Çözüm Eğim, $\partial z/\partial y$ kısmi türevinin (1, 2)'deki değeridir:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = \left.\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)\right|_{(1,2)} = \left.2y\right|_{(1,2)} = 2(2) = 4.$$

Kontrol için, parabole $x = 1$ düzlemindeki tek-değişkenli $z = (1)^2 + y^2 = 1 + y^2$ fonksiyonu olarak bakabilir ve $y = 2$'deki eğimi sorabiliriz. Şimdi normal bir türev olarak hesaplanan eğim

$$\left.\frac{dz}{dy}\right|_{y=2} = \left.\frac{d}{dy}(1 + y^2)\right|_{y=2} = \left.2y\right|_{y=2} = 4$$

olarak bulunur. ■

İkiden Fazla Değişkenli Fonksiyonlar

İkiden fazla değişkenli fonksiyonların kısmi türevlerinin tanımları iki değişkenli fonksiyonların kısmi türevlerinin tanımına benzer. Diğer bağımsız değişkenler sabit tutularak, bir bağımsız değişkene göre alınan normal türevlerdir.

ÖRNEK 6 Üç Değişkenli Bir Fonksiyon

x, y ve z bağımsız değişkenler ve

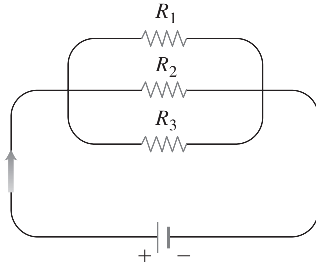
$$f(x, y, z) = x \sin (y + 3z)$$

ise,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}[x \sin (y + 3z)] = x\frac{\partial}{\partial z}\sin (y + 3z)$$

$$= x \cos (y + 3z)\frac{\partial}{\partial z}(y + 3z) = 3x \cos (y + 3z)$$

bulunur. ■



ŞEKİL 14.17 Bu şekilde düzenlenen dirençlere paralel bağlı denir (Örnek 7). Her direnç akımın bir kısmını geçirir. Toplam direnç R

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

formülüyle hesaplanır.

ÖRNEK 7 Paralel Bağlı Elektrik Dirençleri

R_1, R_2 ve R_3 dirençleri R ohmlu bir direnç oluşturacak şekilde paralel olarak bağlanırlarsa, R'nin değeri

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

denkleminden bulunabilir (Şekil 14.17). $R_1 = 30$, $R_2 = 45$ ve $R_3 = 90$ ohm iken, $\partial R/\partial R_2$'nin değerini bulun.

Çözüm $\partial R/\partial R_2$'yi bulmak için, R_1 ve R_3'e sabit olarak bakar ve kapalı türetmeyi kullanarak denkleminin iki tarafının da R_2'ye göre türevini alırız:

$$\frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

$$-\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial R_2} = 0 - \frac{1}{R_2{}^2} + 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R^2}{R_2{}^2} = \left(\frac{R}{R_2}\right)^2$$

$R_1 = 30$, $R_2 = 45$ ve $R_3 = 90$ iken,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{90} = \frac{3 + 2 + 1}{90} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

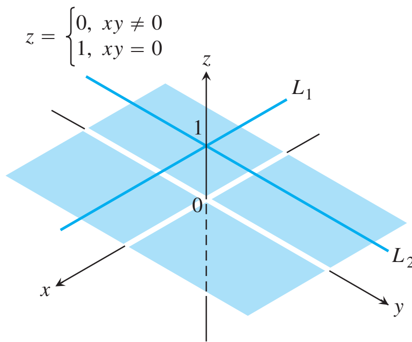
ve dolayısıyla $R = 15$ bulunur. Buradan

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \left(\frac{15}{45}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

elde edilir. ■

Kısmi Türevler ve Süreklilik

Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun bir noktada, orada sürekli olması gerekmeden, hem x hem de y'ye göre kısmi türevleri var olabilir. Bu, bir türevin varlığının sürekliliği gerektirdiği tek değişkenli fonksiyonlardan farklıdır. Ancak, $f(x, y)$'nin kısmi türevleri varsa ve merkezi (x_0, y_0)'da bulunan bir daire içinde sürekli iseler, bir sonraki bölümde göreceğimiz gibi, f fonksiyonu (x_0, y_0)'da süreklidir.



ŞEKİL 14.18

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiği L_1 ve L_2 doğruları ile xy-düzleminin dört tane açık dörtte bir bölgesinden oluşur. Fonksiyonun orijinde kısmi türevleri vardır, ama orada sürekli değildir (Örnek 8).

ÖRNEK 8 Kısmi Türevler Var, Fakat f Süreksiz

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$$

olsun (Şekil 14.18).

(a) (x, y) noktası $y = x$ doğrusu üzerinden $(0, 0)$'a yaklaşırken f'nin limitini bulun.

(b) f'nin orijinde sürekli olmadığını gösterin.

(c) Orijinde, $\partial f/\partial x$ ve $\partial f/\partial y$ kısmi türevlerinin ikisinin de var olduğunu gösterin.

Çözüm

(a) $f(x, y)$, $y = x$ doğrusu boyunca (orijin hariç) sabit olarak sıfır olduğundan

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)\Big|_{y=x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$$

dır.

(b) $f(0, 0) = 1$ olduğundan (a)'daki limit fonksiyonun $(0, 0)$'da sürekli olmadığını gösterir.

(c) $(0, 0)$'da $\partial f/\partial x$'i bulmak için y'yi $y = 0$'da sabit olarak tutarız. Bu durumda, her x için $f(x, y) = 1$ dir ve f'nin grafiği Şekil 14.18'deki L_1 doğrusudur. Bu doğrunun herhangi bir x noktasındaki eğimi $\partial f/\partial x = 0$ dır. Özel olarak, $(0, 0)$'da $\partial f/\partial x = 0$'dır. Benzer şekilde, herhangi bir y noktasında L_2 doğrusunun eğimi $\partial f/\partial y$'dir. Dolayısıyla, $(0, 0)$'da $\partial f/\partial y = 0$'dır. ■

Örnek 8'e rağmen, bir noktadaki *diferansiyellenebilmenin sürekliliği* gerektirmesi, yüksek boyutlarda hala geçerlidir. Örnek 8, yüksek boyutlarda diferansiyellenebilme için kısmi türevlerin varlığından ziyade daha güçlü bir koşulun gerektiğini gösterir. İki değişkenli fonksiyonların diferansiyellenebilmesini bu bölümün sonunda tanımlıyor ve süreklilikle olan bağlantısını tekrar ele alıyoruz.

İkinci Mertebe Kısmi Türevler

Bir $f(x, y)$ fonksiyonun iki kere türevini aldığımızda, ikinci mertebeden türevlerini elde ederiz. Bu türevler genellikle aşağıdaki gibi gösterilir:

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	"*d* kare *fdx* kare"	veya	f_{xx}	"*f* altı *xx*"
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	"*d* kare *fdy* kare"	veya	f_{yy}	"*f* altı *yy*"

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{"}d \text{ kare } f dx\, dy\text{"} \quad \text{veya} \quad f_{yx} \quad \text{"}f \text{ altı } yx\text{"}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{"}d \text{ kare } f dy\, dx\text{"} \quad \text{veya} \quad f_{xy} \quad \text{"}f \text{ altı } xy\text{"}$$

Bunları tanımlayan denklemler

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

şeklindedir. Türevlerin alındığı sıraya dikkat edin:

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ Önce y'ye göre, sonra x'e göre türev alın.

$f_{yx} = (f_y)_x$ Aynı anlama gelir.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

ÖRNEK 9 İkinci Mertebeden Kısmi Türevleri Bulmak

$f(x, y) = x \cos y + ye^x$ ise,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

türevlerini bulun.

Çözüm

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x \cos y + ye^x) = \cos y + ye^x$$

Buradan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\sin y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = ye^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x \cos y + ye^x) = -x \sin y + e^x$$

Buradan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\sin y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -x \cos y$$

bulunur. ■

Karışık Türev Teoremi

Örnek 9'daki

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

ikinci-mertebe "karışık" türevlerinin eşit olduğunu fark etmiş olabilirsiniz. Bu bir rastlantı değildi. Her ne zaman f, f_x, f_y, f_{xy} ve f_{yx} sürekli ise, bunlar eşit olmalıdır.

TEOREM 2 Karışık Türev Teoremi
$f(x, y)$ ve f_x, f_y, f_{xy} ve f_{yx} kısmi türevleri bir (a, b) noktasını içeren açık bir bölge üzerinde tanımlısalar ve hepsi (a, b)'de sürekli ise,

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

olur.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Alexis Clairaut
(1713–1765)

Teorem 2, onu ortaya atan Fransız matematikçi Alexis Clairaut'nun adına Clairaut Teoremi olarak da bilinmektedir. Bir ispatı Ek 7'de verilmiştir. Teorem 2, ikinci-mertebeden karışık bir türev hesaplamak için, süreklilik koşullarının sağlanması şartıyla, türevi her iki sırada da alabileceğimizi söyler. Bu yararımıza olabilir.

ÖRNEK 10 Türev Alma Sırasını Seçmek

$$w = xy + \frac{e^y}{y^2 + 1}$$

ise, $\partial^2 w / \partial x \partial y$'yi bulun.

Çözüm $\partial^2 w / \partial x \partial y$ sembolü bize önce y'ye, sonra da x'e göre türev almamızı söyler. Ancak, y'ye göre türev almayı erteler ve önce x'e göre türev alırsak, yanıtı daha kolay bulabiliriz. İki adımda,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 1$$

buluruz. İlk önce y'ye göre türev alırsak yine $\partial^2 w / \partial x \partial y = 1$ buluruz. ■

Daha da Yüksek Mertebeli Türevler

Çoğunlukla, uygulamalarda daha sık ortaya çıktıkları için, birinci ve ikinci mertebeden türevlerle uğraşacağımız halde, söz konusu türevler var oldukları sürece, bir fonksiyonun kaç kere türevini alabileceğimiz hakkında teorik bir sınır yoktur. Üçüncü ve dördüncü mertebe türevler aşağıdaki gibi sembollerle gösterilir:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = f_{yyx}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = f_{yyxx},$$

vs...
İkinci mertebeden türevlerde olduğu gibi, söz konusu mertebeye kadar olan bütün türevler sürekli oldukları sürece, türev almanın sırası önemli değildir.

ÖRNEK 11 Dördüncü Mertebeden Bir Kısmi Türev Hesaplamak

$f(x, y, z) = 1 - 2xy^2z + x^2y$ ise f_{yxyz} türevini bulun.

Çözüm Önce y değişkenine, sonra x, sonra tekrar y ve son olarak z'ye göre türev alırız:

$$f_y = -4xyz + x^2$$

$$f_{yx} = -4yz + 2x$$

$$f_{yxy} = -4z$$

$$f_{yxyz} = -4$$ ■

Diferansiyellenebilme

Diferansiyellenebilmenin başlangıç noktası Fermat'nın farklar oranı değil, daha çok artım fikridir. Bölüm 3.8'deki tek değişkenli fonksiyonlarla çalışmalarımızdan, $y = f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$'da diferansiyellenebilirse, x'i x_0'dan $x_0 + \Delta x$'e değiştirmekten kaynaklanan f'nin değerindeki değişikliğin, $\Delta x \to 0$ iken $\epsilon \to 0$ olmak üzere,

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon \Delta x$$

şeklinde bir denklemle verildiğini hatırlayacaksınız. İki değişkenli fonksiyonlar için, benzer özellik diferansiyellenebilmenin tanımı halini alır. Artım Teoremi (ileri analizden) bu özelliğin geçerli olmasını ne zaman beklememiz gerektiğini söyler.

TEOREM 3 İki Değişkenli Fonksiyonlar için Artım Teoremi

$f(x, y)$'nin birinci kısmi türevlerinin, (x_0, y_0) noktasını içeren açık bir R bölgesinde tanımlı olduklarını ve f_x ve f_y'nin (x_0, y_0)'da sürekli olduklarını varsayın. Bu durumda, (x_0, y_0)'dan R'deki başka bir $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ noktasına ilerlemekten dolayı f'de oluşacak

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

değişikliği, $\Delta x, \Delta y \to 0$ iken, $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ olmak üzere,

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

şeklinde bir denklemi sağlar.

Ek 7'deki ispatta, epsilonların nereden geldiğini görebilirsiniz. Ayrıca, ikiden fazla değişkenli fonksiyonlar için de benzer sonuçların geçerli olduğunu göreceksiniz.

TANIM Diferansiyel Fonksiyon

Bir $z = f(x, y)$ fonksiyonu için $f_x(x_0, y_0)$ ve $f_y(x_0, y_0)$ varsa ve Δz,

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

şeklindeki bir denklemi $\Delta x, \Delta y \to 0$ iken $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ olmak üzere sağlarsa, $z = f(x, y)$ fonksiyonu (x_0, y_0)'da **diferansiyellenebilirdir.** Tanım kümesinin her noktasında diferansiyellenebilirse, f'ye **diferansiyellenebilir** deriz.

Bu tanım ışığında, Teorem 3'ten, birinci türevleri *sürekli* ise, f'nin diferansiyellenebilir olduğu sonucunu hemen çıkarabiliriz.

TEOREM 3'ün SONUCU Kısmi Türevlerin Sürekliliği

Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun f_x ve f_y kısmi türevleri açık bir R bölgesinde sürekli iseler, f fonksiyonu R'nin her noktasında diferansiyellenebilirdir.

$z = f(x, y)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir ise diferansiyellenebilme tanımı, Δx ve Δy 0'a yaklaşırken,

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

değerinin sıfıra gitmesini garantiler. Bu bize bir $f(x, y)$ fonksiyonunun diferansiyellenebildiği her noktada sürekli olduğunu söyler.

TEOREM 4 Diferansiyellenebilirlik Sürekliliği Gerektirir
Bir $f(x, y)$ fonksiyonu (x_0, y_0)'da diferansiyellenebilir ise f fonksiyonu (x_0, y_0)'da süreklidir.

Teorem 3 ve 4'ten görebileceğimiz gibi, f_x ve f_y kısmi türevleri (x_0, y_0)'ı içeren açık bir bölgede sürekliyseler, $f(x, y)$ fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında sürekli olmak zorundadır. Ama, Örnek 8'de gördüğümüz gibi, iki değişkenli bir fonksiyon için birinci-mertebeden kısmi türevlerin var olduğu bir noktada, fonksiyonun süreksiz olabileceğini hatırlayın. Varlık tek başına yeterli değildir.

ALIŞTIRMALAR 14.3

Birinci-Mertebe Kısmi Türevleri Hesaplama

1–22 alıştırmalarında, $\partial f/\partial x$ ve $\partial f/\partial y$'yi hesaplayın.

1. $f(x, y) = 2x^2 - 3y - 4$
2. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$
3. $f(x, y) = (x^2 - 1)(y + 2)$
4. $f(x, y) = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x - 6y + 2$
5. $f(x, y) = (xy - 1)^2$
6. $f(x, y) = (2x - 3y)^3$
7. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
8. $f(x, y) = (x^3 + (y/2))^{2/3}$
9. $f(x, y) = 1/(x + y)$
10. $f(x, y) = x/(x^2 + y^2)$
11. $f(x, y) = (x + y)/(xy - 1)$
12. $f(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$
13. $f(x, y) = e^{(x+y+1)}$
14. $f(x, y) = e^{-x}\sin(x + y)$
15. $f(x, y) = \ln(x + y)$
16. $f(x, y) = e^{xy}\ln y$
17. $f(x, y) = \sin^2(x - 3y)$
18. $f(x, y) = \cos^2(3x - y^2)$
19. $f(x, y) = x^y$
20. $f(x, y) = \log_y x$
21. $f(x, y) = \int_x^y g(t)\,dt$ (g, her t değerinde sürekli)
22. $f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n \quad (|xy| < 1)$

23–34 alıştırmalarında, f_x, f_y ve f_z'yi bulun.

23. $f(x, y, z) = 1 + xy^2 - 2z^2$
24. $f(x, y, z) = xy + yz + xz$
25. $f(x, y, z) = x - \sqrt{y^2 + z^2}$
26. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$
27. $f(x, y, z) = \sin^{-1}(xyz)$
28. $f(x, y, z) = \sec^{-1}(x + yz)$
29. $f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z)$
30. $f(x, y, z) = yz\ln(xy)$
31. $f(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$
32. $f(x, y, z) = e^{-xyz}$
33. $f(x, y, z) = \tanh(x + 2y + 3z)$
34. $f(x, y, z) = \sinh(xy - z^2)$

35–40 alıştırmalarında, fonksiyonun her değişkene göre kısmi türevini bulun.

35. $f(t, \alpha) = \cos(2\pi t - \alpha)$
36. $g(u, v) = v^2 e^{(2u/v)}$
37. $h(\rho, \phi, \theta) = \rho\sin\phi\cos\theta$
38. $g(r, \theta, z) = r(1 - \cos\theta) - z$
39. **Kalbin yaptığı iş** (Bölüm 3.8, Alıştırma 51)

$$W(P, V, \delta, v, g) = PV + \frac{V\delta v^2}{2g}$$

40. **Wilson miktar formülü** (Bölüm 4.5, Alıştırma 45)

$$A(c, h, k, m, q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$$

İkinci-Mertebeden Kısmi Türevleri Hesaplamak

41–46 alıştırmalarındaki fonksiyonların bütün ikinci mertebe kısmi türevlerini bulun.

41. $f(x, y) = x + y + xy$
42. $f(x, y) = \sin xy$

43. $g(x, y) = x^2y + \cos y + y \sin x$

44. $h(x, y) = xe^y + y + 1$ **45.** $r(x, y) = \ln(x + y)$

46. $s(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$

Karışık Kısmi Türevler

47–50 alıştırmalarında, $w_{xy} = w_{yx}$ olduğunu doğrulayın.

47. $w = \ln(2x + 3y)$ **48.** $w = e^x + x \ln y + y \ln x$

49. $w = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4$ **50.** $w = x \sin y + y \sin x + xy$

51. Hangi türev alma sırası f_{xy}'yi daha hızlı hesaplar: önce x mi, yoksa önce y mi? Yazmadan yanıtlamaya çalışın.

a. $f(x, y) = x \sin y + e^y$

b. $f(x, y) = 1/x$

c. $f(x, y) = y + (x/y)$

d. $f(x, y) = y + x^2y + 4y^3 - \ln(y^2 + 1)$

e. $f(x, y) = x^2 + 5xy + \sin x + 7e^x$

f. $f(x, y) = x \ln xy$

52. Aşağıdaki fonksiyonların her biri için beşinci-mertebe kısmi türev $\partial^5 f/\partial x^2 \partial y^3$ sıfırdır. Bunu en kısa yoldan göstermek için, önce hangi değişkene göre türev alırsınız: x'e mi, y'ye mi? Yazmadan yanıtlamaya çalışın.

a. $f(x, y) = y^2x^4e^x + 2$

b. $f(x, y) = y^2 + y(\sin x - x^4)$

c. $f(x, y) = x^2 + 5xy + \sin x + 7e^x$

d. $f(x, y) = xe^{y^2/2}$

Kısmi Türev Tanımını Kullanmak

53 ve 54 alıştırmalarında, fonksiyonların belirlenen noktalardaki kısmi türevlerini hesaplamak için kısmi türevin limit tanımını kullanın.

53. $f(x, y) = 1 - x + y - 3x^2y$, (1, 2)'de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

54. $f(x, y) = 4 + 2x - 3y - xy^2$, (–2, 1)'de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

55. Üç Değişken $w = f(x, y, z)$ üç bağımsız değişkenli bir fonksiyon olsun. (x_0, y_0, z_0) noktasında $\partial f/\partial z$ kısmi türevinin formel tanımını yazın. Bu tanımı kullanarak $f(x, y, z) = x^2yz^2$ için (1, 2, 3)'te $\partial f/\partial z$'yi bulun.

56. Üç Değişken $w = f(x, y, z)$ üç bağımsız değişkenli bir fonksiyon olsun. (x_0, y_0, z_0) noktasında $\partial f/\partial y$ kısmi türevinin formel tanımını yazın. Bu tanımı kullanarak $f(x, y, z) = -2xy^2 + yz^2$ için (–1, 0, 3)'te $\partial f/\partial y$ 'yi bulun.

Kapalı Türev Alma

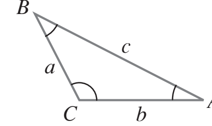
57. $xy + z^3x - 2yz = 0$

denklemi z'yi iki bağımsız x ve y değişkeninin bir fonksiyonu olarak tanımlıyorsa ve kısmi türev varsa, (1, 1, 1)' de $\partial z/\partial x$'in değerini bulun.

58. $xz + y \ln x - x^2 + 4 = 0$

denklemi x'i iki bağımsız y ve z değişkeninin bir fonksiyonu olarak tanımlıyorsa ve kısmi türev varsa, (1, –1, –3)'te $\partial x/\partial z$'nin değerini bulun.

59 ve 60 alıştırmaları aşağıdaki üçgenle ilgilidir.



59. A'yı kapalı olarak a, b ve c'nin bir fonksiyonu olarak tanımlayın ve $\partial A/\partial a$ ve $\partial A/\partial b$'yi hesaplayın.

60. a'yı kapalı olarak A, b ve B'nin bir fonksiyonu olarak tanımlayın ve $\partial a/\partial A$ ve $\partial a/\partial B$'yi hesaplayın.

61. İki Bağlı Değişken $x = v \ln u$ ve $y = u \ln v$ denklemleri, u ve v'yi iki bağımsız değişken x ve y'nin fonksiyonları olarak tanımlıyorsa ve v_x varsa, v_x'i u ve v cinsinden ifade edin. (*İpucu*: İki denklemin de x'e göre türevlerini alın ve u_x'i eleyerek v_x'i çözün.)

62. İki Bağlı Değişken $u = x^2 - y^2$ ve $v = x^2 - y$ denklemleri x ve y'yi iki bağımsız değişken u ve v'nin fonksiyonu olarak tanımlıyorsa ve kısmi türevler varsa, $\partial x/\partial u$ ve $\partial y/\partial u$'yu bulun (Alıştırma 61'deki ipucuna bakın). Sonra $s = x^2 + y^2$ alın ve $\partial s/\partial u$' yu bulun.

Laplace Denklemleri

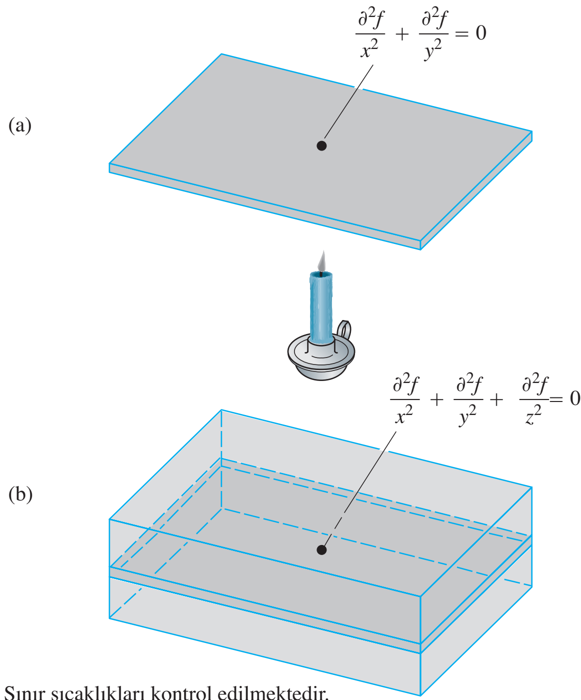
Üç boyutlu Laplace denklemi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

uzayda durağan-durum sıcaklık dağılımları $T = f(x, y, z)$, gravitasyonel potansiyeller ve elektrostatik potansiyeller tarafından sağlanır. Bu denklemdeki $\partial^2 f/\partial z^2$ terimi atılarak elde edilen **iki-boyutlu Laplace denklemi**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

bir düzlemdeki potansiyelleri ve durağan durum dağılımlarını tanımlar (Şekle bakın). (a)'daki düzleme (b)'deki katı cismin z-eksenine dik olan ince bir dilimi olarak bakılabilir.



Sınır sıcaklıkları kontrol edilmektedir.

63–68 alıştırmalarındaki her fonksiyonun bir Laplace denklemini sağladığını gösterin.

63. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

64. $f(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z$

65. $f(x, y) = e^{-2y} \cos 2x$

66. $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

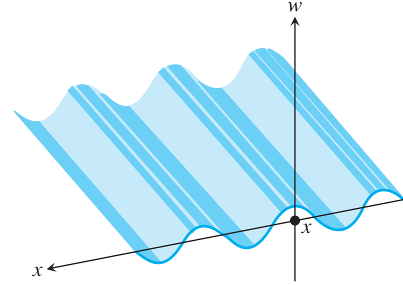
67. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

68. $f(x, y, z) = e^{3x+4y} \cos 5z$

Dalga Denklemi

Bir okyanus kıyısında durur ve dalgaların bir resmini çekersek, resim bir zaman anında düzgün bir tepe ve vadi şekli gösterir. Uzayda, mesafeye göre, periyodik bir dikey hareket görürüz. Suda durursak, dalgalar geçerken, suyun yükselip alçalmasını hissedebiliriz. Zaman içinde periyodik dikey bir hareket görürüz. Fizikte, bu güzel simetri, w dalga yüksekliği, x uzaklık değişkeni, t zaman değişkeni ve c de dalgaların ilerleme hızı olmak üzere **bir boyutlu dalga denklemi**yle ifade edilir:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$



Örneğimizde, x okyanusun yüzeyi boyunca olan uzaklıktır, ama başka uygulamalarda, x titreşen bir ipteki uzaklık, havadaki uzaklık (ses dalgaları) veya uzaydaki uzaklık (ışık dalgaları) olabilir. c sayısı ortama ve dalga cinsine göre değişir.

69–75 alıştırmalarındaki fonksiyonların hepsinin dalga denkleminin çözümleri olduğunu gösterin.

69. $w = \sin(x + ct)$

70. $w = \cos(2x + 2ct)$

71. $w = \sin(x + ct) + \cos(2x + 2ct)$

72. $w = \ln(2x + 2ct)$

73. $w = \tan(2x - 2ct)$

74. $w = 5\cos(3x + 3ct) + e^{x+ct}$

75. $w = f(u)$, burada f, u'nun diferansiyellenebilir bir fonksiyonu ve a bir sabit olmak üzere $u = a(x + ct)$ dir.

Sürekli Kısmi Türevler

76. Açık bir R bölgesinde birinci kısmi türevleri sürekli olan bir $f(x, y)$ fonksiyonunun R'de sürekli olması gerekir mi? Yanıtınızı açıklayın.

77. Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun ikinci mertebe kısmi türevleri açık bir R bölgesinde sürekli ise, f'nin birinci mertebe kısmi türevlerinin R'de sürekli olmaları gerekir mi? Yanıtınızı açıklayın.

14.4 Zincir Kuralı

Bölüm 3.5'te, tek değişkenli fonksiyonlar için incelemiş olduğumuz Zincir Kuralı, $w = f(x)$ x'in türetilebilen bir fonksiyonu ve $x = g(t)$ de t'nin türetilebilen bir fonksiyonu olduğunda, w'nun t' nin türetilebilen bir fonksiyonu haline geldiğini ve dw/dt'nin

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt}$$

formülüyle hesaplanabileceğini söylemişti.

İki veya daha fazla değişkenli fonksiyonlar için Zincir Kuralının birkaç formu vardır. Form, kaç değişkenin söz konusu olduğuna bağlıdır. Fakat, ilave değişkenlerin varlığını idrak ettiğimizde Bölüm 3.5'teki Zincir Kuralı gibi çalışır.

İki Değişkenli Fonksiyonlar

$x = x(t)$ ve $y = y(t)$ t'nin türetilebilir fonksiyonları iken $w = f(x, y)$ fonksiyonu için Zincir Kuralı aşağıdaki teoremde verilmektedir.

TEOREM 5 İki Bağımsız Değişkenli Fonksiyonlar İçin Zincir Kuralı

$w = f(x, y)$ fonksiyonunun f_x ve f_y kısmi türevleri sürekli ise ve $x = x(t)$, $y = y(t)$ t'nin türetilebilir fonksiyonları ise $w = f(x(t), y(t))$ bileşkesi t'nin türetilebilir bir fonksiyonudur ve

$$\frac{df}{dt} = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

veya

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

olur.

İspat x ve y $t = t_0$'da türetilebiliyorlarsa, w'nun da t_0'da türetilebildiğini ve $P_0 = (x(t_0), y(t_0))$ olmak üzere

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0}$$

olduğunu göstermekten ibarettir.

Δx, Δy ve Δw, t'yi t_0'dan $t_0 + \Delta t$'ye değiştirmekten kaynaklanan artımlar olsun. f diferansiyellenebilir olduğundan (Bölüm 14.3'teki tanıma bakın), Δx, $\Delta y \to 0$ iken ϵ_1, $\epsilon_2 \to 0$ olmak üzere,

$$\Delta w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

olur. dw/dt'yi bulmak için bu denklemini Δt ile böler ve Δt'yi sıfıra götürürüz. Bölüm

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

ve Δt'yi sıfıra götürmek

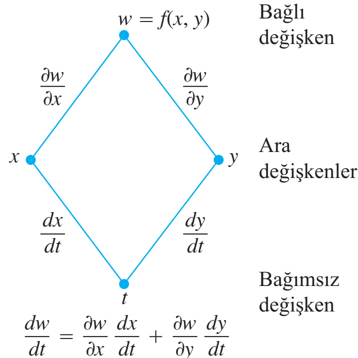
$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t}$$

$$= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0} + 0 \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + 0 \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0}$$

verir. ■

Zincir Kuralını hatırlamanın yolu aşağıdaki diyagramı çizmektir. dw/dt'yi bulmak için, w'dan başlayın ve t'ye giden her yolu, yoldaki türevleri çarparak, okuyun. Sonra çarpımları toplayın.

Zincir Kuralı



Yandaki **ağaç diyagramı** Zincir Kuralını hatırlamak için uygun bir yol sunar. Diyagramdan $t = t_0$ iken, dx/dt ve dy/dt türevlerinin t_0'da hesaplandıklarını görüyorsunuz.

Bu durumda t_0'ın değeri türetilebilir x fonksiyonu için x_0 değerini ve türetilebilir y fonksiyonu için y_0 değerini belirler. $\partial w/\partial x$ ve $\partial w/\partial y$ kısmi türevleri (ki kendileri de x ve y'nin fonksiyonlarıdır) t_0'a karşılık gelen $P_0(x_0,\ y_0)$ noktasında hesaplanır. x ve y (t tarafından kontrol edilen) *ara değişkenler* ve w da bağlı değişkenken, "gerçek" bağımsız değişken t'dir.

Zincir Kuralının daha kesin bir gösterimi Teorem 5'teki çeşitli türevlerin nasıl hesaplandığını gösterir:

$$\frac{dw}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{dt}(t_0).$$

ÖRNEK 1 Zincir Kuralını Uygulamak

$x = \cos t,\ \ y = \sin t$ yolu boyunca

$$w = xy$$

fonksiyonunun türevini bulmak için Zincir Kuralını kullanın. $t = \pi/2$'de türevin değeri nedir?

Çözüm dw/dt'yi bulmak için Zincir Kuralını aşağıdaki gibi uygularız:

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{\partial(xy)}{\partial x} \cdot \frac{d}{dt}(\cos t) + \frac{\partial(xy)}{\partial y} \cdot \frac{d}{dt}(\sin t) \\
&= (y)(-\sin t) + (x)(\cos t) \\
&= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) \\
&= -\sin^2 t + \cos^2 t \\
&= \cos 2t.
\end{aligned}$$

Bu örnekte sonucu daha doğrudan bir hesaplamayla doğrulayabiliriz. t'nin bir fonksiyonu olarak

$$w = xy = \cos t \sin t = \frac{1}{2}\sin 2t$$

şeklinde ifade edilebilir, böylece

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right) = \frac{1}{2} \cdot 2\cos 2t = \cos 2t$$

buluruz. Her iki durumda da t'nin verilen değerinde

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=\pi/2} = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos \pi = -1$$

elde edilir. ■

Üç Değişkenli Fonksiyonlar İçin Zincir Kuralı

Üç değişkenli fonksiyonlar için Zincir Kuralını muhtemelen tahmin edebilirsiniz. Sadece iki-değişkenli formüle beklenen üçüncü terimi eklemekten ibarettir.

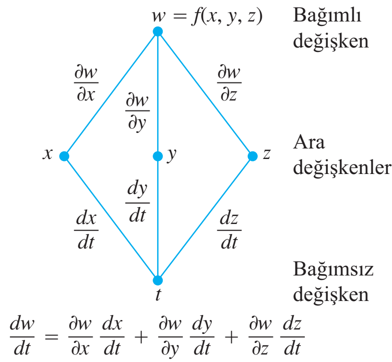
TEOREM 6 Üç Bağımsız Değişkenli Fonksiyonlar İçin Zincir Kuralı

$w = f(x, y, z)$ türetilebiliyorsa ve x, y, z de t'nin türetilebilir fonksiyonlarıysa, w da t'nin türetilebilir bir fonksiyonudur ve

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

olur.

Burada w'den t'ye giden iki yerine üç yol vardır. Ama dw/dt'yi bulma yolu hala aynıdır. Yolda türevleri çarparak her yolu okuyun; sonra toplayın.



İspatı, şimdi iki yerine üç ara değişken olması dışında, Teorem 5'in ispatı ile aynıdır. Yeni denklemi hatırlamak için kullandığımız diyagram da, w'dan t'ye üç yol ile benzerdir.

ÖRNEK 2 Bir Helis Boyunca Bir Fonksiyonun Değerlerindeki Değişim

$$w = xy + z, \qquad x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = t$$

ise, dw/dt'yi bulun. Bu örnekte w'nun değerleri bir helis yolu boyunca değişir (Bölüm 13.1). Türevin $t = 0$'daki değeri nedir?

Çözüm

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}\\ &= (y)(-\sin t) + (x)(\cos t) + (1)(1)\\ &= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 1\\ &= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 1 + \cos 2t.\end{aligned}$$

Ara değişkenlerin yerine değerlerini yazın.

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=0} = 1 + \cos(0) = 2.$$

■

Bir eğri boyunca değişimin bir fiziksel yorumu: Parametrik denklemleri $x = x(t)$, $y = y(t)$ ve $z = z(t)$ olan bir C eğrisi boyunca her (x, y, z) noktasındaki sıcaklık $w = T(x, y, z)$ ise $w = T(x(t), y(t), z(t))$ bileşkesi, eğri boyunca, sıcaklığı t cinsinden ifade eder. dw/dt türevi, Teorem 6'da hesaplandığı gibi, eğri boyunca sıcaklıktaki anlık değişim oranıdır.

Yüzeyler Üzerinde Tanımlanan Fonksiyonlar

Uzayda bir küre üzerindeki (x, y, z) noktalarında $w = f(x, y, z)$ sıcaklığıyla ilgileniyorsak, x, y ve z'yi noktaların enlem ve boylamlarını belirten r ve s değişkenlerinin fonksiyonları olarak düşünmeyi yeğleriz. $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$ ve $z = k(r, s)$ ise, sıcaklığı r ve s'nin fonksiyonu olarak

$$w = f(g(r, s), h(r, s), k(r, s))$$

bileşke fonksiyonuyla r ve s'nin fonksiyonu olarak ifade edebiliriz. Doğru koşullar altında, hem r hem de s'ye göre kısmi türevler aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

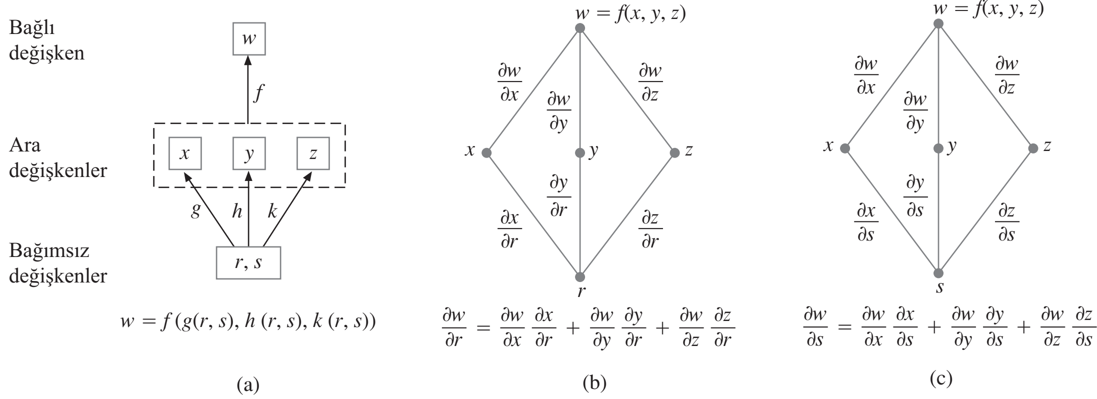
TEOREM 7 İki Bağımsız Değişken ve Üç Ara Değişken İçin Zincir Kuralı

$w = f(x, y, z)$, $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$ ve $z = k(r, s)$ olduğunu varsayın. Dört fonksiyon da türetilebiliyorsa, w'nun r ve s'ye göre kısmi türevleri vardır ve bunlar aşağıdaki formüllerle verilir:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Bu denklemlerden birincisi, s'yi sabit tutup, r'ye t gözüyle bakarak Teorem 6'daki Zincir Kuralından elde edilebilir. İkincisi de r'yi sabit tutup, s'ye t gözüyle bakarak aynı yolla elde edilebilir. Her iki denklem için ağaç diyagramları Şekil 14.19'da gösterilmektedir.



ŞEKİL 14.19 Teorem 7 için bileşke fonksiyonlar ve ağaç diyagramları.

ÖRNEK 3 Teorem 7'yi Kullanarak Kısmi Türevler

$$w = x + 2y + z^2, \qquad x = \frac{r}{s}, \qquad y = r^2 + \ln s, \qquad z = 2r$$

ise, $\partial w/\partial r$ ve $\partial w/\partial s$'yi r ve s cinsinden bulun.

Çözüm

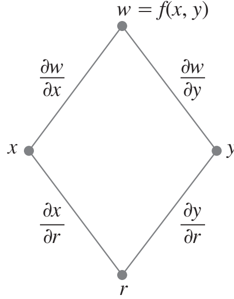
$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}\\ &= (1)\left(\frac{1}{s}\right) + (2)(2r) + (2z)(2)\\ &= \frac{1}{s} + 4r + (4r)(2) = \frac{1}{s} + 12r\end{aligned}$$

Ara değişken z'nin değerini koyun.

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\\ &= (1)\left(-\frac{r}{s^2}\right) + (2)\left(\frac{1}{s}\right) + (2z)(0) = \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2}\end{aligned}$$

■

Zincir Kuralı



$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

ŞEKİL 14.20

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

denkleminin ağaç diyagramı.

Üç yerine iki değişkenli bir f fonksiyonu için Teorem 7'deki her denklem uygun bir şekilde bir terim kısalır.

> $w = f(x, y)$, $x = g(r, s)$ ve $y = h(r, s)$ ise,
>
> $$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$
>
> olur.

Şekil 14.20, bu denklemlerin ilkinin ağaç diyagramını göstermektedir. İkinci denklemin diyagramı benzerdir; sadece r yerine s yazın.

ÖRNEK 4 Daha Fazla Kısmi Türev

$$w = x^2 + y^2, \qquad x = r - s, \qquad y = r + s$$

ise, $\partial w/\partial r$ ve $\partial w/\partial s$'yi r ve s cinsinden ifade edin.

Çözüm

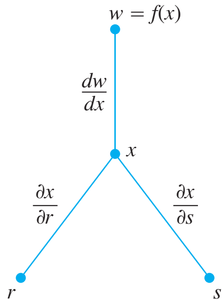
$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ &= (2x)(1) + (2y)(1) \\ &= 2(r - s) + 2(r + s) \\ &= 4r\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= (2x)(-1) + (2y)(1) \\ &= -2(r - s) + 2(r + s) \\ &= 4s\end{aligned}$$

Ara değişkenlerin değerlerini yazın.

■

f sadece x'in fonksiyonuysa denklemlerimiz daha da basitleşir.

Zincir Kuralı



$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial s}$$

ŞEKİL 14.21 Bir ara değişkenle bir bileşke olarak r ve s'nin fonksiyonu olan f'nin türetilmesi için ağaç diyagramı.

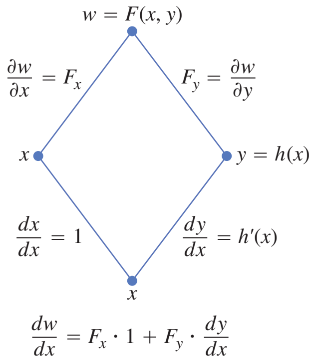
> $w = f(x)$ ve $x = g(r, s)$ ise,
>
> $$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial r} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial s}.$$
>
> olur.

Burada, dw/dx normal (tek değişkenli) türevi kullanabiliriz. Ağaç diyagramı Şekil 14.21'de gösterilmektedir.

Kapalı Türev Alma (Devam)

Teorem 5'teki iki-değişkenli Zincir Kuralı, kapalı türev alma işinin çoğunu üstlenen bir formüle yol açar. Aşağıdakileri varsayın:

1. $F(x, y)$ fonksiyonu türetilebilir ve
2. $F(x, y) = 0$ denklemi y'yi kapalı olarak x'in türetilebilir bir fonksiyonu, mesela $y = h(x)$ olarak tanımlar.



ŞEKİL 14.22 $w = F(x, y)$'i x'e göre türetmek için ağaç diyagramı. $dw/dx = 0$ yazmak kapalı türetme için basit bir hesaplama formülüne yol açar (Teorem 8).

$w = F(x, y) = 0$ olduğundan dw/dx türevi sıfır olmalıdır. Türevleri Zincir Kuralıyla hesaplayarak (Şekil 14.22'deki ağaç diyagramına bakın),

$$0 = \frac{dw}{dx} = F_x \frac{dx}{dx} + F_y \frac{dy}{dx} \qquad t = x \text{ ve } f = F \text{ ile Teorem 5}$$

$$= F_x \cdot 1 + F_y \cdot \frac{dy}{dx}$$

buluruz. $F_y = \partial w/\partial y \neq 0$ ise bu denklemden dy/dx'i çözerek,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

buluruz.

Bu bağıntı, kapalı olarak tanımlı fonksiyonların türevlerini bulmak için şaşırtıcı bir şekilde basit olan bir kısa yol verir. Burada bir teorem olarak ifade ediyoruz.

TEOREM 8 Kapalı Türetme İçin Bir Formül

$F(x, y)$'nin türetilebilir olduğunu ve $F(x, y) = 0$ denkleminin y'yi x'in bir fonksiyonu olarak tanımladığını varsayın. $F_y \neq 0$ olan her noktada

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

bulunur.

ÖRNEK 5 Kapalı Türetme

$y^2 - x^2 - \sin xy = 0$ ise dy/dx'i bulmak için Teorem 8'i kullanın.

Çözüm $F(x, y) = y^2 - x^2 - \sin xy$ alın. Bu durumda,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-2x - y\cos xy}{2y - x\cos xy}$$

$$= \frac{2x + y\cos xy}{2y - x\cos xy}$$

bulunur. Bu hesaplama Bölüm 3.6, Örnek 3'te dy/dx'i bulmak için kullandığımız tek değişkenli hesaplamadan belirgin şekilde daha kısadır. ■

Çok Değişkenli Fonksiyonlar

Bu bölümde zincir kuralının birkaç farklı biçimini gördük. Fakat bunları aynı genel formülün özel halleri olarak görebilirseniz, hepsini ezberlemek zorunda kalmazsınız. Özel problemler çözerken bağlı değişkeni en üste, ara değişkenleri ortaya ve seçilen bağımsız değişkeni alta yerleştirerek uygun bir ağaç diyagramı çizmek faydalı olabilir. Bağlı değişkenin seçilen bağımsız değişkene göre türevini bulmak için, bağlı değişkenden başlayarak ağacın her dalını aşağı doğru okurken, dal boyunca türevleri hesaplayıp çarpın. Sonra farklı dallar için bulduğunuz çarpımları toplayın.

Genel olarak, $w = f(x, y, \ldots, v)$'nin $x, y, \ldots, v$ değişkenlerinin (sonlu bir küme) türetilebilir bir fonksiyonu olduğunu ve $x, y, \ldots, v$'nin de $p, q, \ldots, t$'nin (başka bir sonlu küme) türetilebilir fonksiyonları olduklarını varsayın. Bu durumda w, p'den t'ye kadar olan değişkenlerin türetilebilir bir fonksiyonudur ve w'nin bu değişkenlere göre kısmi türevleri

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}$$

şeklindeki denklemlerle verilir. Diğer denklemler p yerine sırasıyla, $q, \ldots, t$ yazarak elde edilir

Bu denklemi hatırlamanın bir yolu eşitliğin sağ tarafının, bileşenleri

$$\underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial v}\right)}_{\text{w'nin ara değişkenlere göre türevleri}} \quad \text{ve} \quad \underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial y}{\partial p}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial p}\right)}_{\text{Aradeğişkenlerin seçilen bağımsız değişkene göre türevleri}}$$

olan iki vektörün skaler çarpımı olduğunu düşünmektir.

ALIŞTIRMALAR 14.4

Zincir Kuralı: Tek Bağımsız Değişken

1–6 alıştırmalarında, **(a)** dw/dt'yi hem Zincir Kuralını kullanarak, hem de w'yi t cinsinden ifade edip, doğrudan t'ye göre türev alarak hesaplayın. Sonra **(b)** dw/dt'yi t'nin verilen değerinde hesaplayın.

1. $w = x^2 + y^2, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t; \quad t = \pi$

2. $w = x^2 + y^2, \quad x = \cos t + \sin t, \quad y = \cos t - \sin t; \quad t = 0$

3. $w = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}, \quad x = \cos^2 t, \quad y = \sin^2 t, \quad z = 1/t; \quad t = 3$

4. $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 4\sqrt{t};$ $t = 3$

5. $w = 2ye^x - \ln z, \quad x = \ln(t^2 + 1), \quad y = \tan^{-1} t, \quad z = e^t;$ $t = 1$

6. $w = z - \sin xy, \quad x = t, \quad y = \ln t, \quad z = e^{t-1}; \quad t = 1$

Zincir Kuralı: İki ve Üç Bağımsız Değişken

7 ve 8 alıştırmalarında, **(a)** $\partial z/\partial u$ ve $\partial z/\partial v$'yi u ve v cinsinden hem Zincir Kuralını kullanarak, hem de türev almadan önce z'yi u ve v cinsinden ifade ederek bulun. Sonra **(b)** $\partial z/\partial u$ ve $\partial z/\partial v$'yi verilen (u, v) noktasında hesaplayın.

7. $z = 4e^x \ln y, \quad x = \ln(u \cos v), \quad y = u \sin v;$ $(u, v) = (2, \pi/4)$

8. $z = \tan^{-1}(x/y), \quad x = u \cos v, \quad y = u \sin v;$ $(u, v) = (1.3, \pi/6)$

9 ve 10 alıştırmalarında, **(a)** $\partial w/\partial u$ ve $\partial w/\partial v$'yi u ve v cinsinden hem Zincir Kuralını kullanarak, hem de türev almadan önce z'yi u ve v cinsinden ifade ederek bulun. Sonra **(b)** $\partial w/\partial u$ ve $\partial w/\partial v$'yi verilen (u, v) noktasında hesaplayın.

9. $w = xy + yz + xz, \quad x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = uv;$ $(u, v) = (1/2, 1)$

10. $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \quad x = ue^v \sin u, \quad y = ue^v \cos u,$ $z = ue^v; \quad (u, v) = (-2, 0)$

11 ve 12 alıştırmalarında, **(a)** $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ ve $\partial u/\partial z$'yi x, y ve z'nin fonksiyonları olarak hem zincir kuralına göre, hem de türev almadan önce u'yu x, y ve z cinsinden ifade ederek bulun. Sonra **(b)** $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ ve $\partial u/\partial z$'yi verilen (x, y, z) noktasında hesaplayın.

11. $u = \frac{p - q}{q - r}, \quad p = x + y + z, \quad q = x - y + z,$ $r = x + y - z; \quad (x, y, z) = \left(\sqrt{3}, 2, 1\right)$

12. $u = e^{qr} \sin^{-1} p, \quad p = \sin x, \quad q = z^2 \ln y, \quad r = 1/z;$ $(x, y, z) = (\pi/4, 1/2, -1/2)$

Bir Ağaç Diyagramı Kullanmak

13–24 alıştırmalarında, her türev için bir ağaç diyagramı çizin ve bir Zincir Kuralı formülü yazın.

13. $\frac{dz}{dt}; \quad z = f(x, y), \quad x = g(t), \quad y = h(t)$ için

14. $\frac{dz}{dt}; \quad z = f(u, v, w), \quad u = g(t), \quad v = h(t), \quad w = k(t)$ için

15. $\frac{\partial w}{\partial u}$ ve $\frac{\partial w}{\partial v}; \quad w = h(x, y, z), \quad x = f(u, v), \quad y = g(u, v),$ $z = k(u, v)$ için

16. $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial w}{\partial y}$; $w = f(r, s, t)$, $r = g(x, y)$, $s = h(x, y)$, $t = k(x, y)$ için

17. $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ ve $\dfrac{\partial w}{\partial v}$; $w = g(x, y)$, $x = h(u, v)$, $y = k(u, v)$ için

18. $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial w}{\partial y}$; $w = g(u, v)$, $u = h(x, y)$, $v = k(x, y)$ için

19. $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ ve $\dfrac{\partial z}{\partial s}$; $z = f(x, y)$, $x = g(t, s)$, $y = h(t, s)$ için

20. $\dfrac{\partial y}{\partial r}$; $y = f(u)$, $u = g(r, s)$ için

21. $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ ve $\dfrac{\partial w}{\partial t}$; $w = g(u)$, $u = h(s, t)$ için

22. $\dfrac{\partial w}{\partial p}$; $w = f(x, y, z, v)$, $x = g(p, q)$, $y = h(p, q)$, $z = j(p, q)$, $v = k(p, q)$ için

23. $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ ve $\dfrac{\partial w}{\partial s}$; $w = f(x, y)$, $x = g(r)$, $y = h(s)$ için

24. $\dfrac{\partial w}{\partial s}$; $w = g(x, y)$, $x = h(r, s, t)$, $y = k(r, s, t)$ için

Kapalı Türev Alma

25–28 alıştırmalarındaki denklemlerin y'yi x'in türetilebilir bir fonksiyonu olarak tanımladıklarını varsayarak, verilen noktada dy/dx'in türevini bulmak için Teorem 8'i kullanın.)

25. $x^3 - 2y^2 + xy = 0$, $(1, 1)$

26. $xy + y^2 - 3x - 3 = 0$, $(-1, 1)$

27. $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0$, $(1, 2)$

28. $xe^y + \sin xy + y - \ln 2 = 0$, $(0, \ln 2)$

Üç-Değişkenli Kapalı Türetme

Teorem 8, üç, hatta daha fazla değişkenli fonksiyonlara genelleştirilebilir. Üç-değişkenli şekli aşağıdaki gibidir: $F(x, y, z) = 0$ denklemi z'yi x ve y'nin türetilebilir bir fonksiyonu olarak tanımlıyorsa, $F_z \neq 0$ olan noktalarda,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

olur.

Bu denklemleri kullanarak, 29–32 alıştırmalarındaki noktalarda $\partial z/\partial x$ ve $\partial z/\partial y$'nin değerlerini bulun.

29. $z^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0$, $(1, 1, 1)$

30. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} - 1 = 0$, $(2, 3, 6)$

31. $\sin(x + y) + \sin(y + z) + \sin(x + z) = 0$, (π, π, π)

32. $xe^y + ye^z + 2\ln x - 2 - 3\ln 2 = 0$, $(1, \ln 2, \ln 3)$

Belirlenmiş Kısmi Türevleri Bulmak

33. $w = (x + y + z)^2$, $x = r - s$, $y = \cos(r + s)$ ve $z = \sin(r + s)$ ise, $r = 1$ ve $s = -1$ iken $\partial w/\partial r$'yi bulun.

34. $w = xy + \ln z$, $x = v^2/u$, $y = u + v$ ve $z = \cos u$ ise, $u = -1$ ve $v = 2$ iken $\partial w/\partial v$'yi bulun.

35. $w = x^2 + (y/x)$, $x = u - 2v + 1$ ve $y = 2u + v - 2$ ise, $u = 0$ ve $v = 0$ iken $\partial w/\partial v$'yi bulun.

36. $z = \sin xy + x \sin y$, $x = u^2 + v^2$ ve $y = uv$ ise, $u = 0$ ve $v = 1$ iken $\partial z/\partial u$'yu bulun.

37. $z = 5\tan^{-1} x$ ve $x = e^u + \ln v$ ise, $u = \ln 2$, $v = 1$ iken $\partial z/\partial u$ ve $\partial z/\partial v$'yi bulun.

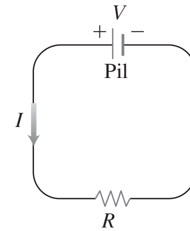
38. $z = \ln q$ ve $q = \sqrt{v + 3}\tan^{-1} u$ ise, $u = 1$ ve $v = -2$ iken $\partial z/\partial u$ ve $\partial z/\partial v$'yi bulun.

Teori ve Örnekler

39. Bir devredeki gerilimi değiştirmek $V = IR$ yasasına uyan bir devredeki V gerilimi, pil biterken yavaşça düşmektedir. Aynı zamanda, R direnci, direnç ısındıkça artmaktadır.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial I}\frac{dI}{dt} + \frac{\partial V}{\partial R}\frac{dR}{dt}$$

formülünü kullanarak, $R = 600$ ohm, $I = 0.04$ amp, $dR/dt = 0.5$ ohm/sn ve $dV/dt = -0.01$ volt/sn iken akımın nasıl değiştiğini bulun.



40. Bir kutunun boyutlarını değiştirmek Dikdörtgen şeklinde bir kutunun kenar uzunlukları a, b ve c zamanla değişmektedir. Söz konusu anda, $a = 1$ m, $b = 2$ m ve $c = 3$ m, $da/dt = db/dt = 1$ m/sn ve $dc/dt = -3$ m/sn'dir. Bu anda, kutunun hacmi A ve yüzey alanı S nasıl değişmektedir? Kutunun iç köşegenlerinin uzunlukları artmakta mı, azalmakta mıdır?

41. $f(u, v, w)$ türetilebilir ise ve $u = x - y$, $v = y - z$ ve $w = z - x$ ise,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

olduğunu gösterin.

42. Kutupsal Koordinatlar Türetilebilir bir $w = f(x, y)$ fonksiyonunda, $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ kutupsal koordinatlarını yerleştirirsek,

a. $$\frac{\partial w}{\partial r} = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$$

ve

$$\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} = -f_x \sin\theta + f_y \cos\theta$$

olduğunu gösterin.

b. (a) şıkkındaki denklemleri çözerek, f_x ve f_y'yi $\partial w/\partial r$ ve $\partial w/\partial\theta$ cinsinden ifade edin.

c. $(f_x)^2 + (f_y)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$

olduğunu gösterin.

43. Laplace denklemleri $w = f(u, v)$ fonksiyonu $f_{uu} + f_{vv} = 0$ Laplace denklemini sağlıyorsa ve $u = (x^2 - y^2)/2$ ve $v = xy$ ise, w'nin $w_{xx} + w_{yy} = 0$ Laplace denklemini de sağlayacağını gösterin.

44. Laplace denklemleri $u = x + iy$, $v = x - iy$ ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere, $w = f(u) + g(v)$ olsun. Gerekli bütün fonksiyonlar türetilebiliyorsa w'nin $w_{xx} + w_{yy} = 0$ Laplace denklemini sağladığını gösterin.

Eğriler Boyunca Fonksiyonları Değiştirmek

45. Bir helis üzerinde ekstremumlar Bir $f(x, y, z)$ fonksiyonunun $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ helisi üzerindeki kısmi türevlerinin

$$f_x = \cos t, \qquad f_y = \sin t, \qquad f_z = t^2 + t - 2$$

olduğunu varsayın. Varsa, eğri üzerindeki hangi noktalarda f'nin ekstremum değerleri vardır?

46. Bir uzay eğrisi $w = x^2 e^{2y} \cos 3z$ olsun. $x = \cos t$, $y = \ln(t + 2)$, $z = t$ eğrisi üzerinde $(1, \ln 2, 0)$ noktasında dw/dt'nin değerini bulun.

47. Bir çember üzerinde sıcaklık $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$ eğrisi üzerinde, (x, y) noktasındaki sıcaklık $T = f(x, y)$ olsun. Ayrıca,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 8x - 4y, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 8y - 4x$$

olduğunu varsayın.

a. dT/dt ve d^2T/dt^2 türevlerini inceleyerek, çember üzerinde maksimum ve minimum sıcaklıkların nerede oluştuğunu bulun.

b. $T = 4x^2 - 4xy + 4y^2$ olduğunu varsayın. T'nin çember üzerinde maksimum ve minimum değerlerini bulun.

48. Bir elips üzerinde sıcaklık

$$x = 2\sqrt{2}\cos t, \qquad y = \sqrt{2}\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

elipsi üzerindeki (x, y) noktasının sıcaklığı $T = g(x, y)$ olsun. Ayrıca,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = x$$

olduğunu varsayın.

a. dT/dt ve d^2T/dt^2 türevlerini inceleyerek, maksimum ve minimum sıcaklıkları elips üzerinde yerleştirin.

b. $T = xy - 2$ olduğunu varsayın. T'nin elips üzerinde maksimum ve minimum değerlerini bulun.

İntegrallerin Türevlerini Almak

Yumuşak süreklilik koşulları atında,

$$F(x) = \int_a^b g(t, x)\, dt$$

ise $F'(x) = \int_a^b g_x(t, x)\, dt$ dir. Bunu ve Zincir Kuralını kullanarak,

$$F(x) = \int_a^{f(x)} g(t, x)\, dt$$

fonksiyonunun türevini, $u = f(x)$ olmak üzere,

$$G(u, x) = \int_a^u g(t, x)\, dt$$

kabul ederek bulabiliriz. 49 ve 50 alıştırmalarındaki fonksiyonların türevlerini bulun.

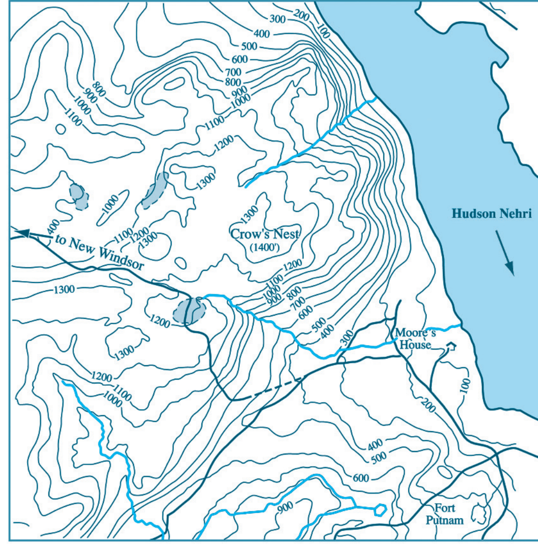
49. $F(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{t^4 + x^3}\, dt$

50. $F(x) = \int_{x^2}^1 \sqrt{t^3 + x^2}\, dt$

14.5 Doğrultu Türevleri ve Gradiyent Vektörler

New York'ta Hudson Nehri boyunca Batı Noktası Bölgesinde kontur'ları gösteren haritaya bakarsanız (Şekil 14.23), akarsuların kotur'lara dik olarak aktığını fark edersiniz. Akarsular Hudson'a olabildiğince çabuk ulaşmak için, en dik iniş yollarını takip ederler. Bu ne-

denle, deniz seviyesi üzerindeki bir akarsuyun yüksekliğindeki anlık değişimin özel bir yönü vardır. Bu bölümde, “Yokuş aşağı” yön denen bu yönün neden konturlara dik olduğunu göreceksiniz.



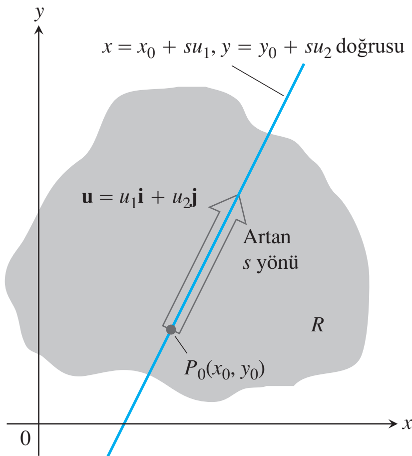
ŞEKİL 14.23 New York’ta Batı Noktası Bölgesinde konturlar, en dik iniş yollarını, konturlara dik olarak, takip eden akarsuları göstermektedir.

Düzlemde Doğrultu Türevleri

Bölüm 14.’ten, $f(x, y)$ diferansiyellenebilir ise diferansiyellenebilir bir $x = g(t)$, $y = h(t)$ eğrisi üzerinde f’nin t’ye göre değişim oranının

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

olduğunu biliyoruz. Herhangi bir $P_0(x_0, y_0) = P_0(g(t_0), h(t_0))$ noktasında, bu denklem f’nin artan t’ye göre değişim oranını verir ve dolayısıyla, diğer şeylerin yanı sıra, eğri boyunca hareket yönüne bağlıdır. Eğri, bir doğruyken ve t de doğru boyunca verilen bir **u** birim vektörü yönünde P_0’dan ölçülen yay uzunluğu parametresiyse df/dt, tanım kümesi içinde **u** yönünde uzaklığa göre f’nin değişim oranı olur. **u**’yu değiştirerek, P_0’dan farklı yönlerde geçerken f’nin uzaklığa göre değiştiği oranları bulabiliriz. Şimdi bu fikri daha kesin olarak tanımlıyoruz.



ŞEKİL 14.24 f’nin bir P_0 noktasında **u** yönündeki değişim oranı, f’nin bu doğru boyunca P_0’da değiştiği orandır.

$f(x, y)$ fonksiyonunun xy-düzlemindeki bir R bölgesinde tanımlı olduğunu, $P_0(x_0, y_0)$’ın R’de bir nokta olduğunu ve $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$’nin bir birim vektör olduğunu varsayın. Bu durumda,

$$x = x_0 + su_1, \qquad y = y_0 + su_2$$

denklemleri P_0’dan **u**’ya paralel olarak geçen doğruyu parametrize ederler. s parametresi P_0’dan **u** yönündeki yay uzunluğunu ölçüyorsa f’nin P_0’da **u** yönündeki değişim oranını df/ds’yi P_0’da hesaplayarak buluruz (Şekil 14.24).

TANIM **Doğrultu Türevi**

***f*'nin P_0'da, $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ birim vektörü yönündeki doğrultu türevi**, limitin var olması koşuluyla,

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = \lim_{s\to 0}\frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s} \qquad (1)$$

sayısıdır.

Doğrultu türevi ayrıca

$$(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0}$$

"f'nin P_0'da **u** yönündeki doğrultu türevi."

olarak da gösterilir.

ÖRNEK 1 Tanımı Kullanarak Bir Doğrultu Türevi Bulmak

$P_0(1, 2)$'de

$$f(x, y) = x^2 + xy$$

fonksiyonunun $\mathbf{u} = \left(1/\sqrt{2}\right)\mathbf{i} + \left(1/\sqrt{2}\right)\mathbf{j}$. birim vektörü yönündeki doğrultu türevini bulun.

Çözüm

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = \lim_{s\to 0}\frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s} \qquad \text{Denklem (1)}$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{f\left(1 + s\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 + s\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - f(1, 2)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(2 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) - (1^2 + 1\cdot 2)}{s}$$

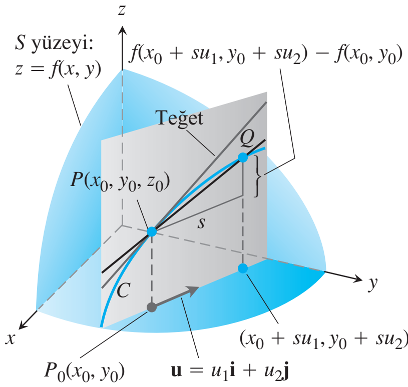
$$= \lim_{s\to 0}\frac{\left(1 + \frac{2s}{\sqrt{2}} + \frac{s^2}{2}\right) + \left(2 + \frac{3s}{\sqrt{2}} + \frac{s^2}{2}\right) - 3}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{\frac{5s}{\sqrt{2}} + s^2}{s} = \lim_{s\to 0}\left(\frac{5}{\sqrt{2}} + s\right) = \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + 0\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$f(x, y) = x^2 + xy$'nin $P_0(1, 2)$'de $\mathbf{u} = \left(1/\sqrt{2}\right)\mathbf{i} + \left(1/\sqrt{2}\right)\mathbf{j}$ birim vektörü yönündeki değişim oranı $5/\sqrt{2}$ 'dir. ■

Doğrultu Türevlerinin Yorumu

$z = f(x, y)$ denklemi uzayda bir S yüzeyini temsil eder. $z_0 = f(x_0, y_0)$ ise, $P(x_0, y_0, z_0)$ noktası S'de bulunur. P'den ve $P_0(x_0, y_0)$'dan **u**'ya paralel olarak geçen dikey düzlem S'yi bir C



ŞEKİL 14.25 C eğrisinin P_0'daki eğimi $\lim_{Q \to P}$ eğim (PQ) dur; bu

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = (D_\mathbf{u} f)_{P_0}$$

doğrultu türevidir.

eğrisinde keser (Şekil 14.25). f'nin $\mathbf{u}$ yönündeki değişim oranı C'nin P'deki teğetinin eğimidir.

$\mathbf{u} = \mathbf{i}$ iken, P_0'daki doğrultu türevinin (x_0, y_0)'da hesaplanan $\partial f/\partial x$ olduğuna dikkat edin. $\mathbf{u} = \mathbf{j}$ iken, P_0'daki doğrultu türevi (x_0, y_0)'da hesaplanan $\partial f/\partial y$'dir. Doğrultu türevi iki kısmi türevi genelleştirir. Artık f'nin sadece $\mathbf{i}$ ve $\mathbf{j}$ değil, herhangi bir $\mathbf{u}$ doğrultusundaki değişim oranını sorgulayabiliriz.

Doğrultu türevinin fiziksel bir yorumu: Düzlemde bir bölgedeki her (x, y) noktasında sıcaklığın $T = f(x, y)$ olduğunu varsayın. Bu durumda $f(x_0, y_0)$, $P_0(x_0, y_0)$ noktasındaki sıcaklık ve $(D_\mathbf{u} f)_{P_0}$, P_0 noktasında $\mathbf{u}$ yönünde ilerlerken sıcaklıktaki anlık değişim oranıdır.

Hesaplama ve Gradiyentler

Şimdi, diferansiyellenebilir bir f fonksiyonun doğrultu türevini hesaplamak için daha etkin bir formülü geliştiriyoruz. $P_0(x_0, y_0)$'dan geçen ve $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ birim vektörü yönünde artan yay uzunluğu parametresi s ile parametrize edilen

$$x = x_0 + su_1, \qquad y = y_0 + su_2, \tag{2}$$

doğrusuyla işe başlarız. Bu durumda,

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\frac{dy}{ds}$$

Diferansiyellenebilir f için Zincir Kuralı

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\cdot u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\cdot u_2$$

(2) denklemlerinden $dx/ds = u_1$ ve $dy/ds = u_2$

$$= \underbrace{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\mathbf{j}\right]}_{f\text{'nin } P_0\text{'daki gradiyenti}} \cdot \underbrace{\left[u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}\right]}_{\mathbf{u}\text{ yönü}}. \tag{3}$$

TANIM Gradiyent Vektör

$f(x, y)$'nin bir $P_0(x_0, y_0)$ noktasındaki **gradiyent vektörü (eğim)**, f'nin kısmi türevlerinin P_0 noktasında hesaplanmasıyla elde edilen

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

vektörüdür.

∇f gösterimi "f'nin gradiyenti " ve "del f" gibi "grad f" olarak da okunur. ∇ sembolünün kendisi "del" olarak okunur. Gradientin başka bir gösterimi, yazıldığı gibi okunan grad f'dir.

(3) denklemi, f'nin P_0'da $\mathbf{u}$ yönündeki doğrultu türevinin, f'nin P_0'daki gradiyenti ile $\mathbf{u}$'nun skaler çarpımı olduğunu söyler.

TEOREM 9 Doğrultu Türevi Bir Skaler Çarpımdır

$f(x, y)$, $P_0(x_0, y_0)$'ı içeren bir açık bölgede diferansiyellenebilir ise

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \mathbf{u}, \tag{4}$$

yani, f'nin P_0'daki gradienti ile **u**'nun skaler çarpımı olur.

ÖRNEK 2 Gradiyent Kullanarak Doğrultu Türevi Bulmak

$f(x, y) = xe^y + \cos(xy)$'nin (2, 0) noktasında, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ yönündeki doğrultu türevini bulun.

Çözüm **v**'nin yönü, **v**'yi uzunluğuna bölerek bulunur:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{v}}{5} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}.$$

f'nin (2, 0)'daki kısmi türevleri şöyledir:

$$f_x(2, 0) = (e^y - y\sin(xy))_{(2,0)} = e^0 - 0 = 1$$

$$f_y(2, 0) = (xe^y - x\sin(xy))_{(2,0)} = 2e^0 - 2 \cdot 0 = 2.$$

f'nin (2, 0)'daki gradiyenti

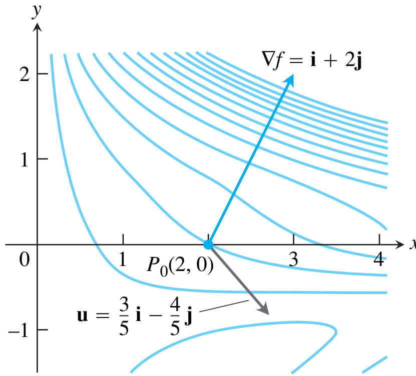
$$\nabla f|_{(2,0)} = f_x(2, 0)\mathbf{i} + f_y(2, 0)\mathbf{j} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

olur (Şekil 14.26). Bundan dolayı f'nin (2, 0)'da **v** yönündeki doğrultu türevi

$$(D_{\mathbf{u}}f)|_{(2,0)} = \nabla f|_{(2,0)} \cdot \mathbf{u} \qquad \text{(4) Denklemi}$$

$$= (\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}\right) = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1$$

bulunur.



ŞEKİL 14.26 ∇f'yi f'nin tanım kümesinde bir vektör olarak resimleyin. $f(x, y) = xe^y + \cos(xy)$ durumunda, tanım kümesi bütün düzlemdir. f'nin (2,0)'da $\mathbf{u} = (3/5)\mathbf{i} - (4/5)\mathbf{j}$ yönünde değiştiği oran $\nabla f \cdot \mathbf{u} = -1$'dir (Örnek 2).

u ve ∇f vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||\mathbf{u}|\cos\theta = |\nabla f|\cos\theta,$$

formülündeki skaler çarpımı hesaplamak aşağıdaki özellikleri ortaya çıkarır.

$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f|\cos\theta$ Doğrultu Türevinin Özellikleri

1. f fonksiyonu en fazla $\cos\theta = 1$ iken veya **u** ∇f'nin yönünde iken artar. Yani, tanım kümesindeki her P noktasında, f P'deki ∇f gradiyent vektörünün yönünde en hızlı şekilde artar. Bu yöndeki türev
$$D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f|\cos(0) = |\nabla f|$$
ile verilir.
2. Aynı şekilde, f en hızlı $-\nabla f$ yönünde azalır. Bu yöndeki türev $D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f|\cos(\pi) = -|\nabla f|$ 'dir.
3. $\nabla f \neq 0$ Gradiyentine ortogonal herhangi bir **u** yönü f'de sıfır değişim yönüdür, çünkü bu durumda $\theta = \pi/2$ olur ve
$$D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f|\cos(\pi/2) = |\nabla f| \cdot 0 = 0.$$
bulunur.

Daha sonra tartışacağımız gibi, bu özellikler iki boyutta olduğu gibi, üç boyutta da geçerlidir.

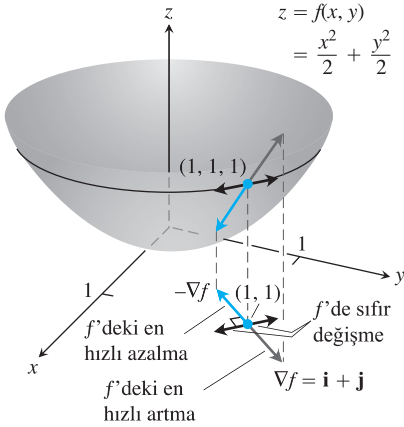
ÖRNEK 3 Maksimal, Minimal ve Sıfır Değişim Yönlerini Bulmak

$f(x, y) = (x^2/2) + (y^2/2)$'nin

(a) (1, 1) noktasında en hızlı arttığı,

(b) (1, 1) noktasında en hızlı azaldığı yönleri bulun.

(c) (1, 1)'de f'nin sıfır değişim yönleri nelerdir?



ŞEKİL 14.27 $f(x, y) = (x^2/2) + (y^2/2)$'nin (1, 1)'de en hızlı arttığı yön $\nabla f|_{(1,1)} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ yönüdür. Bu yön yüzey üzerinde (1, 1, 1) de en dik yükselme yönüdür (Örnek 3).

Çözüm

(a) Fonksiyon (1, 1)'de en hızlı olarak ∇f yönünde artar. Gradiyent

$$(\nabla f)_{(1,1)} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})_{(1,1)} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

olarak bulunur. Yönü ise,

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{|\mathbf{i} + \mathbf{j}|} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

yönündedir.

(b) Fonksiyon (1, 1)'de en hızlı olarak $-\nabla f$ yönünde azalır:

$$-\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

(c) (1, 1)'de sıfır değişim yönleri ∇f'ye ortogonal yönlerdir:

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \qquad \text{ve} \qquad -\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

Şekil 14.27'ye bakın. ■

Seviye Eğrilerinin Gradiyentleri ve Teğetleri

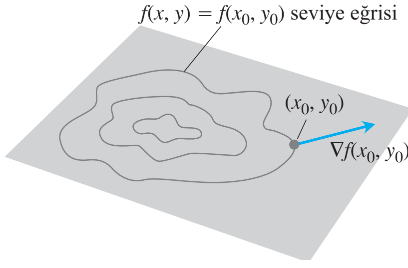
Diferansiyellenebilir bir $f(x, y)$ fonksiyonunun düzgün bir $\mathbf{r} = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j}$ eğrisi üzerinde sabit bir c değeri varsa (böylece eğri f'nin bir seviye eğrisi olur), $f(g(t), h(t)) = c$ olur. Bu denklemin iki tarafının da t'ye göre türevini almak

$$\frac{d}{dt} f(g(t), h(t)) = \frac{d}{dt}(c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} = 0 \qquad \text{Zincir Kuralı}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\right)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{\left(\frac{dg}{dt}\mathbf{i} + \frac{dh}{dt}\mathbf{j}\right)}_{\frac{d\mathbf{r}}{dt}} = 0. \tag{5}$$

denklemlerine yol açar. (5) denklemi, ∇f'nin teğet vektör $d\mathbf{r}/dt$'ye normal olduğunu söyler, dolayısıyla eğriye normaldir.



ŞEKİL 14.28 İki değişkenli diferansiyellenebilir bir fonksiyonun bir noktadaki gradiyenti her zaman fonksiyonun o noktadan geçen seviye eğrisine normaldir.

Diferansiyellenebilir bir $f(x, y)$ fonksiyonunun tanım kümesindeki her (x_0, y_0) noktasında f'nin gradiyenti, (x_0, y_0) noktasından geçen seviye eğrisine normaldir (Şekil 14.28).

(5) Denklemi topografik haritalarda akarsuların konturlara dik olarak aktığı gözlemimizi doğrular (Şekil 14.23'e bakın). Aşağıya doğru akan akarsular varış yerine en çabuk yoldan ulaşacağına göre, doğrultu türevleri için Özellik 2'den, negatif gradiyent vektörü doğrultusunda akmalıdır. (s) Denklemi bize bu yönlerin seviye eğrilerine dik olduklarını söyler.

Bu gözlem ayrıca, seviye eğrilerinin teğetlerinin denklemlerini bulmamızı sağlar. Bunlar gradiyentlere normal olan doğrulardır. Bir $P_0(x_0, y_0)$ noktasından geçen ve bir $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ vektörüne normal olan doğrunun denklemi

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

olarak bulunur (Alıştırma 35). $\mathbf{N}$ vektörü $(\nabla f)_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}$ gradiyenti ise denklem

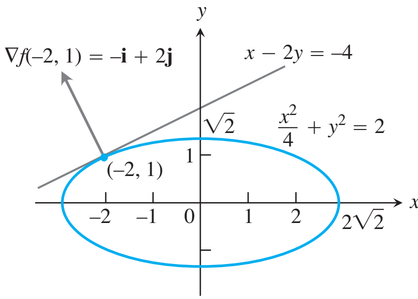
$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \tag{6}$$

olarak verilir.

ÖRNEK 4 Bir Elipse Teğet Doğru Bulmak

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$

elipsinin (–2, 1) noktasındaki teğetinin denklemini bulun (Şekil 14.29).



ŞEKİL 14.29 $(x^2/4) + y^2 = 2$ elipsinin teğetini, elipse $f(x, y) = (x^2/4) + y^2$ fonksiyonunun bir seviye eğrisi gibi bakarak bulabiliriz (Örnek 4).

Çözüm Elips,

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$

fonksiyonunun bir seviye eğrisidir. f'nin (–2, 1)'deki gradiyenti

$$\nabla f|_{(-2,1)} = \left(\frac{x}{2}\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}\right)_{(-2,1)} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

olarak bulunur. Teğet ise,

$$(-1)(x + 2) + (2)(y - 1) = 0 \qquad \text{Denklem (6)}$$

$$x - 2y = -4.$$

doğrusudur. ■

İki f ve g fonksiyonunun gradiyentlerini biliyorsak, otomatik olarak sabitlerle çarpımlarının, toplamlarının, farklarının, çarpımlarının ve bölümlerinin de gradiyentlerini biliyoruz demektir. Alıştırma 36'da aşağıdaki kuralları gerçeklemeniz istenmektedir. Bu kuralların, tek değişkenli fonksiyonların türevleri için karşı gelen kurallarla aynı formda olduklarına dikkat edin.

Gradyentlerin Cebir Kuralları

1. *Sabitle Çarpım Kuralı:* $\nabla(kf) = k\nabla f$ (k herhangi bir sayı)
2. *Toplam Kuralı:* $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
3. *Fark Kuralı:* $\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g$
4. *Çarpım Kuralı:* $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
5. *Bölüm Kuralı:* $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

ÖRNEK 5 Gradiyent Kurallarını Resimlemek

Kuralları

$$f(x, y) = x - y \qquad g(x, y) = 3y$$
$$\nabla f = \mathbf{i} - \mathbf{j} \qquad \nabla g = 3\mathbf{j}$$

ile göstereceğiz.

1. $\nabla(2f) = \nabla(2x - 2y) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} = 2\nabla f$
2. $\nabla(f + g) = \nabla(x + 2y) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} = \nabla f + \nabla g$
3. $\nabla(f - g) = \nabla(x - 4y) = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} = \nabla f - \nabla g$
4. $$\begin{aligned}\nabla(fg) &= \nabla(3xy - 3y^2) = 3y\mathbf{i} + (3x - 6y)\mathbf{j} \\ &= 3y(\mathbf{i} - \mathbf{j}) + 3y\mathbf{j} + (3x - 6y)\mathbf{j} \\ &= 3y(\mathbf{i} - \mathbf{j}) + (3x - 3y)\mathbf{j} \\ &= 3y(\mathbf{i} - \mathbf{j}) + (x - y)3\mathbf{j} = g\nabla f + f\nabla g\end{aligned}$$
5. $$\begin{aligned}\nabla\left(\frac{f}{g}\right) &= \nabla\left(\frac{x - y}{3y}\right) = \nabla\left(\frac{x}{3y} - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3y}\mathbf{i} - \frac{x}{3y^2}\mathbf{j} \\ &= \frac{3y\mathbf{i} - 3x\mathbf{j}}{9y^2} = \frac{3y(\mathbf{i} - \mathbf{j}) - (3x - 3y)\mathbf{j}}{9y^2} \\ &= \frac{3y(\mathbf{i} - \mathbf{j}) - (x - y)3\mathbf{j}}{9y^2} = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}\end{aligned}$$

■

Üç Değişkenli Fonksiyonlar

Diferansiyellenebilir bir $f(x, y, z)$ fonksiyonu ve uzayda bir $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ birim vektörü için,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

ve

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}u_3$$

buluruz.

Doğrultu türevi yine

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||u| \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta$$

şeklinde yazılabilir, dolayısıyla daha önce iki değişkenli fonksiyonlar için verilen özellikler hala geçerlidir. Verilen herhangi bir noktada, f en hızlı ∇f doğrultusunda artar ve en hızlı $-\nabla f$ doğrultusunda azalır. ∇f'ye ortogonal olarak verilen herhangi bir yönde, türev sıfırdır.

ÖRNEK 6 Maksimal, Minimal ve Sıfır Değişim Yönlerini Bulmak

(a) $f(x, y, z) = x^3 - xy^2 - z$'nin $P_0(1, 1, 0)$'da, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ yönündeki doğrultu türevini bulun.

(b) f, P_0'da hangi yönlerde en hızlı değişir ve bu yönlerdeki değişim oranları nedir?

Çözüm

(a) $\mathbf{v}$'nin yönü, $\mathbf{v}$'yi uzunluğuna bölerek bulunur:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

f'nin P_0'daki kısmi türevleri

$$f_x = (3x^2 - y^2)_{(1,1,0)} = 2, \qquad f_y = -2xy|_{(1,1,0)} = -2, \qquad f_z = -1|_{(1,1,0)} = -1$$

olarak bulunur. f'nin P_0'daki gradyanı ise

$$\nabla f|_{(1,1,0)} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

olur. Dolayısıyla, f'nin P_0'da $\mathbf{v}$ yönündeki doğrultu türevi

$$(D_{\mathbf{u}}f)_{(1,1,0)} = \nabla f|_{(1,1,0)} \cdot \mathbf{u} = (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}\right)$$

$$= \frac{4}{7} + \frac{6}{7} - \frac{6}{7} = \frac{4}{7}$$

olur.

(b) Fonksiyon en hızlı $\nabla f = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ yönünde artar ve en hızlı $-\nabla f$ yönünde azalır. Bu yönlerdeki değişim oranları, sırasıyla,

$$|\nabla f| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3 \qquad \text{ve} \qquad -|\nabla f| = -3$$ ■

olarak bulunur.

ALIŞTIRMALAR 14.5

Noktalarda Gradyan Hesaplamak

1–4 alıştırmalarında, verilen noktada fonksiyonun gradiyentini hesaplayın. Sonra gradiyentin grafiğini o noktadan geçen seviye eğrisiyle birlikte çizin.

1. $f(x, y) = y - x, \quad (2, 1)$

2. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \quad (1, 1)$

3. $g(x, y) = y - x^2, \quad (-1, 0)$

4. $g(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}, \quad (\sqrt{2}, 1)$

5–8 alıştırmalarında, verilen noktada ∇f'yi bulun.

5. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + z\ln x, \quad (1, 1, 1)$

6. $f(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z + \tan^{-1} xz, \quad (1, 1, 1)$

7. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + \ln(xyz), \quad (-1, 2, -2)$

8. $f(x, y, z) = e^{x+y}\cos z + (y + 1)\sin^{-1} x, \quad (0, 0, \pi/6)$

Doğrultu Türevlerini Bulmak

9–16 alıştırmalarında, fonksiyonun P_0'da **A** yönündeki doğrultu türevini bulun.

9. $f(x, y) = 2xy - 3y^2, \quad P_0(5, 5), \quad \mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

10. $f(x, y) = 2x^2 + y^2, \quad P_0(-1, 1), \quad \mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

11. $g(x, y) = x - (y^2/x) + \sqrt{3}\sec^{-1}(2xy), \quad P_0(1, 1),$ $\mathbf{A} = 12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

12. $h(x, y) = \tan^{-1}(y/x) + \sqrt{3}\sin^{-1}(xy/2), \quad P_0(1, 1),$ $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

13. $f(x, y, z) = xy + yz + zx, \quad P_0(1, -1, 2), \quad \mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

14. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2, \quad P_0(1, 1, 1), \quad \mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

15. $g(x, y, z) = 3e^x \cos yz, \quad P_0(0, 0, 0), \quad \mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

16. $h(x, y, z) = \cos xy + e^{yz} + \ln zx, \quad P_0(1, 0, 1/2),$ $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

En Hızlı Artış ve Azalış Yönleri

17–22 alıştırmalarında, fonksiyonların P_0'da en hızlı arttıkları ve azaldıkları yönleri bulun. Sonra fonksiyonların bu yönlerdeki doğrultu türevlerini bulun.

17. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2, \quad P_0(-1, 1)$

18. $f(x, y) = x^2 y + e^{xy}\sin y, \quad P_0(1, 0)$

19. $f(x, y, z) = (x/y) - yz, \quad P_0(4, 1, 1)$

20. $g(x, y, z) = xe^y + z^2, \quad P_0(1, \ln 2, 1/2)$

21. $f(x, y, z) = \ln xy + \ln yz + \ln xz, \quad P_0(1, 1, 1)$

22. $h(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + y + 6z, \quad P_0(1, 1, 0)$

Eğrilerin Teğetleri

23–26 alıştırmalarında, $f(x, y) = c$ eğrisini verilen noktada ∇f ve teğetiyle birlikte çizin. Sonra teğetin denklemini yazın.

23. $x^2 + y^2 = 4, \quad \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

24. $x^2 - y = 1, \quad \left(\sqrt{2}, 1\right)$

25. $xy = -4, \quad (2, -2)$

26. $x^2 - xy + y^2 = 7, \quad (-1, 2)$

Teori ve Örnekler

27. Sıfır doğrultu türevi Hangi yönde $f(x, y) = xy + y^2$'nin $P(3, 2)$'deki doğrultu türevi sıfıra eşittir?

28. Sıfır doğrultu türevi Hangi yönde, $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$'nin $P(1, 1)$' deki doğrultu türevi sıfıra eşittir?

29. $f(x, y) = x^2 - 3xy + 4y^2$'nin $P(1, 2)$'deki türevinin 14'e eşit olduğu bir **u** yönü var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

30. Bir çember boyunca sıcaklık değişimi $T(x, y, z) = 2xy - yz$ sıcaklık fonksiyonunun (sıcaklık santigrad, uzunluk fit olarak) $P(1, -1, 1)$'deki değişim oranının –3 °C/ft olduğu bir **u** yönü var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

31. $f(x, y)$'nin $P_0(1, 2)$'de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ yönündeki doğrultu türevi $2\sqrt{2}$ ve $-2\mathbf{j}$ yönündeki doğrultu türevi –3'tür. f'nin $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ yönündeki doğrultu türevi nedir? Yanıtınızı açıklayın.

32. $f(x, y, z)$'nin bir P noktasındaki doğrultu türevi $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ yönünde en büyüktür. Bu yöndeki doğrultu türevinin değeri $2\sqrt{3}$ 'tür.

a. P'de ∇f nedir? Yanıtınızı açıklayın.

b. f'nin P'de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ yönündeki doğrultu türevi nedir?

33. Doğrultu türevleri ve skaler bileşenler Diferansiyellenebilir bir $f(x, y, z)$ fonksiyonunun bir P_0 noktasında **u** birim vektörü yönündeki doğrultu türevinin $(\nabla f)_{P_0}$'ın **u** yönündeki skaler bileşeniyle ilişkisi nedir? Yanıtınızı açıklayın.

34. Doğrultu türevleri ve kısmi türevler $f(x, y, z)$'nin gerekli türevlerinin bulunduğunu varsayarsak, $D_{\mathbf{i}}f$, $D_{\mathbf{j}}f$ ve $D_{\mathbf{k}}f$ ile f_x, f_y ve f_z arasındaki ilişki nedir? Yanıtınızı açıklayın.

35. *xy*-düzleminde doğrular $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$'ın xy-düzlemindeki (x_0, y_0) noktasından geçen ve $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ vektörüne normal doğrunun denklemi olduğunu gösterin.

36. Gradiyentlerin cebir kuralları Bir k skaleri ile

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

ve

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\mathbf{k},$$

gradiyentleri verilmişse,

$$\frac{\partial}{\partial x}(kf) = k\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}(f \pm g) = \frac{\partial f}{\partial x} \pm \frac{\partial g}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\dfrac{\partial f}{\partial x} - f\dfrac{\partial g}{\partial x}}{g^2},$$

ve diğer skaler denklemleri kullanarak, aşağıdaki kuralları doğrulayın.

a. $\nabla(kf) = k\nabla f$

b. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

c. $\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g$

d. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

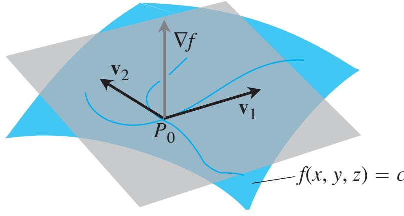
e. $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

14.6 Teğet Düzlemler ve Diferansiyeller

Bu bölümde, uzayda düzgün bir yüzey üzerindeki bir noktadan geçen teğet düzlemi tanımlıyoruz. Teğet düzlemin bir denklemini yüzeyi tanımlayan fonksiyonun kısmi türevlerinden buluyoruz. Bu fikir, tek-değişkenli fonksiyonlar için koordinat düzleminde bir eğri üzerinde bir noktadaki teğet doğru tanımına benzerdir (Bölüm 2.7). Bu durumda çok değişkenli fonksiyonların toplam diferansiyellerini ve lineerizasyonlarını inceleyeceğiz.

Teğet Düzlemler ve Normal Doğrular

$\mathbf{r} = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, diferansiyellenebilir bir f fonksiyonunun $f(x, y, z) = c$ seviye yüzeyi üzerinde düzgün bir eğriyse, $f(g(t), h(t), k(t)) = c$ olur. Bu denklemin iki tarafının da t'ye göre türevini almak



ŞEKİL 14.30 ∇f, P_0'dan geçen yüzeydeki her düzgün eğrinin hız vektörüne ortogonaldir. Dolayısıyla P_0'daki hız vektörleri, P_0'daki teğet düzlem dediğimiz ortak bir düzlemde bulunurlar.

$$\frac{d}{dt} f(g(t), h(t), k(t)) = \frac{d}{dt}(c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dk}{dt} = 0 \qquad \text{Zincir Kuralı}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{\left(\frac{dg}{dt}\mathbf{i} + \frac{dh}{dt}\mathbf{j} + \frac{dk}{dt}\mathbf{k}\right)}_{d\mathbf{r}/dt} = 0 \qquad (1)$$

verir. Eğri boyunca her noktada, ∇f eğrinin hız vektörüne ortogonaldir.

Şimdi dikkatimizi P_0'dan geçen eğrilerle sınırlayalım (Şekil 14.30). P_0'daki bütün hız vektörleri P_0'da ∇f'ye ortogonaldir, dolayısıyla eğrinin teğetleri P_0'dan geçen ve ∇f'ye normal olan düzlemde bulunurlar. Bu düzleme yüzeyin P_0'daki teğet düzlemi deriz. P_0'dan geçen ve düzleme dik olan doğru yüzeyin P_0'daki normalidir.

TANIMLAR Teğet Düzlem, Normal Doğru

$f(x, y, z) = c$ seviye yüzeyi üzerinde, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasındaki **teğet düzlem** P_0'dan geçen ve $\nabla f|_{P_0}$'a normal olan düzlemdir. Yüzeyin P_0'daki normali, P_0'dan geçen ve $\nabla f|_{P_0}$'a paralel olan doğrudur.

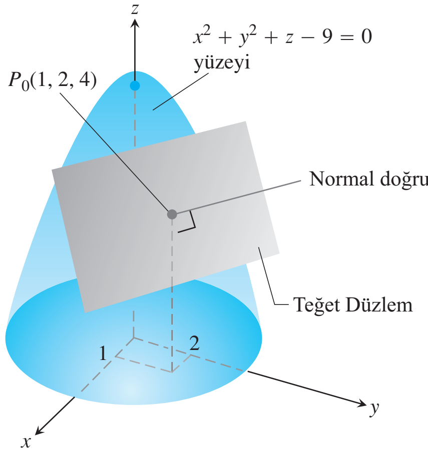
Böylece, Bölüm 12.5'ten teğet düzlemin ve normalin denklemleri sırasıyla, aşağıdaki gibidir:

$f(x, y, z) = c$'ye $P_0(x_0, y_0, z_0)$'da Teğet Düzlem

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0 \qquad (2)$$

$f(x, y, z) = c$'ye $P_0(x_0, y_0, z_0)$'da Normal Doğru

$$x = x_0 + f_x(P_0)t, \qquad y = y_0 + f_y(P_0)t, \qquad z = z_0 + f_z(P_0)t \qquad (3)$$



ŞEKİL 14.31 $x^2 + y^2 + z - 9 = 0$ yüzeyinin $P_0(1, 2, 4)$'teki teğet düzlemi ve normal doğrusu (Örnek 1).

ÖRNEK 1 Teğet Düzlem ve Normal Doğru Bulmak

$P_0(1, 2, 4)$ noktasında

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0 \qquad \text{Dairesel bir paraboloid}$$

yüzeyinin teğet düzlemini ve normalini bulun.

Çözüm Yüzey Şekil 14.31'de gösterilmektedir.

Teğet düzlem P_0'dan geçen ve f'nin P_0'daki gradiyentine dik düzlemdir. Gradiyent

$$\nabla f|_{P_0} = (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})_{(1,2,4)} = \mathbf{2i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, düzlem

$$2(x - 1) + 4(y - 2) + (z - 4) = 0 \qquad \text{veya} \qquad 2x + 4y + z = 14$$

düzlemidir. Yüzeyin P_0'daki normali

$$x = 1 + 2t, \qquad y = 2 + 4t, \qquad z = 4 + t$$

olur. ■

Bir $z = f(x, y)$ düzgün yüzeyinin, $z_0 = f(x_0, y_0)$ olmak üzere, bir $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasında teğet düzleminin denklemini bulmak için, önce $z = f(x, y)$ denkleminin $f(x, y) - z = 0$'a denk olduğunu gözlemleriz. Dolayısıyla, $z = f(x, y)$ yüzeyi $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ fonksiyonunun sıfır seviye yüzeyidir. F'nin kısmi türevleri

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y) - z) = f_x - 0 = f_x$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y) - z) = f_y - 0 = f_y$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(f(x, y) - z) = 0 - 1 = -1$$

olarak bulunur. Bundan dolayı,

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0$$

yani P_0'da seviye yüzeyine teğet düzlemin formülü

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

haline indirgenir.

Bir $z = f(x, y)$ yüzeyine $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$'da Teğet Düzlem

Diferansiyellenebilir bir f fonksiyonunun $z = f(x, y)$ yüzeyine, $P_0(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ noktasında teğet olan düzlemin denklemi aşağıdaki gibidir:

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \qquad (4)$$

ÖRNEK 2 Bir $z = f(x, y)$ Yüzeyine Teğet Bir Düzlem Bulmak

$z = x \cos y - ye^x$'in $(0, 0, 0)$'daki teğet düzlemini bulun.

Çözüm $f(x, y) = x \cos y - ye^x$'in kısmi türevlerini hesaplar ve (4) denklemini kullanırız:

$$f_x(0, 0) = (\cos y - ye^x)_{(0,0)} = 1 - 0 \cdot 1 = 1$$

$$f_y(0, 0) = (-x \sin y - e^x)_{(0,0)} = 0 - 1 = -1$$

Dolayısıyla teğet düzlem

$$1 \cdot (x - 0) - 1 \cdot (y - 0) - (z - 0) = 0 \qquad \text{Denklem (4)}$$

veya

$$x - y - z = 0$$

olur. ■

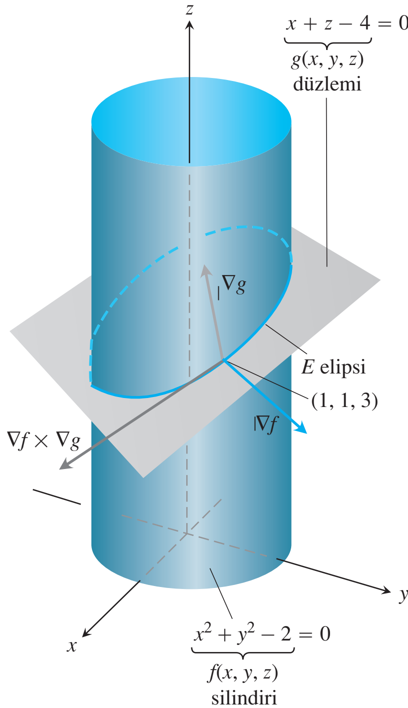
ÖRNEK 3 İki Yüzeyin Kesişim Eğrisine Teğet Doğru

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \qquad \text{Bir silindir}$$

ve

$$g(x, y, z) = x + z - 4 = 0 \qquad \text{Bir düzlem}$$

yüzeyleri bir E elipsinde kesişir (Şekil 14.32). $P_0(1, 1, 3)$ noktasında E'nin teğetinin parametrik denklemlerini bulun.



ŞEKİL 14.32 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ silindiri ve $g(x, y, z) = x + z - 4 = 0$ düzleminin kesişimi bir E elipsidir (Örnek 3).

Çözüm Teğet doğru, P_0'da hem ∇f'ye hem de ∇g'ye ortogonaldir ve dolayısıyla $\mathbf{v} = \nabla f \times \nabla g$'ye paraleldir. $\mathbf{v}$'nin bileşenleri ve P_0'ın koordinatları doğrunun denklemlerini verir. Buradan,

$$\nabla f\big|_{(1,1,3)} = (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j})_{(1,1,3)} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$\nabla g\big|_{(1,1,3)} = (\mathbf{i} + \mathbf{k})_{(1,1,3)} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

buluruz. Doğru aşağıdaki gibidir:

$$x = 1 + 2t, \qquad y = 1 - 2t, \qquad z = 3 - 2t$$ ■

Belirli Bir Yöndeki Değişimi Öngörmek

Bir P_0 noktasından küçük bir ds mesafesiyle yakındaki başka bir noktaya ilerlediğimizde, bir f fonksiyonunun ne kadar değiştiğini öngörmek istersek, doğrultu türevi normal bir türev rolü oynar. f tek değişkenli bir fonksiyon olsaydı,

$$df = f'(P_0)\, ds \qquad \text{Normal türev} \times \text{artım}$$

bulurduk. İki veya daha fazla değişkenli fonksiyonlar için, P_0'dan uzaklaşan hareketin yönü $\mathbf{u}$ olmak üzere,

$$df = (\nabla f|_{P_0} \cdot \mathbf{u})\, ds \qquad \text{Doğrultu türevi} \times \text{artım}$$

formülü kullanırız.

Bir u Yönünde f'deki Değişimi Öngörmek

Bir P_0 noktasından belirli bir $\mathbf{u}$ yönünde küçük bir ds mesafesi kadar ilerlediğimizde, f'deki değişimi öngörmek için

$$df = \underbrace{(\nabla f|_{P_0} \cdot \mathbf{u})}_{\text{Doğrultu türevi}} \cdot \underbrace{ds}_{\text{Artım miktarı}}$$

formülünü kullanırız.

ÖRNEK 4 $f(x, y, z)$'nin Değerindeki Değişimi Öngörmek

$P(x, y, z)$ noktası $P_0(0, 1, 0)$ noktasından $P_1(2, 2, -2)$ noktasına doğru 0.1 birim ilerlerse,

$$f(x, y, z) = y \sin x + 2yz$$

fonksiyonunun değerinin nasıl değişeceğini tahmin edin.

Çözüm Önce f'nin P_0'da $\overrightarrow{P_0P_1} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ yönündeki doğrultu türevini buluruz. Bu vektörün yönü

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{|\overrightarrow{P_0P_1}|} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{3} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

dır. f'nin P_0'daki gradiyenti de

$$\nabla f|_{(0,1,0)} = ((y \cos x)\mathbf{i} + (\sin x + 2z)\mathbf{j} + 2y\mathbf{k})_{(0,1,0)} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$$

dır. Bu nedenle,

$$\nabla f|_{P_0} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$$

olur. P_0'dan $\mathbf{u}$ yönünde $ds = 0.1$ birim ilerlemeden dolayı f'de oluşacak değişim yaklaşık olarak

$$df = (\nabla f|_{P_0} \cdot \mathbf{u})(ds) = \left(-\frac{2}{3}\right)(0.1) \approx -0.067 \text{ birim}$$

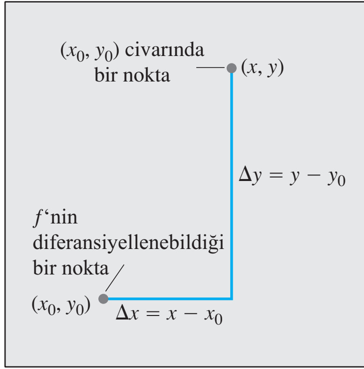
olur. ■

İki Değişkenli Bir Fonksiyonu Lineerize Etmek

İki değişkenli fonksiyonlar karmaşık olabilirler ve bazen onların yerine belirli uygulamalar için gereken hassaslığı veren ve çalışması o kadar zor olmayan daha basit fonksiyonlar kullanmak zorunda kalabiliriz.Bunu, tek değişkenli bir fonksiyon için lineer fonksiyonlar bulmamıza (Bölüm 3.8) benzer şekilde yaparız.

Değiştirmek istediğimiz fonksiyonun $z = f(x, y)$ olduğunu ve değişimin, f, f_x ile f_y'nin değerlerini bildiğimiz ve f'nin sürekli olduğu bir (x_0, y_0) noktası civarında etkili olmasını istediğimizi varsayın. (x_0, y_0)'dan herhangi bir (x, y) noktasına $\Delta x = x - x_0$ ve $\Delta y = y - y_0$ artımlarıyla ilerlersek diferansiyellenebilmenin Bölüm 14.3'teki tanımından,

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$



ŞEKİL 14.33 Şayet $f(x_0, y_0)$ noktasında diferansiyellenebilir ise, bu civardaki bir (x, y) noktasında f'nin değeri yaklaşık olarak $f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$'dir.

değişimi elde edilir. Δx ve Δy artımları küçükse, $\epsilon_1 \Delta x$ ve $\epsilon_2 \Delta y$ çarpımları daha da küçük olur ve

$$f(x, y) \approx \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}_{L(x,y)}$$

elde ederiz. Başka bir deyişle, Δx ve Δy küçük oldukları sürece, f'nin değeri yaklaşık olarak lineer L fonksiyonunkiyle aynı olacaktır. f'nin kullanımı zorsa ve işimiz ortaya çıkacak hatayı kaldırabilecekse, f yerine rahatlıkla L'yi kullanabiliriz (Şekil 14.33).

TANIMLAR Lineerizasyon, Standart Lineer Yaklaşım

Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun, f'nin diferansiyellenebildiği bir (x_0, y_0) noktasındaki **lineerizasyonu**

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{5}$$

fonksiyonudur.

$$f(x, y) \approx L(x, y)$$

yaklaşımı f'nin (x_0, y_0)'daki **standart lineer yaklaşımıdır.**

(4) Denkleminden $z = L(x, y)$ düzleminin (x_0, y_0) noktasında $z = f(x, y)$ yüzeyine teğet olduğunu görürüz. Yani, iki değişkenli bir fonksiyonun lineerizasyonu, tek değişkenli bir fonksiyonun lineerizasyonunun bir teğet–doğru yaklaşımı olması gibi, bir teğet-düzlem yaklaşımıdır.

ÖRNEK 5 Bir Lineerizasyon Bulmak

(3, 2) noktasında

$$f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$$

fonksiyonunun lineerizasyonunu bulun.

Çözüm Önce, $(x_0, y_0) = (3,2)$ noktasında f, f_x ve f_y'yi hesaplarız:

$$f(3, 2) = \left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3,2)} = 8$$

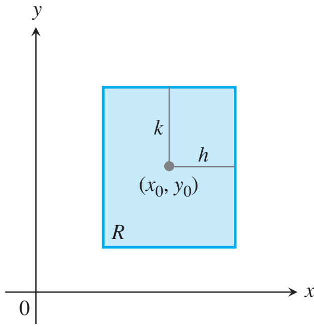
$$f_x(3, 2) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3,2)} = (2x - y)_{(3,2)} = 4$$

$$f_y(3, 2) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3,2)} = (-x + y)_{(3,2)} = -1$$

Buradan,

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= 8 + (4)(x - 3) + (-1)(y - 2) = 4x - y - 2 \end{aligned}$$

elde ederiz. f'nin (3, 2) noktasındaki lineerizasyonu $L(x, y) = 4x - y - 2$'dir. ■



ŞEKİL 14.34 xy-düzlemindeki dikdörtgen R: $|x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq k$ bölgesi.

Bir $f(x, y)$ fonksiyonuna (x_0, y_0) noktasındaki $L(x, y)$ lineerizasyonu ile yaklaşımda bulunduğumuzda önemli bir soru yaklaşımın ne kadar doğru olabileceğidir.

Merkezi (x_0, y_0)'da olan bir R dikdörtgeninde (Şekil 14.34) $|f_{xx}|, |f_{yy}|$, ve $|f_{xy}|$ için ortak bir M üst sınırı bulabilirsek, R üzerindeki E hatasını basit bir formül kullanarak (Bölüm 14.10 da elde edilen) sınırlayabiliriz. **Hata**, $E(x, y) = f(x, y) - L(x, y)$ ile tanımlanır.

Standart Lineer Yaklaşımdaki Hata

f'nin, merkezi (x_0, y_0)'da olan kapalı bir R dikdörtgenini içeren bir açık kümede sürekli birinci ve ikinci mertebe türevleri varsa ve M, $|f_{xx}|, |f_{yy}|$, ve $|f_{xy}|$'nin değerlerinin R üzerindeki herhangi bir üst sınırı ise, R üzerinde $f(x, y)$ yerine

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

lineerizasyonunu yazmanın getireceği $E(x, y)$ hatası

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{2}M(|x - x_0| + |y - y_0|)^2$$

eşitsizliğini sağlar.

Verilen bir M için $|E(x, y)|$'yi küçük kılmak için, sadece $|x - x_0|$'ı ve $|y - y_0|$'ı küçük tutmak yeterlidir.

ÖRNEK 6 Örnek 5'teki Hatayı Sınırlamak

Örnek 5'te $f(x, y) \approx L(x, y)$ yaklaşımındaki hatanın üst sınırını

$$R: \quad |x - 3| \leq 0.1, \qquad |y - 2| \leq 0.1$$

dikdörtgeni için bulun. Üst sınırı, f'nin dikdörtgenin merkezindeki değeri olan $f(3, 2)$'nin bir yüzdesi olarak ifade edin.

Çözüm

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{2}M(|x - x_0| + |y - y_0|)^2$$

eşitsizliğini kullanırız. M'nin uygun bir değerini bulmak için, rutin bir türev alma işleminden sonra, f_{xx}, f_{xy} ve f_{yy}'yi hesaplar ve bu türevlerin, değerleri

$$|f_{xx}| = |2| = 2, \qquad |f_{xy}| = |-1| = 1, \qquad |f_{yy}| = |1| = 1$$

olan sabitler olduklarını görürüz. Bunlardan en büyüğü 2'dir, dolayısıyla rahatlıkla M'yi 2 olarak alabiliriz. $(x_0, y_0) = (3, 2)$ ile, artık R üzerinde

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{2}(2)(|x - 3| + |y - 2|)^2 = (|x - 3| + |y - 2|)^2$$

olduğunu biliriz.

Son olarak, R üzerinde $|x - 3| \leq 0.1$ ve $|y - 2| \leq 0.1$ olduğundan

$$|E(x, y)| \leq (0.1 + 0.1)^2 = 0.04$$

buluruz. $f(3, 2) = 8$'in bir yüzdesi olarak, hata

$$\frac{0.04}{8} \times 100 = 0.5\%$$

değerinden fazla olamaz. ■

Diferansiyeller

Bölüm 3.8'den, tek değişkenli bir $y = f(x)$ fonksiyonu için x, a'dan $a + \Delta x$'e değiştiğinde f'deki değişimi

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$$

ile ve f'nin diferansiyelini

$$df = f'(a)\Delta x$$

olarak tanımladığımızı hatırlayın.

Şimdi iki değişkenli bir fonksiyonu ele alıyoruz.

Diferansiyellenebilir bir $f(x, y)$ fonksiyonunun ve kısmi türevlerinin bir (x_0, y_0) noktasında var olduklarını kabul edin. Yakındaki bir $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ noktasına geçersek, f'deki değişim

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

olur.

$L(x, y)$'nin tanımından, $x - x_0 = \Delta x$ ve $y - y_0 = \Delta y$ gösterimini kullanarak yapılan doğrudan bir hesaplama, L'de buna karşılık gelen değişikliğin

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - L(x_0, y_0)\\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y\end{aligned}$$

olduğunu gösterir.

dx ve dy **diferansiyelleri** bağımsız değişkenlerdir. Dolayısıyla bunlara herhangi değerler verilebilir. Çoğunlukla, $dx = \Delta x = x - x_0$ ve $dy = \Delta y = y - y_0$ alırız. Buradan, f'nin diferansiyeli veya toplam diferansiyeli için aşağıdaki tanımı verebiliriz.

TANIM Toplam Diferansiyel

(x_0, y_0)'dan yakındaki bir $(x_0 + dx, y_0 + dy)$ noktasına ilerlersek, f'nin lineerizasyonunda bundan kaynaklanan

$$df = f_x(x_0, y_0)\, dx + f_y(x_0, y_0)\, dy$$

değişimine ***f*'nin toplam diferansiyeli** denir.

ÖRNEK 7 Hacimdeki Değişimi Kestirmek

Silindirik bir kutunun 1 inç çapında ve 5 inç yüksekliğinde olacak şekilde tasarlandığını fakat çapının $dr = +0.03$ ve yüksekliğinin $dh = -0.1$ kadar hatalı olduğunu varsayın. Kutunun hacminde bu hatalardan kaynaklanan mutlak değişimi öngörün.

Çözüm $V = \pi r^2 h$'deki değişimi öngörmek için,

$$\Delta V \approx dV = V_r(r_0, h_0)\, dr + V_h(r_0, h_0)\, dh$$

formülünü kullanırız. $V_r = 2\pi rh$ ve $V_h = \pi r^2$ ile

$$\begin{aligned}dV &= 2\pi r_0 h_0\, dr + \pi r_0^2\, dh = 2\pi(1)(5)(0.03) + \pi(1)^2(-0.1)\\ &= 0.3\pi - 0.1\pi = 0.2\pi \approx 0.63 \text{ inç}^3\end{aligned}$$

buluruz. ■

Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun değerindeki mutlak değişim yerine *bağıl değişimi* veya *yüzde değişimi* sırasıyla

$$\frac{df}{f(x_0, y_0)} \qquad \text{ve} \qquad \frac{df}{f(x_0, y_0)} \times 100,$$

ile öngörebiliriz. Örnek 7'de bağıl değişim

$$\frac{dV}{V(r_0, h_0)} = \frac{0.2\pi}{\pi r_0{}^2 h_0} = \frac{0.2\pi}{\pi(1)^2(5)} = 0.04,$$

ile öngörülür. Bu da yüzde değişimi %4 olarak verir.

ÖRNEK 8 Değişime Duyarlılık

Şirketiniz 25 ft yüksekliğinde ve 5 ft yarıçapında silindir şeklinde şurup depolama tankları üretmektedir. Tankların hacmi yükseklik ve yarıçaptaki küçük değişimlere ne kadar duyarlıdır?

Çözüm $V = \pi r^2 h$ ile hacimde oluşacak değişim için

$$\begin{aligned} dV &= V_r(5, 25)\, dr + V_h(5, 25)\, dh \\ &= (2\pi rh)_{(5,25)}\, dr + (\pi r^2)_{(5,25)}\, dh \\ &= 250\pi\, dr + 25\pi\, dh \end{aligned}$$

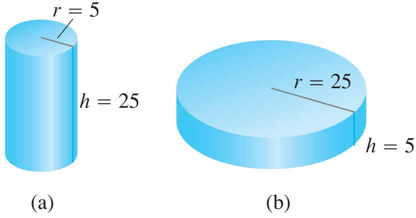
yaklaşımını buluruz. Yani, r'deki 1 birimlik bir değişim V'yi 250π birim kadar değiştirecektir. h'deki 1 birimlik değişiklik ise V'yi 25π birim değiştirir. Tankın hacmi r'deki küçük değişikliklere h'de aynı oranda küçük değişikliklere olduğundan 10 kat daha duyarlıdır. Tankların doğru hacimde olmasını sağlamaktan sorumlu kalite kontrol mühendisi olarak, yarıçaplarına özel bir dikkat göstermelisiniz.

Bunun tersi olarak, r ve h'nin değerleri $r = 25$ ve $h = 5$ olacak şekilde değiştirilirse, V'nin toplam diferansiyeli

$$dV = (2\pi rh)_{(25,5)}\, dr + (\pi r^2)_{(25,5)}\, dh = 250\pi\, dr + 625\pi\, dh$$

olur. Şimdi hacim h'deki değişimlere r'deki değişimlerden daha duyarlıdır (Şekil 14.35).

Genel kural şudur, fonksiyonlar en büyük kısmi türevi üreten değişkenlerdeki küçük değişimlere daha duyarlıdırlar. ■



ŞEKİL 14.35 (a) silindirinin hacmi r'deki küçük bir değişikliğe h'deki aynı oranda küçük bir değişikliğe olduğundan daha duyarlıdır. (b) silindirinin hacmi ise h'deki küçük bir değişikliğe r'deki aynı oranda küçük bir değişikliğe olduğundan daha duyarlıdır (Örnek 8).

ÖRNEK 9 Yüzde Hata Öngörmek

Dik bir silindirin $V = \pi r^2 h$ hacmi, r ve h'nin ölçülen değerlerinden hesaplanacaktır. r'nin %2'den büyük olmayan bir hatayla ve h'nin de %0.5'ten büyük olmayan bir hatayla ölçüldüğünü varsayın. V'nin hesaplanmasında bundan kaynaklanacak olası yüzde hatayı bulun.

Çözüm Bize söylenen

$$\left|\frac{dr}{r} \times 100\right| \le 2 \qquad \text{ve} \qquad \left|\frac{dh}{h} \times 100\right| \le 0.5$$

olduğudur.

$$\frac{dV}{V} = \frac{2\pi rh\, dr + \pi r^2\, dh}{\pi r^2 h} = \frac{2\, dr}{r} + \frac{dh}{h}$$

olduğu için,

$$\left|\frac{dV}{V}\right| = \left|2\frac{dr}{r} + \frac{dh}{h}\right|$$
$$\leq \left|2\frac{dr}{r}\right| + \left|\frac{dh}{h}\right|$$
$$\leq 2(0.02) + 0.005 = 0.045$$

buluruz. Hacim hesabındaki hata en fazla % 4.5 olacaktır. ■

İkiden Fazla Değişkenli Fonksiyonlar

İkiden fazla değişkenli fonksiyonlar için de benzer sonuçlar geçerlidir.

1. $f(x, y, z)$'nin bir $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasındaki **lineerizasyonu**

$$L(x, y, z) = f(P_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0)$$

ile verilir.

2. R'nin, merkezi P_0'da olan ve f'nin ikinci kısmi türevlerinin sürekli olduğu bir açık bölgede bulunan kapalı dikdörtgen şeklinde bir cisim olduğunu varsayın. Ayrıca, $|f_{xx}|, |f_{yy}|, |f_{zz}|, |f_{xy}|, |f_{xz}|$, ve $|f_{yz}|$'nin R üzerinde M'den küçük veya eşit olduklarını da varsayın. Bu durumda R üzerinde f'ye L ile yaklaşım yapılmasındaki $E(x, y, z) = f(x, y, z) - L(x, y, z)$ **hata**'sı

$$|E| \leq \frac{1}{2}M(|x - x_0| + |y - y_0| + |z - z_0|)^2$$

eşitsizliğiyle sınırlıdır.

3. f'nin ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekliyse ve x, y ve z x_0, y_0, z_0'dan dx, dy ve dz oranında değişiyorsa,

$$df = f_x(P_0)\,dx + f_y(P_0)\,dy + f_z(P_0)\,dz$$

toplam diferansiyeli, bunlardan dolayı f'de oluşacak değişimin iyi bir yaklaşımıdır.

ÖRNEK 10 3-Boyutlu Uzayda Bir Lineer Yaklaşım Bulmak

$(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 0)$ noktasında

$$f(x, y, z) = x^2 - xy + 3\sin z$$

fonksiyonunun $L(x, y, z)$ lineerizasyonunu bulun.

$$R: \quad |x - 2| \leq 0.01, \qquad |y - 1| \leq 0.02, \qquad |z| \leq 0.01$$

dikdörtgeni üzerinde f yerine L yazmanın getireceği hatanın üst sınırını bulun.

Çözüm Rutin bir hesaplama

$$f(2, 1, 0) = 2, \qquad f_x(2, 1, 0) = 3, \qquad f_y(2, 1, 0) = -2, \qquad f_z(2, 1, 0) = 3.$$

verir. Böylece,

$$L(x, y, z) = 2 + 3(x - 2) + (-2)(y - 1) + 3(z - 0) = 3x - 2y + 3z - 2.$$

olur.

$$f_{xx} = 2, \qquad f_{yy} = 0, \qquad f_{zz} = -3\sin z,$$
$$f_{xy} = -1, \qquad f_{xz} = 0, \qquad f_{yz} = 0,$$

olduğu için, M'yi rahatlıkla max $|-3 \sin z| = 3$ olarak alabiliriz. Buradan

$$|E| \leq \frac{1}{2}(3)(0.01 + 0.02 + 0.01)^2 = 0.0024$$

buluruz. Hata 0.0024'ten büyük olmayacaktır. ■

ALIŞTIRMALAR 14.6

Yüzeylerin Teğet Düzlemleri ve Normal Doğruları

1–8 alıştırmalarında, verilen yüzeyin P_0'daki

(a) teğet düzleminin ve **(b)** normalinin denklemini bulun.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad P_0(1, 1, 1)$

2. $x^2 + y^2 - z^2 = 18, \quad P_0(3, 5, -4)$

3. $2z - x^2 = 0, \quad P_0(2, 0, 2)$

4. $x^2 + 2xy - y^2 + z^2 = 7, \quad P_0(1, -1, 3)$

5. $\cos \pi x - x^2 y + e^{xz} + yz = 4, \quad P_0(0, 1, 2)$

6. $x^2 - xy - y^2 - z = 0, \quad P_0(1, 1, -1)$

7. $x + y + z = 1, \quad P_0(0, 1, 0)$

8. $x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y - z = -4, \quad P_0(2, -3, 18)$

9–12 alıştırmalarında, verilen yüzeye verilen noktada teğet olan düzlemin denklemini bulun.

9. $z = \ln(x^2 + y^2), \quad (1, 0, 0)$ **10.** $z = e^{-(x^2+y^2)}, \quad (0, 0, 1)$

11. $z = \sqrt{y - x}, \quad (1, 2, 1)$ **12.** $z = 4x^2 + y^2, \quad (1, 1, 5)$

Eğrilerin Teğetleri

13–18 alıştırmalarında, yüzeylerin kesişim eğrilerine verilen noktada teğet olan doğrunun parametrik denklemlerini bulun.

13. Yüzeyler: $x + y^2 + 2z = 4, \quad x = 1$
Nokta: $(1, 1, 1)$

14. Yüzeyler: $xyz = 1, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
Nokta: $(1, 1, 1)$

15. Yüzeyler: $x^2 + 2y + 2z = 4, \quad y = 1$
Nokta: $(1, 1, 1/2)$

16. Yüzeyler: $x + y^2 + z = 2, \quad y = 1$
Nokta: $(1/2, 1, 1/2)$

17. Yüzeyler: $x^3 + 3x^2y^2 + y^3 + 4xy - z^2 = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 11$
Nokta: $(1, 1, 3)$

18. Yüzeyler: $x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 - z = 0$
Nokta: $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4\right)$

Değişimi Öngörmek

19. $P(x, y, z)$ noktası $P_0(3, 4, 12)$'den $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ yönünde $ds = 0.1$ birim ilerlerse,

$$f(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

fonksiyonu ne kadar değişir?

20. $P(x, y, z)$ noktası orijinden $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ yönünde $ds = 0.1$ birim ilerlerse,

$$f(x, y, z) = e^x \cos yz$$

fonksiyonu ne kadar değişecektir?

21. $P(x, y, z)$ noktası $P_0(2, -1, 0)$'dan $P_1(0, 1, 2)$ noktasına doğru $ds = 0.2$ birim ilerlerse,

$$g(x, y, z) = x + x \cos z - y \sin z + y$$

fonksiyonu ne kadar değişecektir?

22. $P(x, y, z)$ noktası $P_0(-1, -1, -1)$'den orijine doğru $ds = 0.1$ birim ilerlerse,

$$h(x, y, z) = \cos(\pi xy) + xz^2$$

fonksiyonu ne kadar değişecektir?

23. Bir çember boyunca sıcaklık değişimi xy-düzleminde bir (x, y) noktasındaki santigrad sıcaklığın $T(x, y) = x \sin 2y$ olduğunu ve xy-düzleminde uzaklığın metre olarak ölçüldüğünü varsayın. Bir parçacık saat yönünde, merkezi orijinde olan 1 m yarıçaplı bir çember üzerinde 2 m/sn hızla ilerlemektedir.

a. Parçacığa etkiyen sıcaklık $P\left(1/2, \sqrt{3}/2\right)$ noktasında °C/m olarak ne hızla değişmektedir?

b. Parçacığa etkiyen sıcaklık P'de °C/m olarak ne hızla değişmektedir?

24. Bir uzay eğrisi boyunca sıcaklık değişimi Uzayda bir bölgedeki santigrad sıcaklık $T(x, y, z) = 2x^2 - xyz$ ile verilmektedir. Bir parçacık bu bölgede ilerlemekte ve t anındaki konumu, zaman saniye ve uzaklık metre cinsinden ölçülmek üzere, $x = 2t^2$, $y = 3t$ ve $z = -t^2$ ile verilmektedir.

a. Parçacık $P(8, 6, -4)$ noktasındayken, parçacığa etkiyen sıcaklık °C/m olarak ne hızla değişmektedir?

b. Parçacığa etkiyen sıcaklık P'de °C/m olarak ne hızla değişmektedir?

Lineerizasyonlar Bulmak

25–30 alıştırmalarında, verilen her noktada fonksiyonun $L(x, y)$ lineerizasyonunu bulun.

25. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ at **a.** $(0, 0)$, **b.** $(1, 1)$

26. $f(x, y) = (x + y + 2)^2$ at **a.** $(0, 0)$, **b.** $(1, 2)$

27. $f(x, y) = 3x - 4y + 5$ at **a.** $(0, 0)$, **b.** $(1, 1)$

28. $f(x, y) = x^3y^4$ at **a.** $(1, 1)$, **b.** $(0, 0)$

29. $f(x, y) = e^x \cos y$ at **a.** $(0, 0)$, **b.** $(0, \pi/2)$

30. $f(x, y) = e^{2y-x}$ at **a.** $(0, 0)$, **b.** $(1, 2)$

Lineer Yaklaşımlarda Hataların Üst Sınırı

31–36 alıştırmalarında, $f(x, y)$ fonksiyonunun P_0'da $L(x, y)$ lineerizasyonunu bulun. Sonra, $f(x, y) \approx L(x, y)$ yaklaşımının R dikdörtgeni üzerindeki hatasının büyüklüğü $|E|$ için bir üst sınır bulun.

31. $f(x, y) = x^2 - 3xy + 5$, $P_0(2, 1)$,
R: $|x - 2| \le 0.1$, $|y - 1| \le 0.1$

32. $f(x, y) = (1/2)x^2 + xy + (1/4)y^2 + 3x - 3y + 4$, $P_0(2, 2)$,
R: $|x - 2| \le 0.1$, $|y - 2| \le 0.1$

33. $f(x, y) = 1 + y + x\cos y$, $P_0(0, 0)$,
R: $|x| \le 0.2$, $|y| \le 0.2$
(E'yi hesaplarken, $|\cos y| \le 1$ ve $|\sin y| \le 1$ kullanın.)

34. $f(x, y) = xy^2 + y\cos(x - 1)$, $P_0(1, 2)$,
R: $|x - 1| \le 0.1$, $|y - 2| \le 0.1$

35. $f(x, y) = e^x \cos y$, $P_0(0, 0)$,
R: $|x| \le 0.1$, $|y| \le 0.1$
(E'yi hesaplarken, $e^x \le 1.11$ ve $|\cos y| \le 1$ kullanın.)

36. $f(x, y) = \ln x + \ln y$, $P_0(1, 1)$,
R: $|x - 1| \le 0.2$, $|y - 1| \le 0.2$

Üç Değişkenli Fonksiyonlar

37–42 alıştırmalarındaki fonksiyonların verilen noktalardaki $L(x, y, z)$ lineerizasyonlarını bulun.

37. $f(x, y, z) = xy + yz + xz$
a. $(1, 1, 1)$ **b.** $(1, 0, 0)$ **c.** $(0, 0, 0)$

38. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
a. $(1, 1, 1)$ **b.** $(0, 1, 0)$ **c.** $(1, 0, 0)$

39. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
a. $(1, 0, 0)$ **b.** $(1, 1, 0)$ **c.** $(1, 2, 2)$

40. $f(x, y, z) = (\sin xy)/z$
a. $(\pi/2, 1, 1)$ **b.** $(2, 0, 1)$

41. $f(x, y, z) = e^x + \cos(y + z)$
a. $(0, 0, 0)$ **b.** $\left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ **c.** $\left(0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

42. $f(x, y, z) = \tan^{-1}(xyz)$
a. $(1, 0, 0)$ **b.** $(1, 1, 0)$ **c.** $(1, 1, 1)$

43–46 alıştırmalarında, $f(x, y, z)$ fonksiyonunun P_0'daki lineerizasyonu $L(x, y, z)$'yi bulun. Sonra, R bölgesi üzerinde $f(x, y, z) \approx L(x, y, z)$ yaklaşımının getirdiği E hatasına bir üst sınır bulun.

43. $f(x, y, z) = xz - 3yz + 2$ at $P_0(1, 1, 2)$
R: $|x - 1| \le 0.01$, $|y - 1| \le 0.01$, $|z - 2| \le 0.02$

44. $f(x, y, z) = x^2 + xy + yz + (1/4)z^2$ $P_0(1, 1, 2)$
R: $|x - 1| \le 0.01$, $|y - 1| \le 0.01$, $|z - 2| \le 0.08$

45. $f(x, y, z) = xy + 2yz - 3xz$ $P_0(1, 1, 0)$
R: $|x - 1| \le 0.01$, $|y - 1| \le 0.01$, $|z| \le 0.01$

46. $f(x, y, z) = \sqrt{2}\cos x \sin(y + z)$ $P_0(0, 0, \pi/4)$
R: $|x| \le 0.01$, $|y| \le 0.01$, $|z - \pi/4| \le 0.01$

Hata Öngörmek; Değişime Duyarlılık

47. Maksimum hatayı öngörmek T'nin, x ve y, $|dx| = 0.1$ ve $|dy| = 0.02$ olası en büyük hatalarıyla, 2 ve ln 2 olarak verilmek üzere, $T = x(e^y + e^{-y})$ formülünden bulunacağını varsayın. T'nin hesaplanan değerindeki olası en büyük hatayı bulun.

48. Bir silindirin hacmini öngörmek %1 hatayla ölçülen r ve h değerleriyle, $V = \pi r^2 h$ ne kadar doğru olarak hesaplanabilir?

49. Maksimum yüzde hata milimetreye yuvarlama ile $r = 5.0$ cm ve $h = 12.0$ cm ise, $V = \pi r^2 h$'yi hesaplarken, maksimum yüzde hatanın ne olmasını bekleyebiliriz?

50. Elektriksel dirençte değişim R_1 ve R_2 dirençlerini paralel bağlayarak üretilen R direnci (Şekle bakın)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

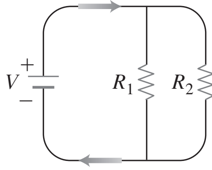
formülüyle hesaplanabilir.

a.

$$dR = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 dR_1 + \left(\frac{R}{R_2}\right)^2 dR_2$$

olduğunu gösterin.

b. Bir sonraki sayfada gösterildiği gibi, iki dirençli bir devreyi $R_1 = 100$ ohm ve $R_2 = 400$ ohm olacak şekilde tasarladınız, ama üretimde her zaman değişiklikler olur ve firmanızın satın aldığı dirençler muhtemelen tam olarak bu değerlere sahip olmayacaklardır. R'nin değeri R_1'deki değişimlere mi, R_2'deki değişimlere mi daha duyarlı olacaktır? Yanıtınızı açıklayın.



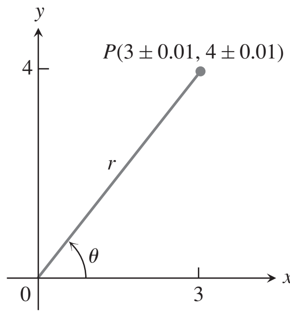
c. Şekildeki gibi, bir başka devrede R_1'i 20'den 20.1 ohm'a, R_2'yi de 25 ten 24.9 ohm'a değiştirmeyi planlıyorsunuz. Bu değişiklikten dolayı R'de meydana gelen değişim yaklaşık olarak yüzde kaçtır?

51. Uzunluk ve genişlik ölçümlerinden uzun ince bir dikdörtgenin alanını hesaplamayı planlıyorsunuz. Hangi boyutu daha dikkatli ölçmelisiniz? Yanıtınızı açıklayın.

52. a. (1, 0) noktası civarında, $f(x, y) = x^2(y + 1)$ fonksiyonu x'teki değişimlere mi, yoksa y'deki değişimlere mi daha duyarlıdır? Yanıtınızı açıklayın.

b. dx'in dy'ye hangi oranı df'yi (1, 0)'da sıfır yapar?

53. Koordinat dönüşümlerinde hata taşınması



a. Aşağıda gösterildiği gibi, $x = 3 \pm 0.01$ ve $y = 4 \pm 0.01$ ise, $r^2 = x^2 + y^2$ ve $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ formüllerinden $P(x, y)$ noktasının r ve θ kutupsal koordinatlarını yaklaşık ne kadar hassaslıkla hesaplayabilirsiniz? Tahminlerinizi r ve θ'nın $(x_0, y_0) = (3, 4)$ noktasındaki değerlerinin bir yüzdesi olarak tanımlayın.

b. $(x_0, y_0) = (3, 4)$ noktasında, r ve θ'nın değerleri x'teki değişimlere mi, y'deki değişimlere mi daha duyarlıdır? Yanıtınızı açıklayın.

54. Bir soda kutusu tasarlamak Standart bir 12 onsluk gazoz kutusu esasında $r = 1$ inç yarıçaplı ve $h = 5$ inç yüksekliğinde bir silindirdir.

a. Bu boyutlarda, kutunun hacminin yükseklikteki küçük bir değişime karşılık yarıçaptaki küçük bir değişime duyarlılığı nedir?

b. Daha fazla soda içeriyormuş gibi *görünen*, ama aslında tam 12 ons içeren bir gazoz kutusu tasarlayabilir misiniz? Boyutları ne olur? (Birden fazla doğru yanıt vardır.)

55. 2 × 2 determinantın değeri $|a|$ değeri $|b|, |c|$ ve $|d|$'den çok daha büyükse,

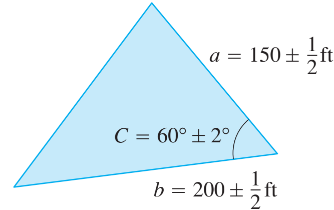
$$f(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

determinantının değeri a, b, c ve d'den hangisine daha duyarlıdır? Yanıtınızı açıklayın.,

56. Maksimum hata öngörmek $u = xe^y + y \sin z$ olduğunu ve x, y ve z'nin en büyük olası hatalarının sırasıyla ± 0.2, ± 0.6 ve $\pm \pi/180$ olduğunu varsayın. u'yu ölçülen $x = 2$, $y = \ln 3$, $z = \pi/2$ değerlerinden hesaplamada ortaya çıkacak en büyük olası hatayı öngörün.

57. Wilson miktar Ekonomideki Wilson miktar formülü, bir depo için ısmarlanacak en ekonomik miktar Q'nun (radyo, ayakkabı, süpürge gibi), K siparişi vermenin masrafı, M hafta başına satılan mal sayısı ve h her malın haftalık depolama masrafı (yer, bakım, güvenlik, vb masrafı) olmak üzere, $Q = \sqrt{2KM/h}$, olduğunu söyler. $(K_0, M_0, h_0) = (2, 20, 0.05)$ noktası civarında Q değeri K, M ve h değişkenlerinin hangisine daha duyarlıdır? Yanıtınızı açıklayın.

58. Üçgensel bir alanın incelenmesi Bir üçgenin alanı, a ve b üçgenin iki kenarının uzunluğu ve C de bu ikisinin arasındaki açı olmak üzere, $(1/2)ab \sin C$ ile verilmektedir. Üçgen bir bölgeyi incelerken, a, b ve C'yi sırayla 150 ft, 200 ft ve 60° olarak ölçüyorsunuz. a ve b değerleriniz yarım fit fazla ve C'yi ölçümünüz 2° fazlaysa, alan hesaplamanız ne kadar hatalı olabilir? Şekle bakın. Radyan kullanmayı hatırlayın.



Teori ve Alıştırmalar

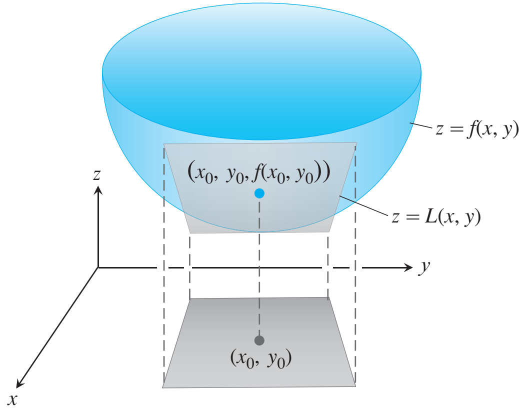
59. $f(x, y)$'nin lineerizasyonu bir teğet düzlem yaklaşımıdır Diferansiyellenebilir bir f fonksiyonuyla tanımlanan $z = f(x, y)$ yüzeyi üzerinde bir $P_0(x_0, y_0)$, $f(x_0, y_0)$ noktasındaki teğet düzlemin

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

veya

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

düzlemi olduğunu gösterin. Yani P_0'daki teğet düzlem, f'nin P_0'daki lineerizasyonunun grafiğidir (Şekle bakın).



60. Bir çemberin involutu boyunca değişim $f(x, y) = x^2 + y^2$' nin

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}, \quad t > 0$$

eğrisinin birim teğet vektörü yönündeki doğrultu türevini bulun.

61. Bir helis boyunca değişim $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$'nin $t = -\pi/4$, 0 ve $\pi/4$ olduğu noktalarda

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

helisinin birim teğet vektörü yönündeki türevini bulun. f fonksiyonu helis üzerindeki bir $P(x, y, z)$ noktasından orijine olan uzaklığın karesini verir. Burada hesaplanan türevler, P'nin $t = -\pi/4$, 0 ve $\pi/4$ olduğu noktalardan geçtiği sırada, uzaklığın karesinin t'ye göre değişim oranlarını verir.

62. Normal eğriler Bir kesişim noktasında, bir düzgün eğrinin hız vektörü aynı noktadaki ∇f'nin skaler bir katı ise, eğri $f(x, y, z) = c$ yüzeyine *normal*dir.
$t = 1$ iken

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} - \frac{1}{4}(t + 3)\mathbf{k}$$

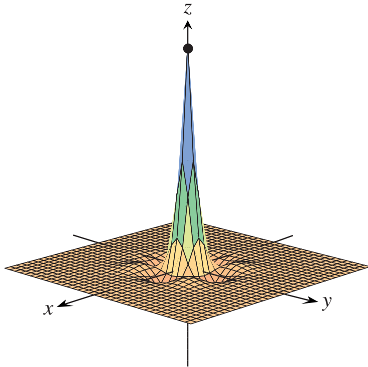
eğrisinin, $x^2 + y^2 - z = 3$ yüzeyine normal olduğunu gösterin.

63. Teğet eğriler Bir kesişim noktasında, eğrinin hız vektörü o noktadaki ∇f'ye ortogonalse, eğri yüzeye *teğet*tir.
$t = 1$ iken

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} + (2t - 1)\mathbf{k}$$

eğrisinin, $x^2 + y^2 - z = 1$ yüzeyine teğet olduğunu gösterin.

14.7 Ekstremum Değerler ve Eyer Noktaları

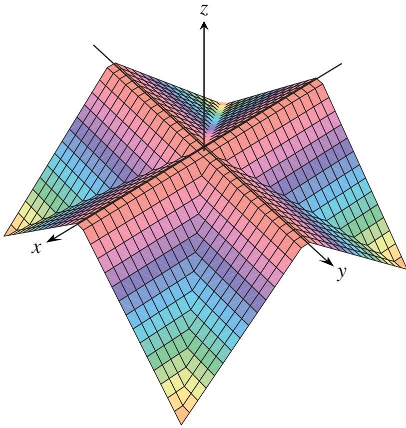


ŞEKİL 14.36 $z = (\cos x)(\cos y)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ fonksiyonunun kare şeklindeki bir $|x| \leq 3\pi/2, |y| \leq 3\pi/2$ bölgesinde değeri 1 olan bir maksimumu ve değeri yaklaşık -0.067 olan bir minimumu vardır.

İki değişkenli sürekli fonksiyonlar, kapalı ve sınırlı tanım kümelerinde mutlak maksimum ve minimum değerlerini alırlar (Bkz. Şekil 14.36 ve 14.37). Bu bölümde, fonksiyonların birinci mertebeden kısmi türevlerini inceleyerek, ekstremum değerleri arama işini daraltabileceğimizi göreceğiz. İki değişkenli bir fonksiyonun ekstremum değerleri, ancak tanım kümesinin sınır noktalarında veya birinci mertebeden kısmi türevlerin sıfır olduğu veya birinci mertebeden kısmi türevlerden birinin yada ikisinin birden bulunmadığı iç noktalarında bulunabilir. Bununla birlikte, bir (a, b) iç noktasında türevlerin bulunmaması veya sıfır olması her zaman bir ekstremum değerin varlığını işaret etmez. Fonksiyonun grafiği olan yüzey, (a, b) noktasının üst tarafında bir eyer şeklinde olabilir ve burada teğet düzlemini kesebilir.

Yerel Ekstremum Değerler İçin Türev Testleri

Tek değişkenli bir fonksiyonun yerel ekstremum değerlerini bulmak için, grafiğin yatay bir teğetinin bulunduğu noktaları ararız. Sonra böyle noktalarda yerel maksimumları, yerel minimumları ve büküm noktalarını ararız. İki değişkenli bir $f(x, y)$ fonksiyonu için, $z = f(x, y)$ yüzeyinin yatay bir teğet düzleminin bulunduğu noktaları ararız. Böyle noktalarda yerel maksimumları, yerel minimumları ve eyer noktalarını (eyer noktaları hakkında birazdan daha fazla bilgi verilecektir) ararız.



ŞEKİL 14.37 (10, 15, 20) noktasından görülen

$$z = \frac{1}{2}\left(\left||x| - |y|\right| - |x| - |y|\right)$$

"çatı yüzeyi". Tanımlayıcı fonksiyonun $|x| \le a$, $|y| \le a$ kare bölgesinde değeri 0 olan bir maksimumu ve değeri $-a$ olan bir minimumu vardır.

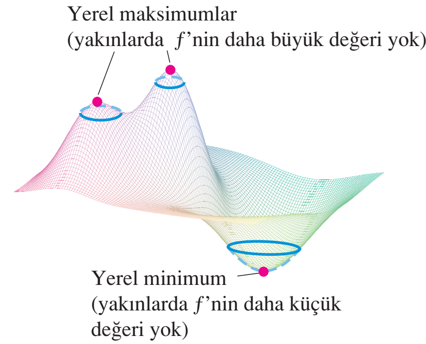
TANIMLAR Yerel Maksimum, Yerel Minimum

$f(x, y)$ fonksiyonu (a, b) noktasını içeren bir R bölgesinde tanımlanmış olsun.

1. Merkezi (a, b)'de olan bir açık daire içindeki bütün (x, y) tanım kümesi noktaları için $f(a, b) \ge f(x, y)$ ise, $f(a, b)$ f'nin bir **yerel maksimumu**dur.
2. Merkezi (a, b)'de olan bir açık daire içindeki bütün (x, y) tanım kümesi noktaları için $f(a, b) \le f(x, y)$ ise, $f(a, b)$ f'nin bir **yerel minimumu**dur.

Yerel maksimumlar $z = f(x, y)$ yüzeyi üzerindeki dağ tepelerine, yerel minimumlar ise ova diplerine karşılık gelirler (Şekil 14.38). Böyle noktalarda, varsa, teğet düzlemler yataydır. Yerel ekstremumlara ayrıca **bağıl ekstremumlar** da denir.

Tek değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi, yerel ekstremumları tanımlamanın anahtarı birinci türev testidir.



ŞEKİL 14.38 Bir yerel maksimum bir dağ tepesi, bir yerel minimum ise bir ova dibidir.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Siméon-Denis Poisson (1781–1840)

TEOREM 10 Yerel Ekstremum Değerler İçin Birinci Türev Testi

$f(x, y)$'nin, tanım kümesinin bir (a, b) iç noktasında bir yerel maksimum veya minimum değeri varsa ve o noktada birinci mertebe kısmi türevleri de varsa, $f_x(a, b) = 0$ ve $f_y(a, b) = 0$ olur.

İspat (a, b) noktasında f'nin bir yerel ekstremum değeri varsa $g(x) = f(x, b)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasında bir yerel ekstremum değeri vardır (Şekil 14.39). Bu nedenle $g'(a) = 0$ dır (Bölüm 4, Teorem 2). Şimdi, $g'(a) = f_x(a, b)$ olduğundan $f_x(a, b) = 0$ olur. Benzer düşünceyle, $h(y) = f(a, y)$ fonksiyonu $f_y(a, b) = 0$ olduğunu gösterir. ■

$f_x(a, b) = 0$ ve $f_y(a, b) = 0$ değerlerini, $z = f(x, y)$ yüzeyinin (a, b)'deki teğet düzleminin

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0$$

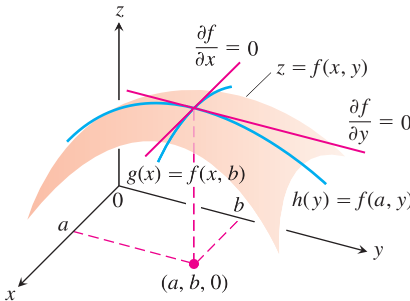
denkleminde yerine koyarsak, denklem

$$0 \cdot (x - a) + 0 \cdot (y - b) - z + f(a, b) = 0$$

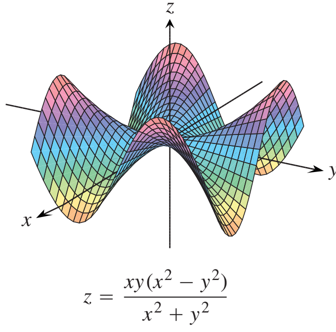
veya

$$z = f(a, b)$$

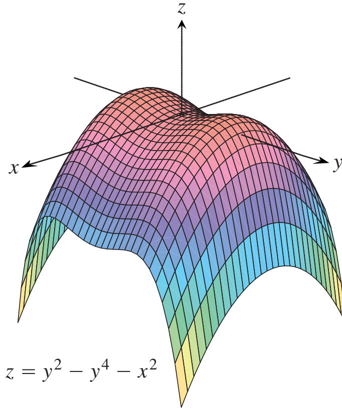
haline indirgenir.



ŞEKİL 14.39 f'nin $x = a$, $y = b$ noktasında bir yerel maksimum değeri varsa $f_x(a, b)$ ve $f_y(a, b)$ birinci mertebe kısmi türevlerinin ikisi de sıfırdır.



$z = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$



$z = y^2 - y^4 - x^2$

ŞEKİL 14.40 Orijinde eyer noktaları.

Yani, Teorem 10, yüzeyin bir yerel ekstremum değerinde, orada bir teğet düzlem bulunması koşuluyla, gerçekten de yatay bir teğet düzlemi olduğunu söylemektedir.

TANIM Kritik Nokta

Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun tanım kümesinin bir iç noktasında hem f_x hem de f_y sıfır ise veya f_x ve f_y'den biri veya ikisi de yoksa bu nokta f'nin bir **kritik noktasıdır.**

Teorem 10'a göre bir $f(x, y)$ fonksiyonunun ekstremum değerler alabileceği yegane noktalar kritik noktalar ve sınır noktalarıdır. Tek değişkenli diferansiyellenebilir fonksiyonlarda olduğu gibi, her kritik nokta bir yerel ekstremuma neden olmaz. Tek değişkenli diferansiyellenebilir bir fonksiyonun bir büküm noktası olabilir. İki değişkenli diferansiyellenebilir bir fonksiyonun bir *eyer noktası* olabilir.

TANIM Eyer Noktası

Diferansiyellenebilir bir $f(x, y)$ fonksiyonunun bir kritik noktası (a, b) olsun. Merkezi (a, b)'de olan her açık dairede hem $f(x, y) > f(a, b)$ olacak şekilde (x, y) tanım kümesi noktaları ve hem de $f(x, y) < f(a, b)$ olacak şekilde (x, y) tanım kümesi noktaları varsa (a, b) kritik noktası bir **eyer noktası** dır. $z = f(x, y)$ yüzeyinde buna karşılık gelen $(a, b, f(a, b))$ noktasına yüzeyin bir eyer noktası denir (Şekil 14.40).

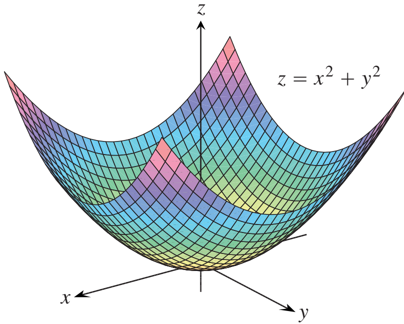
ÖRNEK 1 Yerel Ekstremum Değerleri Bulmak

$f(x, y) = x^2 + y^2$'nin yerel ekstremum değerlerini bulun.

Çözüm f'nin tanım kümesi bütün düzlemdir (yani sınır noktası yoktur) ve $f_x = 2x$ ile $f_y = 2y$ kısmi türevleri her yerde tanımlıdır. Dolayısıyla, yerel ekstremum değerler sadece

$$f_x = 2x = 0 \quad \text{ve} \quad f_y = 2y = 0$$

olan yerlerde bulunabilir. Tek olasılık f'nin değerinin sıfır olduğu orijindir. f asla negatif olmadığı için, orijinin bir yerel minimum verdiğini görürüz (Şekil 14.41). ■



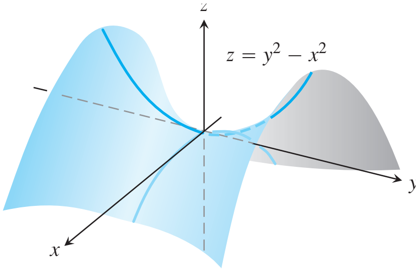
ŞEKİL 14.41 $f(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonunun grafiği $z = x^2 + y^2$ paraboloididir. Fonksiyonun orijinde, değeri 0 olan bir yerel minimumu vardır (Örnek 1).

ÖRNEK 2 Bir Eyer Noktası Belirlemek

$f(x, y) = y^2 - x^2$ ekstremum değerlerini (varsa) bulun.

Çözüm f'nin tanım kümesi bütün düzlemdir (yani sınır noktası yoktur) ve $f_x = -2x$ ile $f_y = 2y$ kısmi türevleri her yerde tanımlıdır. Dolayısıyla, yerel ekstremum değerler sadece orijinde, $(0, 0)$'da bulunabilir. Ancak, pozitif x-ekseni boyunca f'nin değeri $f(x, 0) = -x^2 < 0$'dır; pozitif y-ekseni boyunca f'nin değeri $f(0, y) = 2y > 0$'dır. Dolayısıyla xy-düzleminde merkezi $(0, 0)$'da olan her açık daire, hem fonksiyonun pozitif olduğu noktalar ve hem de fonksiyonun negatif olduğu noktalar içerir. Fonksiyonun orijinde bir yerel ekstremum değeri yerine bir eyer noktası vardır (Şekil 14.42). Fonksiyonun hiç yerel ekstremum değerinin olmadığı sonucuna varırız. ■

R'nin bir (a, b) iç noktasında $f_x = f_y = 0$ olması f'nin orada bir yerel ekstremum değerinin olup olmadığını söylemeye yeterli değildir. Ancak, f ile f'nin birinci ve ikinci mertebe kısmi türevleri R'de sürekliyse, Bölüm 14.10'da ispatlanacak olan aşağıdaki teoremden daha fazlasını öğrenebiliriz.



ŞEKİL 14.42 Orijin, $f(x, y) = y^2 - x^2$ fonksiyonunun bir eyer noktasıdır. Yerel ekstremum değerler yoktur (Örnek 2).

TEOREM 11 Yerel Ekstrem Değerler İçin İkinci Türev Testi

(a, b) merkezli bir dairede $f(x, y)$ ile birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerinin sürekli olduklarını ve $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ olduğunu varsayın. Bu durumda

i. (a, b)'de $f_{xx} < 0$ ve $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ise, f'nin (a, b)'de bir **yerel maksimumu** vardır.

ii. (a, b)'de $f_{xx} > 0$ ve $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ise, f'nin (a, b)'de bir **yerel minimumu** vardır.

iii. (a, b)'de $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ ise, f'nin (a, b)'de bir **eyer noktası** vardır.

iv. (a, b)'de $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ ise, **test sonuçsuzdur**. Bu durumda, f'nin (a, b)'deki davranışını belirlemek için başka bir yol bulmak gerekir.

$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ ifadesine f'nin **diskriminantı** denir. Bazen determinant şeklini hatırlamak daha kolaydır:

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

Teorem 11, diskriminant (a, b) noktasında pozitif ise, yüzeyin her yönde aynı şekilde eğrildiğini söyler: $f_{xx} < 0$ ise, bir yerel maksimum oluşturarak aşağı; $f_{xx} > 0$ ise bir yerel minimum oluşturarak yukarı. Diğer yandan, diskriminant (a, b)'de negatifse, yüzey bazı yönlerde yukarı, bazılarında ise aşağı kıvrılır, dolayısıyla bir eyer noktası elde edilir.

ÖRNEK 3 Yerel Ekstremum Değerler Bulmak

Aşağıdaki fonksiyonun yerel ekstremum değerlerini bulun.

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$$

Çözüm Fonksiyon her x ve y için tanımlı ve türetilebilirdir ve tanım kümesinin sınır noktası yoktur. Dolayısıyla fonksiyonun sadece f_x ile f_y'nin aynı anda sıfır oldukları yerde ekstremum değerleri vardır. Bu

$$f_x = y - 2x - 2 = 0, \qquad f_y = x - 2y - 2 = 0$$

veya

$$x = y = -2$$

verir. Dolayısıyla, $(-2, -2)$ noktası f'nin bir ekstremum değer alabileceği tek noktadır. Bir ekstremum değerin var olup olmadığını anlamak için,

$$f_{xx} = -2, \qquad f_{yy} = -2, \qquad f_{xy} = 1$$

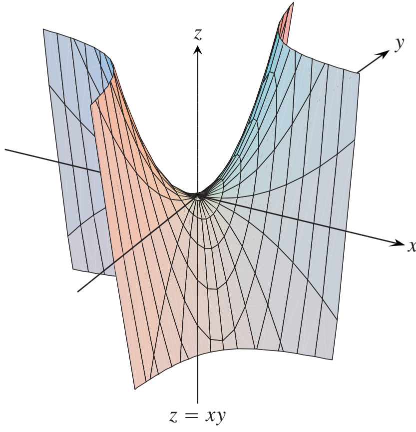
kısmi türevlerini hesaplarız. f'nin $(a, b) = (-2, -2)$'deki diskriminantını

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2) - (1)^2 = 4 - 1 = 3$$

olarak buluruz.

$$f_{xx} < 0 \qquad \text{ve} \qquad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

birleşimi bize f'nin $(-2, -2)$'de bir yerel maksimum değerinin var olduğunu söyler. f'nin bu noktadaki değeri $f(-2, -2) = 8$'dir. ■



ŞEKİL 14.43 $z = xy$ yüzeyinin orijinde bir eyer noktası vardır (Örnek 4).

ÖRNEK 4 Yerel Eksremum Değerler Aramak

$f(x, y) = xy$'nin yerel ekstrem değerlerini bulun.

ÇÖZÜM f her yerde türetilebilir olduğundan (Şekil 14.43), ekstremum değerleri sadece

$$f_x = y = 0 \quad \text{ve} \quad f_y = x = 0$$

olan noktalarda olabilir. Yani, orijin f'nin bir ekstrem değerinin olabileceği tek noktadır. Burada ne olduğunu görmek için,

$$f_{xx} = 0, \qquad f_{yy} = 0, \qquad f_{xy} = 1$$

kısmi türevlerini hesaplarız.

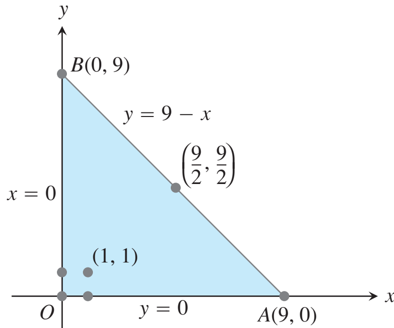
$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -1$$

negatiftir. Dolayısıyla, (0, 0)'da fonksiyonun bir eyer noktası vardır. $f(x, y) = xy$'nin yerel ekstrem değerleri bulunmadığı sonucuna varırız. ■

Kapalı Sınırlı Bölgelerde Mutlak Maksimum ve Minimumlar

Kapalı ve sınırlı bir R bölgesinde sürekli bir $f(x, y)$ fonksiyonunun mutlak ekstremumlarını aramayı üç adımda düzenleriz.

1. R'de, f'nin yerel maksimum veya minimumlarının bulunabileceği *iç noktaları listeleyin* ve bu noktalarda f'yi hesaplayın. Bunlar f'nin kritik noktalarıdır.
2. R'de, f'nin yerel maksimum veya minimumlarının bulunduğu *sınır noktalarını listeleyin* ve bu noktalarda f'yi hesaplayın. Bunun nasıl yapılacağını kısaca göstereceğiz.
3. *Listelerden* f'nin maksimum ve minimum değerlerini bulun. Bunlar f'nin R üzerindeki mutlak maksimum ve minimum değerleridir. Mutlak maksimum ve minimumlar aynı zamanda yerel maksimum ve minimumlar olduğu için, f'nin mutlak minimum ve maksimum değerleri Adım 1 ve 2'de yapılan listelerde bulunmalıdır.



ŞEKİL 14.44 Bu üçgensel bölge Örnek 5'teki fonksiyonun tanım kümesidir.

ÖRNEK 5 Mutlak Ekstremumlar Bulmak

Birinci dörtte bir bölgede, $x = 0$, $y = 0$, $y = 9 - x$ doğrularıyla çevrili üçgensel bölgede

$$f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

fonksiyonunun mutlak maksimum ve minimum değerlerini bulun.

Çözüm f diferansiyellenebilir olduğundan, f'nin bu değerleri alabileceği yegane yerler üçgenin (Şekil 14.44) içinde $f_x = f_y = 0$ olan noktalar ve sınır üzerindeki noktalardır.

(a) **İç noktalar**. Bunlar için,

$$f_x = 2 - 2x = 0, \qquad f_y = 2 - 2y = 0$$

buluruz ve bu da $(x, y) = (1, 1)$ noktasını verir. f'nin oradaki değeri

$$f(1, 1) = 4$$

olur.

(b) Sınır noktaları. Her seferinde üçgenin bir kenarını ele alırız:

(i) OA doğru parçası üzerinde, $y = 0$'dır.

$$f(x, y) = f(x, 0) = 2 + 2x - x^2$$

fonksiyonuna artık x'in $0 \leq x \leq 9$ kapalı aralığında tanımlı bir fonksiyonu olarak bakabiliriz. Ekstremum değerleri (Bölüm 4'ten biliyoruz)

$$f(0, 0) = 2 \qquad \text{olan } x = 0$$

$$f(9, 0) = 2 + 18 - 81 = -61 \qquad \text{olan } x = 9$$

uç noktalarında ve $f'(x, 0) = 2 - 2x = 0$ olan iç noktalarda olabilir. $f'(x, 0) = 0$ olan tek nokta $x = 1$'dir ve burada

$$f(x, 0) = f(1, 0) = 3$$

bulunur.

(ii) OB doğru parçası üzerinde, $x = 0$'dır ve

$$f(x, y) = f(0, y) = 2 + 2y - y^2$$

olur. f'nin x ve y'ye göre simetrisinden ve demin yaptığımız analizden bu doğru parçasındaki adayların

$$f(0, 0) = 2, \qquad f(0, 9) = -61, \qquad f(0. 1) = 3$$

olduğunu biliyoruz.

(iii) AB'nin uç noktalarında f'nin değerlerini zaten bulduk, dolayısıyla sadece AB'nin iç noktalarına bakmamız yeterlidir. $y = 9 - x$ ile,

$$f(x, y) = 2 + 2x + 2(9 - x) - x^2 - (9 - x)^2 = -61 + 18x - 2x^2$$

elde ederiz. $f'(x, 9 - x) = 18 - 4x = 0$ almak,

$$x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

verir. Bu x değerinde,

$$y = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \qquad \text{ve} \qquad f(x, y) = f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = -\frac{41}{2}$$

olur.

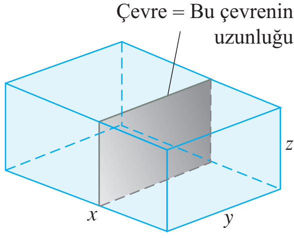
Özet Bütün adayları sıralarız: 4, 2, – 61, 3, –(41/2). Maksimum, f'nin (1, 1)' de aldığı 4 değeridir. Minimum, f'nin (0, 9) ve (9, 0)'da aldığı – 61 değeridir. ■

Değişkenleri üzerinde cebirsel kısıtlamalar bulunan ekstremum değer problemlerini çözmek genellikle bir sonraki bölümde ele alınan Lagrange Çarpanları yöntemini gerektirir. Fakat, bazen bu gibi problemleri sıradaki örnekte olduğu gibi doğrudan çözebiliriz.

ÖRNEK 6 Bir Hacim Problemini Bir Kısıt İle Çözmek

Bir kargo şirketi, sadece uzunluğunun ve çevresinin (bir dik-kesitinin çevresi) toplamı 108 inç'i geçmeyen, dikdörtgensel kutuları kabul etmektedir. En büyük hacimli, kabul edilebilir kutunun boyutlarını bulun.

Çözüm x, y ve z dikdörtgensel kutunun sırasıyla uzunluğunu, genişliğini ve yüksekliğini göstersin. Çevre $2y + 2z$'dir. Kutunun (Şekil 14.45) $V = xyz$ hacmini $x + 2y + 2z = 108$



ŞEKİL 14.45 Örnek 6'daki kutu

(kargo şirketinin kabul ettiği en büyük kutu) bağıntısı ile maksimize etmek istiyoruz. Böylece, kutunun hacmini iki değişkenli bir fonksiyon olarak yazabiliriz.

$$V(y, z) = (108 - 2y - 2z)yz \qquad V = xyz \text{ ve } x = 108 - 2y - 2z$$
$$= 108yz - 2y^2z - 2yz^2$$

Birinci mertebeden kısmi türevleri sıfıra eşitlemek,

$$V_y(y, z) = 108z - 4yz - 2z^2 = (108 - 4y - 2z)z = 0$$
$$V_z(y, z) = 108y - 2y^2 - 4yz = (108 - 2y - 4z)y = 0,$$

(0, 0), (0, 54), (54, 0) ve (18, 18) kritik noktalarını verir. (0, 0), (0, 54) ve (54, 0) da hacim sıfırdır ve maksimum değildir. (18, 18) noktasında İkinci Türev Testini (Teorem 11) uygularız:

$$V_{yy} = -4z, \qquad V_{zz} = -4y, \qquad V_{yz} = 108 - 4y - 4z$$

Buradan,

$$V_{yy}V_{zz} - V_{yz}{}^2 = 16yz - 16(27 - y - z)^2$$

buluruz. Böylece

$$V_{yy}(18, 18) = -4(18) < 0$$

ve

$$\left[V_{yy}V_{zz} - V_{yz}{}^2\right]_{(18,18)} = 16(18)(18) - 16(-9)^2 > 0$$

olması (18, 18)'in maksimum değeri vermesini gerektirir. Paketin boyutları, $x = 108 - 2(18) - 2(18) = 36$ inç, $y = 18$ inç ve $z = 18$ inç. Maksimum hacim $V = (36)(18)(18) = 11{,}664$ inç^3 veya 6.75 ft^3'dir. ■

Teorem 10'un gücüne rağmen, sınırlarını hatırlamanızı istiyoruz.Teorem, fonksiyonun türevlerinin sıfırdan faklı olduğu fakat ekstremum değerlerin bulunabileceği sınır noktalarına uygulanamaz. Ayrıca f_x'in veya f_y'nin bulunmadığı noktalara da uygulanamaz.

Max-Min Testlerinin Özeti

$f(x, y)$'nin ekstremum değerleri sadece

i. f'nin **tanım kümesinin** sınır noktalarında,

ii. **kritik noktalarda** ($f_x = f_y = 0$ olan iç noktalarda veya f_x ile f_y'den birinin veya ikisinin bulunmadığı noktalarda)

bulunabilir.

Merkezi bir (a, b) noktasında olan bir daire üzerinde f'nin birinci ve ikinci mertebe kısmi türevleri sürekliyse ve $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ ise, $f(a, b)$'nin karakteristiği **İkinci Türev Testi** ile belirlenebilir.

i. (a, b)'de $f_{xx} < 0$ ve $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}{}^2 > 0 \Rightarrow$ **yerel maksimum**

ii. (a, b)'de $f_{xx} > 0$ ve $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}{}^2 > 0 \Rightarrow$ **yerel minimum**

iii. (a, b)'de $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}{}^2 < 0 \Rightarrow$ **eyer noktası**

iv. (a, b)'de $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}{}^2 = 0 \Rightarrow$ **test sonuçsuz**

ALIŞTIRMALAR 14.7

Yerel Ekstremleri Bulmak

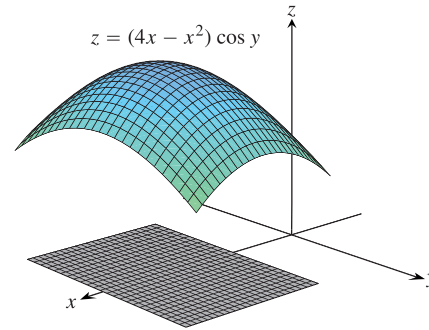
1–30 alıştırmalarındaki fonksiyonların bütün yerel maksimum, yerel minimum ve eyer noktalarını bulun.

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$
2. $f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6$
3. $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4$
4. $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x - 4$
5. $f(x, y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$
6. $f(x, y) = y^2 + xy - 2x - 2y + 2$
7. $f(x, y) = 5xy - 7x^2 + 3x - 6y + 2$
8. $f(x, y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4$
9. $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 + 6y + 2$
10. $f(x, y) = 3x^2 + 6xy + 7y^2 - 2x + 4y$
11. $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$
12. $f(x, y) = 4x^2 - 6xy + 5y^2 - 20x + 26y$
13. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 6$
14. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 2y + 1$
15. $f(x, y) = x^2 + 2xy$
16. $f(x, y) = 3 + 2x + 2y - 2x^2 - 2xy - y^2$
17. $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$
18. $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$
19. $f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$
20. $f(x, y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$
21. $f(x, y) = 9x^3 + y^3/3 - 4xy$
22. $f(x, y) = 8x^3 + y^3 + 6xy$
23. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$
24. $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 9x^2 + 3y^2 - 12y$
25. $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$
26. $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy$
27. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$
28. $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + xy + \dfrac{1}{y}$
29. $f(x, y) = y \sin x$
30. $f(x, y) = e^{2x} \cos y$

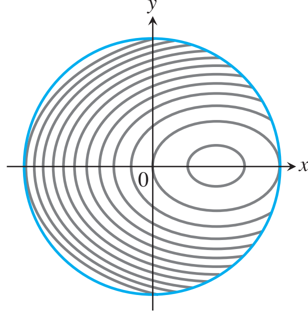
Mutlak Ekstremleri Bulmak

31–38 alıştırmalarında, fonksiyonların verilen tanım aralıklarında mutlak maksimum ve minimumlarını bulun.

31. Birinci dörtte bir bölgede, $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$ ile sınırlı kapalı üçgen plakada $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$
32. Birinci dörtte bir bölgede, $x = 0$, $y = 4$, $y = x$ ile sınırlı kapalı üçgensel plakada $D(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1$
33. Birinci dörtte bir bölgede, $x = 0$, $y = 0$, $y + 2x = 2$ ile sınırlı kapalı üçgensel plakada $f(x, y) = x^2 + y^2$
34. $0 \le x \le 5$, $-3 \le y \le 3$ dikdörtgensel plakasında, $T(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x$
35. $0 \le x \le 5$, $-3 \le y \le 0$ dikdörtgensel plakasında, $T(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$
36. $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ dikdörtgensel plakasında, $f(x, y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2$
37. $1 \le x \le 3$, $-\pi/4 \le y \le \pi/4$ dikdörtgensel plakasında $f(x, y) = (4x - x^2) \cos y$ (Şekle bakın).



38. Birinci dörtte bir bölgede, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ ile sınırlı kapalı üçgensel plakada $f(x, y) = 4x - 8xy + 2y + 1$
39. $a \le b$ olmak üzere öyle iki a ve b sayısı bulun ki
$$\int_a^b (6 - x - x^2)\, dx$$
en büyük değere sahip olsun.
40. $a \le b$ olmak üzere öyle iki a ve b sayısı bulun ki
$$\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{1/3}\, dx$$
en büyük değere sahip olsun.
41. **Sıcaklıklar** Şekil 14.46'daki düz dairesel plaka $x^2 + y^2 \le 1$ bölgesi şeklindedir. $x^2 + y^2 = 1$ olan sınır da dahil olmak üzere plaka, (x, y) noktasındaki sıcaklık
$$T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$$
olacak şekilde ısıtılıyor. Plaka üzerindeki en sıcak ve en soğuk noktalardaki sıcaklıkları bulun.

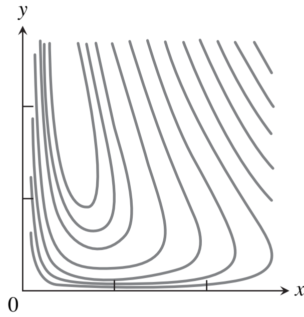


ŞEKİL 14.46 Sabit sıcaklıklı eğrilere izoterm denir. Şekil, *xy*-düzleminde $x^2 + y^2 \leq 1$ dairesi üzerindeki $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ sıcaklık fonksiyonunu göstermektedir. Alıştırma 41 sizden ekstremum sıcaklıkları bulmanızı istemektedir.

42. Açık birinci dörtte bir bölgede ($x > 0, y > 0$)

$$f(x, y) = xy + 2x - \ln x^2 y$$

fonksiyonunun kritik noktasını bulun ve o noktada f'nin bir minimum değerinin var olduğunu gösterin (Şekil 14.47).



ŞEKİL 14.47 $f(x, y) = xy + 2x - \ln x^2 y$ fonksiyonu (burada seçilmiş bazı seviye eğrileri görülmektedir) açık birinci dörtte bir bölge, $x > 0, y > 0$'da bir minimum değer almaktadır (Alıştırma 42).

Teori ve Örnekler

43. Aşağıdaki durumlarda $f(x, y)$'nin maksimum, minimum ve eyer noktalarını bulun.

a. $f_x = 2x - 4y$ ve $f_y = 2y - 4x$

b. $f_x = 2x - 2$ ve $f_y = 2y - 4$

c. $f_x = 9x^2 - 9$ ve $f_y = 2y + 4$

Her durumda mantık yürütmenizi açıklayın.

44. Aşağıdaki fonksiyonların her biri için, $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ diskriminantı orijinde sıfırdır, bu yüzden ikinci türev testi işe yaramaz. $z = f(x, y)$ fonksiyonunun neye benzediğini hayal ederek, fonksiyonun orijinde bir maksimumu mu, minimumu mu olduğunu, veya ikisinin de bulunmadığını belirleyin. Her durumda mantık yürütmenizi açıklayın.

a. $f(x, y) = x^2y^2$ **b.** $f(x, y) = 1 - x^2y^2$

c. $f(x, y) = xy^2$ **d.** $f(x, y) = x^3y^2$

e. $f(x, y) = x^3y^3$ **f.** $f(x, y) = x^4y^4$

45. k sabiti ne olursa olsun, $f(x, y) = x^2 + kxy + y^2$ fonksiyonunun bir kritik noktasının $(0, 0)$ olduğunu gösterin (*İpucu*: İki durum düşünün: $k = 0$ ve $k \neq 0$).

46. İkinci Türev Testi, k sabitinin hangi değerleri için $f(x, y) = x^2 + kxy + y^2$'nin $(0, 0)$'da bir eyer noktasının bulunmasını garantiler? Hangi k değerlerinde İkinci Türev Testi sonuçsuzdur? Yanıtlarınızı açıklayın.

47. $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ ise, f'nin (a, b)'de bir maksimum değerinin veya bir minimum değerinin bulunması gerekirmi? Yanıtınızı açıklayın.

48. f ile birinci ve ikinci mertebe kısmi türevleri, merkezi (a, b)'de olan bir daire üzerinde sürekliyse ve $f_{xx}(a, b)$ ile $f_{yy}(a, b)$'nin işaretleri farklı ise $f(a, b)$ hakkında bir sonuca varabilir misiniz? Yanıtınızı açıklayın.

49. $x + 2y + 3z = 0$ düzleminin üst tarafında ve $z = 10 - x^2 - y^2$ fonksiyonunun grafiği üzerindeki bütün noktalar arasından, düzleme en uzakta olan noktayı bulun.

50. $z = x^2 + y^2 + 10$ fonksiyonunun grafiğinin, $x + 2y - z = 0$ düzlemine en yakın noktasını bulun.

51. $f(x, y) = x + y$ fonksiyonunun, $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ kapalı birinci dörtte bir bölgesinde bir mutlak maksimum değeri yoktur. Bu konu içinde verilen mutlak ekstremumları bulma tartışmasıyla çelişir mi? Yanıtınızı açıklayın.

52. $0 \leq x \leq 1$ ve $0 \leq y \leq 1$ karesi içinde $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy - x - y + 1$ fonksiyonunu ele alın.

a. f'nin bu kare içinde, $2x + 2y = 1$ doğru parçası boyunca bir mutlak minimumu olduğunu gösterin. Mutlak minimum değeri nedir?

b. f'nin kare üzerindeki mutlak maksimum değerini bulun.

Parametrize Eğriler Üzerinde Ekstremum Değerler

Bir $x = x(t)$, $y = y(t)$ eğrisi üzerinde bir $f(x, y)$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulmak için, f'ye t değişkeninin bir fonksiyo-

nu olarak bakar ve df/dt'nin nerede sıfır olduğunu bulmak için Zincir Kuralını kullanırız. Diğer her tek değişkenli durumda olduğu gibi, f'nin ekstremum değerleri

a. kritik noktalardaki (df/dt'nin sıfır olduğu veya bulunmadığı noktalar) değerler ve

b. parametre tanım kümesinin uç noktalarındaki değerler

arasından bulunur. Aşağıdaki fonksiyonların verilen eğriler üzerindeki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulun.

53. Fonksiyonlar:

a. $f(x, y) = x + y$ **b.** $g(x, y) = xy$

c. $h(x, y) = 2x^2 + y^2$

Eğriler:

i. $x^2 + y^2 = 4, \quad y \geq 0$ yarı çemberi

ii. $x^2 + y^2 = 4, \quad x \geq 0, \ y \geq 0$ çeyrek çemberi

$x = 2 \cos t, y = 2 \sin t$ parametrik denklemlerini kullanın.

54. Fonksiyonlar:

a. $f(x, y) = 2x + 3y$ **b.** $g(x, y) = xy$

c. $h(x, y) = x^2 + 3y^2$

Eğriler:

i. $(x^2/9) + (y^2/4) = 1, \quad y \geq 0$ yarı elipsi

ii. $(x^2/9) + (y^2/4) = 1, \quad x \geq 0, y \geq 0$ çeyrek elipsi

$x = 3 \cos t, y = 2 \sin t$ parametrik denklemlerini kullanın.

55. Fonksiyon: $f(x, y) = xy$

Eğriler:

i. $x = 2t, \quad y = t + 1$ doğrusu

ii. $x = 2t, \quad y = t + 1, \quad -1 \leq t \leq 0$ doğru parçası

iii. $x = 2t, \quad y = t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1$ doğru parçası

56. Fonksiyonlar:

a. $f(x, y) = x^2 + y^2$ **b.** $g(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$

Eğriler:

i. $x = t, \quad y = 2 - 2t$ doğrusu

ii. $x = t, \quad y = 2 - 2t, \quad 0 \leq t \leq 1$ doğru parçası.

En Küçük Kareler ve Regresyon Doğruları

Bir $y = mx + b$ doğrusunu bir sayısal veri noktaları kümesi (x_1, y_1), (x_2, y_2), … , (x_n, y_n)'e uydurmayı denediğimizde (Şekil 14.48), genellikle noktalardan doğruya olan dik uzaklıkların karelerinin toplamını minimize eden doğruyu seçeriz. Teorik olarak, bu

$$w = (mx_1 + b - y_1)^2 + \cdots + (mx_n + b - y_n)^2 \qquad (1)$$

fonksiyonunu minimize eden m ve b değerlerini bulmak anlamına gelir. Bunu sağlayan m ve b değerleri Birinci ve İkinci Türev Testleriyle, bütün toplamlar $k = 1$'den $k = n$'ye kadar olmak üzere

$$m = \frac{\left(\sum x_k\right)\left(\sum y_k\right) - n\sum x_k y_k}{\left(\sum x_k\right)^2 - n\sum x_k^2} \qquad (2)$$

$$b = \frac{1}{n}\left(\sum y_k - m\sum x_k\right) \qquad (3)$$

şeklinde bulunur. Çoğu bilimsel hesap makinesinin içinde, verileri girdikten sonra m ve b'yi sadece birkaç tuşa basarak bulmanızı sağlayacak şekilde bu fonksiyonlar bulunur.

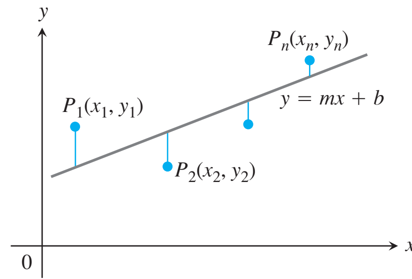
Bu m ve b değerleriyle belirlenen $y = mx + b$ doğrusuna, üzerinde çalışılan verilerin **en küçük kareler doğrusu**, **regresyon doğrusu** veya **eğilim doğrusu** denir. Bir en küçük kareler doğrusu bulmak

1. veriyi basit bir ifadeyle özetlemenizi,

2. deneysel olarak denenmemiş başka x'ler için y değerlerini tahmin etmenizi,

3. verileri analitik olarak incelemenizi

sağlar.



ŞEKİL 14.48 Doğrusal olmayan noktalara bir doğru uydurmak için sapmaların kareleri toplamını minimize eden doğruyu seçeriz.

ÖRNEK (0, 1),(1, 3), (2, 2), (3, 4), (4, 5) noktalarının en küçük kareler doğrusunu bulun.

Çözüm Hesaplamaları bir tabloda özetleriz:

k	x_k	y_k	x_k^2	$x_k y_k$
1	0	1	0	0
2	1	3	1	3
3	2	2	4	4
4	3	4	9	12
5	4	5	16	20
Σ	10	15	30	39

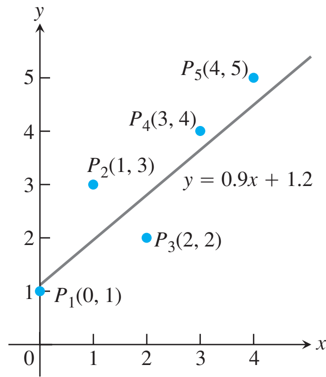
Sonra,

$$m = \frac{(10)(15) - 5(39)}{(10)^2 - 5(30)} = 0.9$$ $n = 5$ ve tablodaki verilerle (2) Denklemi

bulur ve m değerini kullanarak

$$b = \frac{1}{5}\left(15 - (0.9)(10)\right) = 1.2$$ $n = 5, m = 0.9$ ile (3) Denklemi

buluruz. En küçük kareler doğrusu $y = 0.9x + 1.2$'dir (Şekil 14.49). ■



ŞEKİL 14.49 Örnekteki veri kümesinin en küçük kareler doğrusu.

57–60 alıştırmalarında, (2) ve (3) denklemlerini kullanarak, her veri noktaları kümesi için en küçük kareler doğrusunu bulun. Sonra elde ettiğiniz lineer denklemi kullanarak $x = 4$'e karşılık gelen y değerini tahmin edin.

57. $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(3, -4)$ **58.** $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 3)$

59. $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ **60.** $(0, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$

T **61.** Tablo 14.1'deki verilere (California Üniversitesi Deney İstasyonu, *Bulletin*, No. 450, sayfa 8'den alınmıştır) bir en küçük kareler doğrusu uydurarak, sulamanın yonca üretimi üzerindeki etkisi için bir lineer denklem yazın. Verileri işaretleyin ve doğruyu çizin.

TABLO 14.1 Yonca Üretimi

x (uygulanan toplam mevsimlik su derinliği, inç.)	*y* (ortalama yonca , üretimi, ton/ar)
12	5.27
18	5.68
24	6.25
30	7.21
36	8.20
42	8.71

T **62. Mars'ın kraterleri** Bir krater oluşumu teorisi, büyük kraterlerin sıklığının, çaplarının kareleriyle seyrelmesi gerektiğini söyler (Marcus, Science, June 21, 1968, sayfa 1334). *Mariner IV*'ten gelen resimler Tablo 14.2'de sıralanan verileri göstermektedir. Verilere $F = m(1/D^2) + b$ şeklinde bir doğru uydurun. Verileri işaretleyin ve doğruyu çizin.

TABLO 14.2 Mars'taki krater büyüklükleri

km olarak çap, D	$1/D^2$ (sınıf aralığının sol değeri için)	Frekans, F
32–45	0.001	51
45–64	0.0005	22
64–90	0.00024	14
90–128	0.000123	4

T **63. Köchel sayıları** 1862'de Alman müzikoloğu Ludwig von Köchel, Wolfgang Amadeus Mozart'ın müzik eserlerinin kronolojik bir listesini yapmıştır. Bu liste, Mozart'ın eserlerinin başlıklarını izleyen (örneğin, Mi-minör Senfoni Konçertosu, K.364) Köchel sayıları veya "K sayıları"nın kaynağıdır. Tablo 14.3 Mozart'ın on eserinin Köchel sayılarını ve bestelenme tarihlerini (y) vermektedir.

a. y'nin K'nin lineer bir fonksiyonu olmaya çok yakın olduğunu göstermek için y-K grafiğini çizin.

b. Veriler için bir $y = mK + b$ en küçük kareler doğrusu bulun ve bunu (a)'daki çiziminize ekleyin.

c. K.364, 1779'da bestelenmiştir. En küçük kareler doğrusu hangi tarihi öngörmektedir?

TABLO 14.3 Mozart'ın besteleri

Köchel sayısı, K	Bestelendiği yıl, y
1	1761
75	1771
155	1772
219	1775
271	1777
351	1780
425	1783
503	1786
575	1789
626	1791

T **64. Denizaltı batmaları** Tablo 14.4'teki veriler İkinci Dünya Savaşı'nda birbirini izleyen 16 ay boyunca Amerikan Donanması'nın batırdığı Alman denizaltıları üzerine tarihsel bir araştırmanın sonuçlarını göstermektedir. Her ay için verilen veriler bildirilen batmalar ve gerçek batmaların sayısıdır. Batırılan denizaltıların sayısı Donanma'nın bildirdiklerinden biraz daha fazlaydı. Bildirilen batma sayılarından gerçek sayıları bulmak için bir en küçük kareler doğrusu bulun.

TABLO 14.4 II. Dünya Savaşında 16 ay boyunca Amerikan Donanması'nın batırdığı Alman Denizaltıları

Ay	Amerika tahmini (bildirilen batma) x	Gerçek sayı y
1	3	3
2	2	2
3	4	6
4	2	3
5	5	4
6	5	3
7	9	11
8	12	9
9	8	10
10	13	16
11	14	13
12	3	5
13	4	6
14	13	19
15	10	15
16	16	15
	123	140

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Kritik Noktalardaki Yerel Ekstremumları Araştırmak

65–70 alıştırmalarında, yerel ekstremumları tanımlamak için fonksiyonları inceleyeceksiniz. Aşağıdaki adımları gerçekleştirmek için bir BCS kullanın.

a. Fonksiyonu verilen dikdörtgende çizin.

b. Dikdörtgende bazı seviye eğrilerini çizin.

c. Fonksiyonun birinci mertebe kısmi türevlerini hesaplayın ve BCS denklem çözücüyü kullanarak kritik noktaları bulun. Kritik noktalarla (b)'de çizilen seviye eğrileri arasındaki ilişki nedir? Hangi kritik noktalar, varsa, bir eyer noktası verir gibidir? Yanıtınızı açıklayın.

d. Fonksiyonun ikinci kısmi türevlerini hesaplayın ve $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ diskriminantını bulun.

e. Maks-min testlerini kullanarak, (c)'de bulduğunuz kritik noktaları sınıflandırın. Bulduklarınız (c)'de söylenenlerle uyumlu mu?

65. $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3xy, \quad -5 \le x \le 5, \quad -5 \le y \le 5$

66. $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^2, \quad -2 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le 2$

67. $f(x, y) = x^4 + y^2 - 8x^2 - 6y + 16, \quad -3 \le x \le 3,$
$-6 \le y \le 6$

68. $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 3, \quad -3/2 \le x \le 3/2,$
$-3/2 \le y \le 3/2$

69. $f(x, y) = 5x^6 + 18x^5 - 30x^4 + 30xy^2 - 120x^3,$
$-4 \le x \le 3, \quad -2 \le y \le 2$

70. $f(x, y) = \begin{cases} x^5 \ln (x^2 + y^2), & (x, y) \ne (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$
$-2 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le 2$

14.8 Lagrange Çarpanları

Bazen tanım kümesi, düzlemin belirli bir alt kümesine — örneğin, bir daireye, kapalı üçgensel bir bölgeye veya bir eğri üzerine — kısıtlanmış bir fonksiyonun ekstremum değerlerini bulmamız gerekebilir. Bu bölümde, kısıtlanmış fonksiyonların ekstremum değerlerini bulmak için güçlü bir yöntem araştıracağız: *Lagrange çarpanları* yöntemi.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Joseph Louis Lagrange
(1736–1813)

Kısıtlanmış Maksimum ve Minimumlar

ÖRNEK 1 Bir Kısıtlama İle Minimum Bulmak

$2x + y - z - 5 = 0$ düzlemi üzerinde, orijine en yakın olan $P(x, y, z)$ noktasını bulun.

Çözüm Problem bizden,

$$2x + y - z - 5 = 0$$

kısıtlaması ile

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}| &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

fonksiyonunun minimum değerini istemektedir.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

fonksiyonunun bir minimum değerinin bulunduğu her noktada, $|\overrightarrow{OP}|$'nin de bir minimum değeri bulunacağından, problemi, $2x + y - z - 5 = 0$ kısıtlaması ile $f(x, y, z)$' nin minimum değerini bularak çözebiliriz. x ve y'ye bu denklemdeki bağımsız değişkenler gibi bakar ve z'yi

$$z = 2x + y - 5$$

olarak yazarsak, problemimiz

$$h(x, y) = f(x, y, 2x + y - 5) = x^2 + y^2 + (2x + y - 5)^2$$

fonksiyonunun minimum değer veya değerlerini bulma problemine indirgenir. h'nin tanım kümesi bütün xy-düzlemi olduğundan, Bölüm 14.7'deki Birinci Türev Testi h'nin minimumların

$$h_x = 2x + 2(2x + y - 5)(2) = 0, \qquad h_y = 2y + 2(2x + y - 5)(2) = 0$$

denklemlerini sağlayan noktalarda görülebileceğini söyler. Bu,

$$10x + 4y = 20, \qquad 4x + 4y = 10$$

denklemlerini ve

$$x = \frac{5}{3}, \qquad y = \frac{5}{6}$$

çözümünü verir. Bu değerlerin h'yi minimize ettiğini göstermek için, İkinci Türev Testiyle beraber geometrik bir yorum kullanabiliriz. $z = 2x + y - 5$ düzlemi üzerinde buna karşılık gelen noktanın z-koordinatı

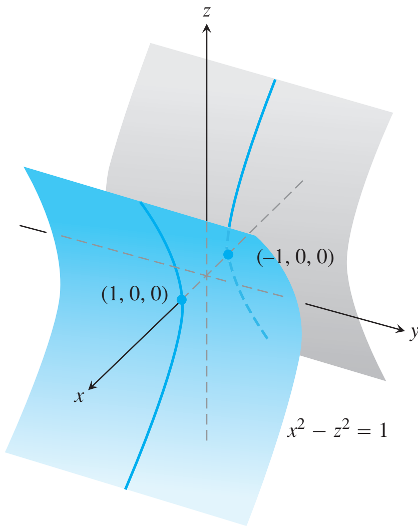
$$z = 2\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{5}{6} - 5 = -\frac{5}{6}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla aradığımız nokta

$$\text{En yakın nokta:} \qquad P\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}\right)$$

noktasıdır. P'den orijine olan uzaklık $5/\sqrt{6} \approx 2.04$ 'tür. ■

Değişken değişimi olarak adlandırabileceğimiz, Örnek 1'deki yöntemle kısıtlanmış bir minimum veya maksimum problemini çözme çabaları her zaman işe yaramaz. Bu bölümdeki yeni yöntemi öğrenmenin nedenlerinden biri budur.



ŞEKİL 14.50 Örnek 2'deki $x^2 - z^2 - 1 = 0$ hiperbolik silindiri.

ÖRNEK 2 Bir Kısıtlama İle Minimum Bulmak

$x^2 - z^2 - 1 = 0$ hiperbolik silindiri üzerinde orijine en yakın olan noktayı bulun.

Çözüm 1 Silindir Şekil 14.50'de görülmektedir. Silindir üzerinde orijine en yakın olan noktaları arayacağız. Bunlar koordinatları, $x^2 - z^2 - 1 = 0$ kısıtlaması ile

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{Uzaklığın karesi}$$

fonksiyonunun değerini minimize eden noktalardır. x ve y'ye kısıtlama denklemindeki bağımsız değişkenler olarak bakarsak,

$$z^2 = x^2 - 1$$

olur ve silindirin üzerinde $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$'nin değerleri

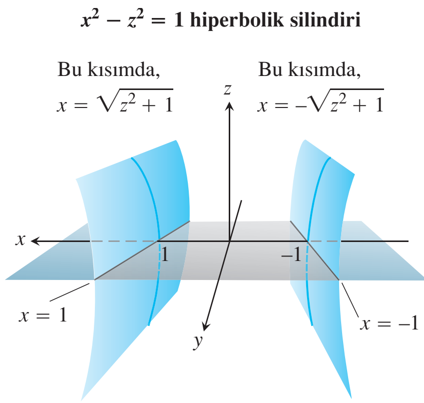
$$h(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 - 1) = 2x^2 + y^2 - 1$$

fonksiyonuyla verilir. Silindir üzerinde koordinatları f'yi minimize eden noktaları bulmak için, xy-düzleminde koordinatları h'yi minimize eden noktaları ararız. h'nin tek ekstremum değeri

$$h_x = 4x = 0 \qquad \text{ve} \qquad h_y = 2y = 0$$

denklemlerini sağlayan noktada, yani (0, 0) noktasındadır. Fakat, silindirin üzerinde hem x hem de y'nin sıfır olduğu bir nokta yoktur. Yanlış giden nedir?

Olan şey, birinci türev testinin (olması gerektiği gibi) *h'nin tanım kümesinde h*'nin bir minimum değerinin olduğu noktayı bulmasıdır. Öte yandan, biz *silindir üzerinde h*'nin bir minimum değerinin bulunduğu noktaları arıyoruz. h'nin tanım kümesi bütün xy-düzlemiyken, silindir üzerindeki (x, y, z) noktalarının ilk iki koordinatını seçebileceğimiz tanım kümesi xy-düzleminde silindirin "gölgesi" ile sınırlıdır; $x = -1$ ile $x = 1$ doğruları arasındaki bandı içermez (Şekil 14.51).



ŞEKİL 14.51 xy-düzleminde, $x^2 - z^2 = 1$ hiperbolik silindirinin üzerindeki (x, y, z) noktasının ilk iki koordinatının seçildiği bölge xy-düzlemindeki $-1 < x < 1$ bandını dışlar (Örnek 2).

y ve z'yi (x ve y yerine) bağımsız değişkenler olarak alır ve x'i y ve z cinsinden

$$x^2 = z^2 + 1$$

olarak ifade edersek, bu sorundan kurtulabiliriz. Bu değişken dönüşümüyle, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ fonksiyonu

$$k(y, z) = (z^2 + 1) + y^2 + z^2 = 1 + y^2 + 2z^2$$

haline gelir ve biz k'nin en küçük değerini aldığı noktaları ararız. k'nin yz-düzlemindeki tanım kümesi artık silindir üzerinde (x, y, z) noktalarının y ve z koordinatlarını seçeceğimiz tanım kümesiyle çakışmaktadır. Yani, düzlemde k'yi minimize eden noktalara silindir üzerinde karşılık gelen noktalar vardır. k'nin en küçük değeri

$$k_y = 2y = 0 \qquad \text{ve} \qquad k_z = 4z = 0$$

veya $y = z = 0$ olan yerde bulunur. Bu

$$x^2 = z^2 + 1 = 1, \qquad x = \pm 1$$

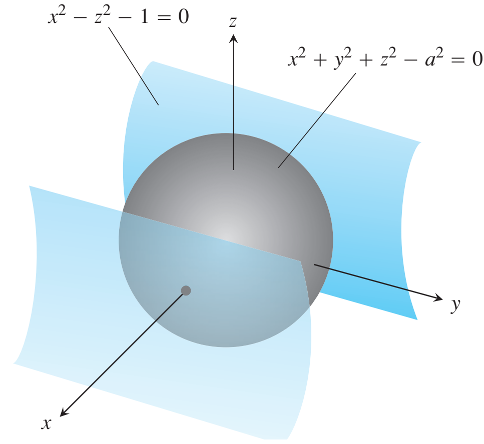
verir. Bu noktaya silindir üzerinde karşılık gelen noktalar $(\pm 1, 0, 0)$'dır.

$$k(y, z) = 1 + y^2 + 2z^2 \geq 1$$

eşitsizliğinden $(\pm 1, 0, 0)$ noktalarının k'nin bir minimum değerini verdiğini görürüz. Ayrıca orijinden silindir üzerindeki bir noktaya minimum uzaklığın 1 birim olduğunu da görürüz.

Çözüm 2 Silindir üzerinde orijine en yakın noktaları bulmanın başka bir yolu, silindire dokununcaya kadar bir sabun köpüğü gibi genişleyen ve merkezi orijinde olan bir küre hayal etmektir (Şekil 14.52). Her dokunma noktasında, silindir ve kürenin teğet düzlemi ve normali aynıdır. Dolayısıyla, küre ve silindir,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 \qquad \text{ve} \qquad g(x, y, z) = x^2 - z^2 - 1$$



ŞEKİL 14.52 Merkezi orijinde olan ve $x^2 - z^2 - 1 = 0$ hiperbolik silindirine dokunana kadar bir sabun küpüğü gibi genleşen bir küre. Örnek 2'nin ikinci çözümüne bakın.

fonksiyonlarının 0'a eşitlenmesiyle elde edilen seviye yüzeyleri olarak ifade edilirlerse, ∇f ve ∇g gradiyentleri yüzeylerin dokundukları yerlerde paralel olacaklardır. Bu yüzden, herhangi bir dokunma noktasında

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

veya

$$2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = \lambda(2x\mathbf{i} - 2z\mathbf{k})$$

olacak şekilde bir λ skaleri bulabilmemiz gerekir. Yani, herhangi bir teğetlik noktasının x, y ve z koordinatları

$$2x = 2\lambda x, \quad 2y = 0, \quad 2z = -2\lambda z$$

skaler denklemlerini sağlamak zorundadır.

Hangi λ değerleri için, koordinatları bu skaler denklemleri sağlayan bir (x, y, z) noktası aynı zamanda $x^2 - z^2 - 1 = 0$ yüzeyi üzerinde bulunur? Bu soruya yanıt vermek için, yüzey üzerinde x-koordinatı sıfır olan bir nokta bulunmadığı bilgimizi kullanarak $x \neq 0$ olduğu sonucuna varırız. Böylece, ancak

$$2 = 2\lambda \quad \text{veya} \quad \lambda = 1$$

ise, $2x = 2\lambda x$ olacağı anlamına gelir. $\lambda = 1$ için, $2z = -2\lambda z$, $2z = -2z$ olur. Bu denklem de sağlanacaksa, z sıfır olmalıdır. $y = 0$ olduğu için ($2y = 0$ denkleminden),

$$(x, 0, 0)$$

şeklinde koordinatları olan noktalar aradığımız sonucuna varırız. $x^2 - z^2 = 1$ yüzeyinde hangi noktaların koordinatları bu şekildedir?

$$x^2 - (0)^2 = 1, \qquad x^2 = 1 \qquad \text{veya} \qquad x = \pm 1$$

olan noktalar. Silindir üzerinde orijine en yakın olan noktalar $(\pm 1, 0, 0)$ noktalarıdır. ■

Lagrange Çarpanları Yöntemi

Örnek 2'nin ikinci çözümünde, problemi **Lagrange çarpanları yöntemi** ile çözdük. Genel olarak yöntem, değişkenleri $g(x, y, z) = 0$ kısıtlamasına maruz bir $f(x, y, z)$ fonksiyonunun ekstremum değerlerinin, $g = 0$ yüzeyi üzerinde, bir λ skaleri (**Lagrange çarpanı** olarak adlandırılır) için

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

denklemini sağlayan noktalarda bulunacağını söyler.

Yöntemi daha fazla incelemek ve neden işe yaradığını anlamak için, ilk önce, bir teorem olarak ifade ettiğimiz, aşağıdaki gözlemi yaparız.

TEOREM 12 Ortogonal Gradiyent Teoremi

$f(x, y, z)$'nin, düzgün bir

$$C: \quad \mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$$

eğrisini içeren bir bölgede diferansiyellenebilir olduğunu varsayın. f'nin C üzerinde, C'deki değerlerine göre bir yerel minimumu veya maksimumunun bulunduğu nokta P_0 ise ∇f, P_0'da C'ye ortogonaldir.

İspat ∇f'nin P_0'da eğrinin hız vektörüne ortogonal olduğunu göstereceğiz. f'nin C'deki değerleri $f(g(t), h(t), k(t))$ bileşkesiyle verilir ve bu bileşkenin t'ye göre türevi

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dk}{dt} = \nabla f \cdot \mathbf{v}$$

şeklinde elde edilir. f'nin eğri üzerindeki değerlerine göre bir yerel maksimum veya minimumunun bulunduğu noktalarda, $df/dt = 0$'dır, dolayısıyla

$$\nabla f \cdot \mathbf{v} = 0$$ ■

olur.

Teorem 12'deki z'li terimleri atarsak, iki değişkenli fonksiyonlar için de benzer bir sonuç elde edilir.

TEOREM 12'NIN SONUCU

Diferansiyellenebilir bir $f(x, y)$ fonksiyonunun düzgün bir $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j}$ eğrisi üzerinde, eğri üzerindeki değerlerine göre, yerel maksimum ve minimumlarının bulunduğu noktalarında, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ olmak üzere $\nabla f \cdot \mathbf{v} = 0$ olur.

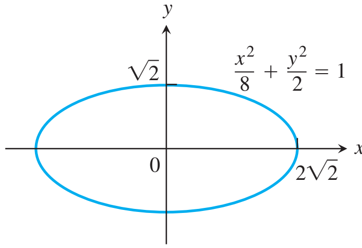
Teorem 12, Lagrange çarpanları yönteminin anahtarıdır. $f(x, y, z)$ ile $g(x, y, z)$'nin diferansiyellenebilir olduğunu ve P_0'ın $g(x, y, z) = 0$ yüzeyi üzerinde, f'nin yüzey üzerindeki değerlerine göre bir yerel minimum veya maksimum değerinin bulunduğu bir nokta olduğunu varsayın. Bu durumda, f'nin $g(x, y, z) = 0$ yüzeyi üzerinde P_0'dan geçen her düzgün eğri üzerindeki değerlerine göre bir yerel minimum veya maksimum değeri olacaktır. Dolayısıyla, ∇f, P_0'dan geçen bu çeşit her düzgün eğrinin hız vektörüne ortogonaldir. Ama ∇g de öyledir (Bölüm 14.5'te gördüğümüz gibi, ∇g, $g = 0$ seviye yüzeyine ortogonal olduğu için). Bu nedenle, P_0'da, ∇f, ∇g'nin skaler bir λ katıdır.

Lagrange Çarpanları Yöntemi

$f(x, y, z)$ ve $g(x, y, z)$'nin diferansiyellenebilir olduklarını ve $g(x, y, z) = 0$ iken $\nabla g \neq 0$ olduğunu varsayın. $g(x, y, z) = 0$ kısıtlamasına maruz olan f'nin maksimum ve minimum değerlerini bulmak için,

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{ve} \quad g(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

denklemlerini aynı anda sağlayan x, y, z ve λ değerlerini bulun. İki değişkenli fonksiyonlar için, z değişkeni dışında koşullar benzerdir.



ŞEKİL 14.53 Örnek 3 bu elips üzerinde xy çarpımının en büyük ve en küçük değerlerinin nasıl bulunacağını gösterir.

ÖRNEK 3 Lagrange Çarpanları Yöntemini Kullanmak

$$f(x, y) = xy$$

fonksiyonunun

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

elipsi üzerindeki en büyük ve en küçük değerlerini bulun (Şekil 14.53).

Çözüm

$$g(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$$

kısıtlamasına maruz olan $f(x, y) = xy$'nin ekstremum değerlerini istiyoruz. Bunu yapmak için, önce

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{ve} \quad g(x, y) = 0$$

denklemlerini sağlayan x, y ve λ değerlerini buluruz. (1) Denklemlerindeki gradiyent denklemi

$$y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \frac{\lambda}{4}x\mathbf{i} + \lambda y\mathbf{j}$$

verir ve buradan

$$y = \frac{\lambda}{4}x, \qquad x = \lambda y, \qquad \text{ve} \qquad y = \frac{\lambda}{4}(\lambda y) = \frac{\lambda^2}{4}y$$

buluruz. Bu da $y = 0$ veya $\lambda = \pm 2$ verir. Şimdi bu iki duruma bakalım.

Durum 1: $y = 0$ ise, $x = y = 0$ olur. Fakat (0, 0) elips üzerinde değildir. Dolayısıyla, $y \neq 0$'dır.

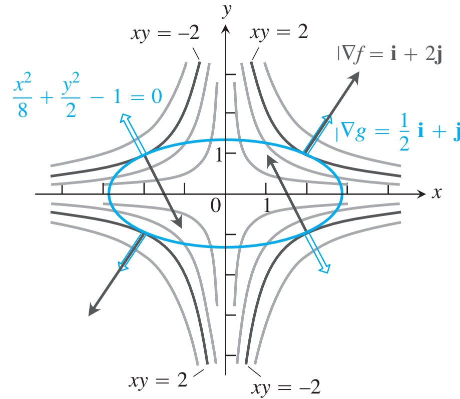
Durum 2: $y \neq 0$ ise, $\lambda = \pm 2$ ve $x = \pm 2y$'dir. Bunu $g(x, y) = 0$ denkleminde yerine koymak

$$\frac{(\pm 2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1, \qquad 4y^2 + 4y^2 = 8 \qquad \text{ve} \qquad y = \pm 1$$

verir. Bu yüzden, $f(x, y) = xy$ fonksiyonu elips üzerinde dört noktada, $(\pm 2, 1)$ ve $(\pm 2, -1)$ noktalarında ekstremum değerler alır. Ekstremum değerler $xy = 2$ ve $xy = -2$'dir.

Çözümün Geometrisi

$f(x, y)$ fonksiyonunun seviye eğrileri $xy = c$ hiperbolleridir (Şekil 14.54). Hiperboller ori-



ŞEKİL 14.54 $f(x, y) = xy$ fonksiyonu, $g(x, y) = x^2/8 + y^2/2 - 1 = 0$ kısıtlamasına maruz kaldığında, dört noktada, $(\pm 2, \pm 1)$'de ekstremum değerler alır. Bunlar, elips üzerinde ∇f (kırmızı) ∇g'nin (mavi) skaler bir katı olduğu noktalardır (Örnek 3).

jinden ne kadar uzakta ise, f'nin mutlak değeri o kadar büyük olur. (x, y) noktası $x^2 + 4y^2 = 8$ elipsi üzerinde iken, f'nin ekstremum değerlerini bulmak istiyoruz. Elipsi kesen hiperbollerden hangisi orijinden en uzaktadır? Elipsi sıyıran hiperboller, bunlar yalnızca elipse teğet hiperbollerdir. Bu noktalarda, hiperbole normal olan herhangi bir vektör elipse de normaldir, dolayısıyla $\nabla f = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ gradiyenti $\nabla g = (x/4)\mathbf{i} + y\mathbf{j}$'nin bir katıdır ($\lambda = \pm 2$). Örneğin (2, 1) noktasında

$$\nabla f = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \qquad \nabla g = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}, \qquad \text{ve} \qquad \nabla f = 2\nabla g$$

olur. (–2, 1) noktasında ise,

$$\nabla f = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}, \qquad \nabla g = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}, \qquad \text{ve} \qquad \nabla f = -2\nabla g$$ ■

bulunur.

ÖRNEK 4 Bir Çember Üzerinde Ekstremum Değerler Bulmak

$f(x, y) = 3x + 4y$ fonksiyonunun $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindeki maksimum ve minimum değerlerini bulun.

Çözüm Bunu

$$f(x, y) = 3x + 4y, \qquad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

ile bir Lagrange çarpanı problemi olarak modeller ve

$$\nabla f = \lambda \nabla g: \quad 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} = 2x\lambda\mathbf{i} + 2y\lambda\mathbf{j}$$

$$g(x, y) = 0: \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

denklemlerini sağlayan x, y ve λ değerlerini ararız. (1) Denklemlerindeki gradiyent denklemi $\lambda \neq 0$ olduğunu belirtir ve

$$x = \frac{3}{2\lambda}, \qquad y = \frac{2}{\lambda}$$

denklemlerini verir. Bu denklemler bize, başka şeylerin yanısıra, x ve y'nin işaretlerinin aynı olduğunu söyler. Bu x ve y değerleri ile, $g(x, y) = 0$ denklemi

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0$$

verir, böylece

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1, \qquad 9 + 16 = 4\lambda^2, \qquad 4\lambda^2 = 25, \qquad \text{ve} \qquad \lambda = \pm\frac{5}{2}$$

bulunur. Yani,

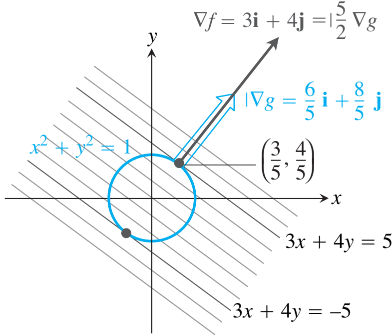
$$x = \frac{3}{2\lambda} = \pm\frac{3}{5}, \qquad y = \frac{2}{\lambda} = \pm\frac{4}{5}$$

olur ve $f(x, y) = 3x + 4y$'nin ekstremum değerleri $(x, y) = \pm(3/5, 4/5)$'tedir.

$3x + 4y$'nin değerlerini $\pm(3/5, 4/5)$'te hesaplayarak, fonksiyonun $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindeki maskimum ve minimum değerlerinin

$$3\left(\frac{3}{5}\right) + 4\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{25}{5} = 5 \qquad \text{ve} \qquad 3\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{25}{5} = -5$$

olduğunu görürüz.



ŞEKİL 14.55 $f(x, y) = 3x + 4y$ fonksiyonu $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ birim çemberi üzerinde en büyük değerini $(3/5, 4/5)$ noktasında ve en küçük değerini $(-3/5, -4/5)$ noktasında alır (Örnek 4). Bu noktalardan her birinde, ∇f, ∇g'nin bir skaler katıdır. Şekil ilk noktadaki gradiyentleri gösterir, ama ikincidekileri göstermez.

Çözümün geometrisi

$f(x, y) = 3x + 4y$'nin seviye eğrileri $3x + 4y = c$ doğrularıdır (Şekil 14.55). Doğrular orijinden ne kadar uzaksa, f'nin mutlak değeri o kadar büyüktür. (x, y) noktası $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerinde iken, f'nin ekstremum değerlerini bulmak istiyoruz. Çemberi kesen doğrulardan hangisi orijinden en uzaktadır? Çembere teğet olan doğrular. Teğetlik noktalarında doğruya normal olan bir vektör çembere de normaldir, böylece $\nabla f = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ gradiyenti $\nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ gradiyentinin bir katıdır ($\lambda = \pm(5/2)$). Örneğin, $(3/5, 4/5)$ noktasında şunu buluruz:

$$\nabla f = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \qquad \nabla g = \frac{6}{5}\mathbf{i} + \frac{8}{5}\mathbf{j}, \qquad \text{ve} \qquad \nabla f = \frac{5}{2}\nabla g.$$ ■

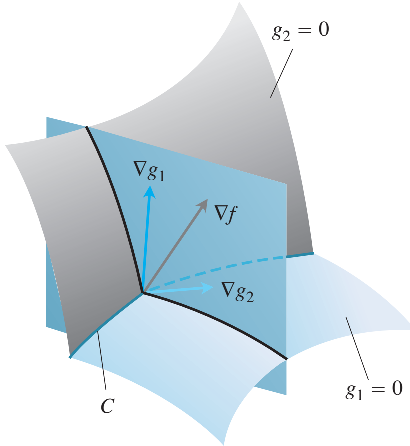
İki Kısıtlamayla Lagrange Çarpanları

Çoğu problem değişkenleri iki kısıtlamaya maruz kalan diferansiyellenebilir bir $f(x, y, z)$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulmamızı gerektirir. Kısıtlamalar

$$g_1(x, y, z) = 0 \qquad \text{ve} \qquad g_2(x, y, z) = 0$$

ise ve g_1 ile g_2, ∇g_1 ∇g_2'ye paralel olmamak üzere, diferansiyellenebilir ise, f'nin kısıtlanmış yerel maksimum ve minimumlarını iki Lagrange çarpanı, λ ve μ (mü olarak okunur) belirleyerek buluruz. Yani, f'nin kısıtlanmış ekstremum değerlerini aldığı $P(x, y, z)$ noktalarını

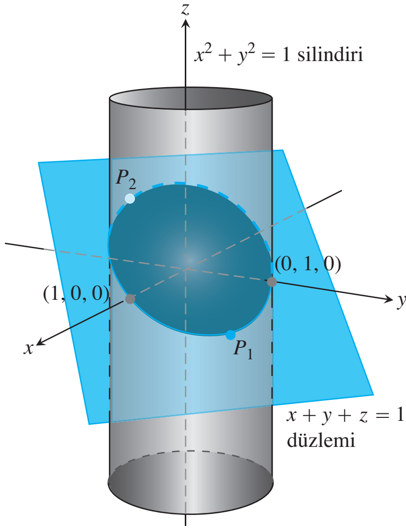
$$\nabla f = \lambda\nabla g_1 + \mu\nabla g_2, \qquad g_1(x, y, z) = 0, \qquad g_2(x, y, z) = 0 \qquad (2)$$



ŞEKİL 14.56 ∇g_1 ve ∇g_2 vektörleri C eğrisine dik bir düzlemde bulunurlar, çünkü ∇g_1, $g_1 = 0$ yüzeyine normaldir ve ∇g_2, $g_2 = 0$ yüzeyine normaldir.

denklemlerini sağlayan x, y, z, λ ve μ değerlerini bularak belirleriz. (2) Denklemlerinin hoş bir geometrik yorumu vardır. $g_1 = 0$ ve $g_2 = 0$ yüzeyleri (genellikle) düzgün bir eğri, mesela C'de kesişirler (Şekil 14.56). Bu eğri boyunca f'nin bu eğri üzerindeki değerlerine

göre yerel minimum ve maksimumlarının bulunduğu noktaları ararız. Bunlar, Teorem 12'de gördüğümüz gibi, ∇f'nin C'ye normal olduğu noktalardır. Fakat bu noktalarda ∇g_1 ve ∇g_2 de C'ye normaldir, çünkü C, $g_1 = 0$ ve $g_2 = 0$ yüzeyleri üzerindedir. Dolayısıyla, ∇f, ∇g_1 ve ∇g_2 ile belirlenen düzlem üzerindedir; bu da belirli λ ve μ değerleri için $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$ olduğu anlamına gelir. Aradığımız noktalar iki yüzeyin de üzerinde oldukları için, koordinatları, (2)'deki diğer denklemler olan $g_1(x, y, z) = 0$ ve $g_2(x, y, z) = 0$ denklemlerini sağlamalıdır.



ŞEKİL 14.57 Düzlemin ve silindirin kesiştikleri elips üzerinde, hangi noktalar orijine en yakın ve en uzaktır? (Örnek 5)

ÖRNEK 5 Bir Elips Üzerinde Uzaklıkların Maksimumunu Bulmak

$x + y + z = 1$ düzlemi $x^2 + y^2 = 1$ silindirini bir elips boyunca keser (Şekil 14.57). Elips üzerinde orijine en yakın ve en uzak noktaları bulun.

Çözüm

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

kısıtlamalarına maruz olan

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{3}$$

$$g_2(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0 \tag{4}$$

fonksiyonunun ((x, y, z)'den orijine olan uzaklığın karesi) ekstremum değerlerini bulacağız. (2) Denklemlerindeki gradiyent denklemi

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$$

$$2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = \lambda(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}) + \mu(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = (2\lambda x + \mu)\mathbf{i} + (2\lambda y + \mu)\mathbf{j} + \mu\mathbf{k}$$

veya

$$2x = 2\lambda x + \mu, \quad 2y = 2\lambda y + \mu, \quad 2z = \mu \tag{5}$$

verir.

(5)'teki skaler denklemler

$$\begin{aligned} 2x = 2\lambda x + 2z &\Rightarrow (1 - \lambda)x = z \\ 2y = 2\lambda y + 2z &\Rightarrow (1 - \lambda)y = z \end{aligned} \tag{6}$$

verir. $\lambda = 1$ ve $z = 0$ ise, veya $\lambda \neq 1$ ve $x = y = z/(1 - \lambda)$ ise, (6) denklemleri aynı anda sağlanır.

$z = 0$ ise, elips üzerindeki noktaları bulmak için (3) ve (4) denklemlerini birlikte çözmek (1, 0, 0) ve (0, 1, 0) noktalarını verir. Şekil 14.57'ya bakarsanız bu anlamlıdır.

$x = y$ ise, (3) ve (4) denklemleri

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 - 1 &= 0 & \qquad x + x + z - 1 &= 0 \\ 2x^2 &= 1 & z &= 1 - 2x \\ x &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2} & z &= 1 \mp \sqrt{2} \end{aligned}$$

verir. Elips üzerinde bunlara karşılık gelen noktalar

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2}\right) \quad \text{ve} \quad P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$$

noktalarıdır. Ancak burada dikkatli olmamız gerekir. P_1 ve P_2'nin ikisi de f'nin elips üzerindeki ekstrem değerlerini verirlerken, P_2 orijine P_1'den daha uzaktır.

Elips üzerinde orijine en yakın noktalar (1, 0, 0) ve (0, 1, 0) noktalarıdır. Elips üzerinde orijinden en uzak nokta P_2 noktasıdır. ■

ALIŞTIRMALAR 14.8

Tek Kısıtlamayla İki Bağımsız Değişken

1. **Bir elips üzerinde ekstremumlar** $x^2 + 2y^2 = 1$ elipsi üzerinde $f(x, y) = xy$'nin ekstremum değerlerinin bulunduğu noktaları bulun.
2. **Bir çember üzerinde ekstremumlar** $f(x, y) = xy$'nin $g(x, y) = x^2 + y^2 - 10 = 0$ kısıtlaması altındaki ekstremum değerlerini bulun.
3. **Bir doğru üzerinde maksimum** $x + 3y = 10$ doğrusu üzerinde $f(x, y) = 49 - x^2 - y^2$'nin maksimum değerini bulun.
4. **Bir doğru üzerinde ekstremumlar** $x + y = 3$ doğrusu üzerinde $f(x, y) = x^2y$'nin yerel ekstremum değerlerini bulun.
5. **Kısıtlanmış minimum** $xy^2 = 54$ eğrisi üzerinde orijine en yakın noktaları bulun.
6. **Kısıtlanmış minimum** $x^2y = 2$ eğrisi üzerinde orijine en yakın noktaları bulun.
7. Lagrange çarpanları yöntemini kullanarak aşağıdakileri bulun:

   a. Bir hiperbol üzerinde minimum $xy = 16$, $x > 0$, $y > 0$ kısıtlamaları altında $x + y$'nin minimum değeri;

   b. Bir doğru üzerinde maksimum $x + y = 16$ kısıtlaması altında xy'nin maksimum değeri.

   Her çözümün geometrisini yorumlayın.
8. **Bir eğri üzerinde ekstremumlar** xy-düzleminde $x^2 + xy + y^2 = 1$ eğrisinin orijine en yakın ve en uzak noktalarını bulun.
9. **Sabit hacim ile minimum yüzey alanı** Hacmi 16π cm^3 olan en küçük yüzey alanlı kapalı silindirin boyutlarını bulun.
10. **Bir küre içinde bir silindir** a yarıçaplı bir kürenin içine yerleştirilebilecek en büyük yüzey alanlı açık silindirin yarıçap ve yüksekliğini bulun. En büyük yüzey alanı nedir?
11. **Bir elips içinde en büyük alanlı dikdörtgen** Lagrange çarpanları yöntemini kullanarak, kenarları koordinat eksenlerine paralel olan ve $x^2/16 + y^2/9 = 1$ elipsinin içine yerleştirilebilecek en büyük alanlı dikdörtgenin boyutlarını bulun.
12. **Bir elips içinde en büyük çevreli dikdörtgen** Kenarları koordinat eksenlerine paralel olan ve $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ elipsinin içine yerleştirilebilecek en büyük çevreli dikdörtgenin boyutlarını bulun. En büyük çevre nedir?
13. **Bir çember üzerinde ekstremumlar** $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$ kısıtlaması altında, $x^2 + y^2$'nin maksimum ve minimum değerlerini bulun.
14. **Bir çember üzerinde ekstremumlar** $x^2 + y^2 = 4$ kısıtlaması altında $3x - y + 6$'nın maksimum ve minimum değerlerini bulun.
15. **Metal bir plaka üzerinde bir karınca** Metal bir plakanın üzerinde bir (x, y) noktasındaki sıcaklık $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$'dir. Bir karınca plakada merkezi orijinde olan 5 yarıçaplı bir çember üzerinde yürümektedir. Karıncanın karşılaşacağı en yüksek ve en düşük sıcaklıklar nedir?
16. **En ucuz depolama tankı** Firmanızdan LPG için bir depolama tankı tasarlanması istenmiştir. Müşterinin belirttikleri, uçları yarım küre olan silindirik bir tank gerektirmektedir ve tank 8000 m^3 gaz içerecektir. Müşteri ayrıca tankın yapımında olası en az malzemeyi kullanmak istemektedir. Tankın silindirik kısmı için hangi yarıçap ve yüksekliği önerirsiniz?

Kısıtlamayla Üç Bağımsız Değişken

17. **Bir noktaya minimum uzaklık** $x + 2y + 3z = 13$ düzlemi üzerinde (1, 1, 1) noktasına en yakın noktayı bulun.
18. **Bir noktaya maksimum uzaklık** $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresi üzerinde (1, –1, 1) noktasından en uzak noktayı bulun.
19. **Orijine minimum uzaklık** $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ yüzeyinden orijine olan minmum uzaklığı bulun.
20. **Orijine minimum uzaklık** $z = xy + 1$ yüzeyinde orijine en yakın noktayı bulun.
21. **Orijine minimum uzaklık** $z^2 = xy + 4$ yüzeyinde orijine en yakın noktayı bulun.
22. **Orijine minimum uzaklık** $xyz = 1$ yüzeyinde orijine en yakın nokta(lar)ı bulun.
23. **Bir küre üzerinde ekstremumlar** $x^2 + y^2 + z^2 = 30$ küresi üzerinde

$$f(x, y, z) = x - 2y + 5z$$

   fonksiyonunun maksimum ve minimum değerini bulun.
24. **Bir küre üzerinde ekstremumlar** $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ küresi üzerinde $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$'nin maksimum ve minimum değerlerini aldığı noktaları bulun.
25. **Bir kareler toplamını minimize etmek** Toplamları 9 ve karelerinin toplamı mümkün olduğunca küçük olan üç sayı bulun.
26. **Bir çarpımı maksimize etmek** $x + y + z^2 = 16$ ise, pozitif x, y ve z sayılarının çarpımlarının en büyük değerini bulun.
27. **Bir küre içinde en büyük hacimli dikdörtgensel kutu** Birim küre içine konulabilecek maksimum hacimli kapalı dikdörtgensel kutunun boyutlarını bulun.

28. Köşesi bir düzlem üzerinde olan kutu Birinci sekizde bir bölgede, yüzlerinden üçü koordinat düzlemlerinde ve köşelerinden biri $a > 0$, $b > 0$ ve $c > 0$ olmak üzere, $x/a + y/b + z/c = 1$ düzleminde olan en büyük kapalı dikdörtgensel kutunun hacmini bulun.

29. Bir uzay sondası üzerindeki en sıcak nokta

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$$

elipsoidinin şeklinde olan bir uzay sondası dünya atmosferine girer ve yüzeyi ısınmaya başlar. Bir saat sonra, sondanın yüzeyindeki (x, y, z) noktasının sıcaklığı

$$T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$$

olarak bulunur. Sondanın yüzeyindeki en sıcak noktayı bulun.

30. Bir küre üzerinde ekstremum sıcaklıklar $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresindeki (x, y, z) noktasının santigrad cinsinden sıcaklığı $T = 400xyz^2$'dir. Küredeki en yüksek ve en düşük sıcaklıkların yerini bulun.

31. Bir fayda fonksiyonunu maksimize etmek: Ekonomiden bir örnek Ekonomide, G_1 ve G_2 gibi iki sermaye malının x ve y miktarlarının yararlılığı veya *faydası* bazen bir $U(x, y)$ fonksiyonuyla ölçülür. Örneğin, G_1 ve G_2 bir ilaç firmasının elinde bulundurması gereken iki kimyasal ve $U(x, y)$ de sentezi kullanılan işleme bağlı olarak farklı miktarda kimyasal kullanarak bir ürün üretmenin kazancı olabilir. G_1'in kilogramı a dolar, G_2'nin kilogramı b dolar ve G_1 ile G_2'nin birlikte alımı için ayrılan miktar c dolar ise, şirket yöneticileri $ax + by = c$ olacak şekilde $U(x, y)$'yi maksimize etmek istemektedir. Yani, tipik bir Lagrange çarpanı problemi çözmeleri gerekir.

$$U(x, y) = xy + 2x$$

olduğunu ve $ax + by = c$ denkleminin

$$2x + y = 30$$

olarak sadeleştiğini varsayın. U'nun bu son kısıtlama ile maksimum değerini ve x ve y değerlerini bulun.

32. Bir Radyo teleskobunu yerleştirmek Yeni keşfedilmiş bir gezegene bir radyo teleskop kurmaktan sorumlusunuz. Girişimi önlemek için, teleskobu gezegenin manyetik alanının en düşük olduğu yere koymak istiyorsunuz. Gezegen yarıçapı 6 birim olan bir küredir. Orijini gezegenin merkezinde olan bir koordinat sisteminde, manyetik alanın kuvveti $M(x, y, z) = 6x - y^2 + xz + 60$'tır. Radyo teleskobu nereye yerleştirmelisiniz?

İki Kısıtlamayla Lagrange Çarpanları

33. $2x - y = 0$ ve $y + z = 0$ kısıtlamaları ile $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$ fonksiyonunu maksimize edin.

34. $x + 2y + 3z = 6$ ve $x + 3y + 9z = 9$ kısıtlamaları ile $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ fonksiyonunu minimize edin.

35. Orijine minimum uzaklık $y + 2z = 12$ ve $x + y = 6$ düzlemlerinin kesişim doğrusu üzerinde orijine en yakın noktayı bulun.

36. Kesişim doğrusu üzerinde maksimum değer $2x - y = 0$ ve $y + z = 0$ düzlemlerinin kesişim doğrusu üzerinde $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$'nin alabileceği maksimum değeri bulun.

37. Kesişim eğrisi üzerinde ekstremumlar $z = 1$ düzlemi ile $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ küresinin kesişim eğrisi üzerinde $f(x, y, z) = x^2yz + 1$'in ekstremum değerlerini bulun.

38. a. Kesişim doğrusu üzerinde maksimum $x + y + z = 40$ ve $x + y - z = 0$ düzlemlerinin kesişim doğrusu üzerinde $w = xyz$'nin maksimum değerini bulun.

b. w'nun bir minimumunu değil de bir maksimumunu bulduğunuzu desteklemek için geometrik bir yorum yapın.

39. Kesişim çemberi üzerinde ekstremumlar $y - x = 0$ düzleminin $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresini kestiği çember üzerinde $f(x, y, z) = xy + z^2$'nin ekstremum değerlerini bulun.

40. Orijine minimum uzaklık $2y + 4z = 5$ düzlemi ve $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ konisinin kesişim eğrisi üzerinde orijine en yakın noktayı bulun.

Teori ve Örnekler

41. $\nabla f = \lambda \nabla g$ koşulu yeterli değildir $g(x, y) = 0$ kısıtlaması ile $f(x, y)$'nin bir ekstremum değerinin var olması için $\nabla f = \lambda \nabla g$ gerekli bir koşulken, bu değerin bulunduğunu garantilemez. Örnek olarak, $xy = 16$ kısıtlaması ile $f(x, y) = x + y$'nin maksimum değerini bulmak için Lagrange çarpanları yöntemini kullanmayı deneyin. Yöntem, yerel ekstremumların yerlerine aday olarak $(4, 4)$ ve $(-4, -4)$ noktalarını tanımlayacaktır. Ama $(x + y)$ toplamının $xy = 16$ hiperbolü üzerinde bir maksimum değeri yoktur. Birinci dörtte bir bölgede, bu hiperbol üzerinde ne kadar ilerlerseniz, $f(x, y) = x + y$ o kadar büyür.

42. Bir en küçük kareler düzlemi $z = Ax + By + C$ düzlemi aşağıdaki (x_k, y_k, z_k) noktalarına "uydurulacaktır":

$$(0, 0, 0), \quad (0, 1, 1), \quad (1, 1, 1), \quad (1, 0, -1)$$

Sapmaların karelerinin toplamı olan

$$\sum_{k=1}^{4} (Ax_k + By_k + C - z_k)^2$$

toplamını minimize eden A, B ve C değerlerini bulun.

43. a. Bir küre üzerinde maksimum Merkezi, Kartezyen bir abc-koordinat sisteminin orijininde olan r yarıçaplı bir küre üzerinde $a^2b^2c^2$'nin maksimum değerinin $(r^2/3)^3$ olduğunu gösterin.

b. Geometrik ve aritmetik ortalamalar (a) şıkkını kullanarak, negatif olmayan a, b ve c sayıları için,

$$(abc)^{1/3} \le \frac{a + b + c}{3}$$

olduğunu gösterin. Yani, üç sayının *geometrik ortalaması, aritmetik ortalamasına* eşit veya ondan küçüktür.

44. Çarpımlar toplamı $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n tane pozitif sayı olsun. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ kısıtlaması ile $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$'nin maksimumunu bulun.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Lagrange Çarpanları Yöntemini Uygulamak

45–50 alıştırmalarında, kıstlanmış bir ekstremumu bulmak için Langrange çarpanları yöntemini yerine getiren adımları gerçekleştirmek için bir BCS kullanın.

a. f'nin, $g_1 = 0$ ve $g_2 = 0$ kısıtlamaları altında optimize edilecek fonksiyon olmak üzere, $h = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$ fonksiyonunu oluşturun.

b. λ_1 ve λ_2'ye göre olanlar da dahil olmak üzere, h'nin birinci mertebeden kısmi türevlerini bulun ve onları 0'a eşitleyin.

c. (b)'de bulunan denklem sistemlerinden λ_1 ve λ_2 de dahil olmak üzere bütün bilinmeyenleri çözün.

d. f'yi (c)'de bulunan çözüm noktalarının her birinde hesaplayın ve alıştırmada verilen kısıtlamaları sağlayan ekstrem değeri bulun.

45. $x^2 + y^2 - 2 = 0$ ve $x^2 + z^2 - 2 = 0$ kısıtlamaları altında $f(x, y, z) = xy + yz$'yi minimize edin.

46. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ve $x - z = 0$ kısıtlamaları altında $f(x, y, z) = xyz$'yi minimize edin.

47. $2y + 4z - 5 = 0$ ve $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$ kısıtlamaları altında $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$'yi maksimize edin.

48. $x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1 = 0$ ve $x^2 + y^2 - 1 = 0$ kısıtlamaları altında $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$'yi minimize edin.

49. $2x - y + z - w - 1 = 0$ ve $x + y - z + w - 1 = 0$ kısıtlamaları altında $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$'yi minimize edin.

50. $y = x + 1$ doğrusundan $y^2 = x$ parabolüne olan uzaklığı bulun (*İpucu*: (x, y) doğru üzerinde bir nokta ve (w, z) de parabol üzerinde bir nokta olsun $(x - w)^2 + (y - z)^2$'yi minimize etmek istiyorsunuz).

14.9 Kısıtlanmış Değişkenlerle Kısmi Türevler

$w = f(x, y)$ gibi fonksiyonların kısmi türevlerini bulurken, x ve y'nin bağımsız olduklarını varsaydık. Ama çoğu uygulamada durum böyle değildir. Örneğin, bir gazın iç enerjisi U, gazın basıncı, hacmi ve sıcaklığı sırasıyla P, V ve T olmak üzere $U = f(P, V, T)$ fonksiyonu olarak ifade edilebilir. Ancak gazın molekülleri birbirleriyle etkileşmiyorlarsa, P, V ve T

$$PV = nRT \qquad (n \text{ ve } R \text{ birer sabit})$$

ideal gaz yasasına uyarlar (ve kısıtlıdırlar) ve bağımsız değildirler. Bu bölümde, ekonomi, mühendislik veya fizikte karşılaşabileceğimiz bu gibi durumlarda kısmi türevlerin nasıl bulunacaklarını öğreneceğiz. †

Değişkenlerin Hangilerinin Bağımlı, Hangilerinin Bağımsız Olduğuna Karar Vermek

Bir $w = f(x, y, z)$ fonksiyonunun değişkenleri, x, y ve z üzerine $z = x^2 + y^2$ denklemiyle konulmuşa benzer bir bağıntıyla kısıtlanmışsa, f'nin kısmi türevlerinin geometrik anlamları ve sayısal değerleri, değişkenlerin hangilerinin bağımlı, hangilerinin bağımsız olarak seçileceğine bağlı olacaktır. Bu seçimin, sonucu nasıl etkileyeceğini görmek için $w = x^2 + y^2 + z^2$ ve $z = x^2 + y^2$ iken $\partial w/\partial x$'in hesaplanmasını ele alacağız.

ÖRNEK 1 Kısıtlanmış Bağımsız Değişkenlerle Bir Kısmi Türev Bulmak

$w = x^2 + y^2 + z^2$ ve $z = x^2 + y^2$ ise, $\partial w/\partial x$'i bulun.

†Bu bölüm Arthur P. Mattuck tarafından MIT için yazılan notlara dayanmaktadır.

Çözüm x, y, z ve w gibi dört değişkenli iki denklem verilmiştir. Çoğu sistem gibi, bundan da bilinmeyenlerin ikisi (bağlı değişkenler) diğerleri cinsinden (bağımsız değişkenler) çözülebilir. $\partial w/\partial x$ sorulduğuna göre, w'nin bağımlı bir değişken, x'in de bağımsız bir değişken olduğu söylenmektedir. Diğer değişkenler için olası seçimler

Bağımlı	*Bağımsız*
w, z	x, y
w, y	x, z

olur. Her durumda, w'yi açık olarak, seçilen bağımsız değişkenler cinsinden ifade edebiliriz. Bunu, birinci denklemdeki diğer bağlı değişkeni ortadan kaldırmak için ikinci denklem $z = x^2 + y^2$'yi kullanarak yaparız.

Birinci durumda, diğer bağlı değişken z'dir. Bunu birinci denklemde z yerine $x^2 + y^2$ yazarak ortadan kaldırırız. Ortaya çıkan w ifadesi

$$\begin{aligned} w &= x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2 \\ &= x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \end{aligned}$$

olur ve

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 4x^3 + 4xy^2 \tag{1}$$

bulunur. x ve y bağımsız değişkenler olduklarında, $\partial w/\partial x$'in formülü budur.

Bağımsız değişkenlerin x ve z, ikinci bağlı değişkenin y olduğu ikinci durumda, w ifadesindeki bağlı değişken y'yi y^2 yerine $z - x^2$ yazarak ortadan kaldırırız. Bu

$$w = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (z - x^2) + z^2 = z + z^2$$

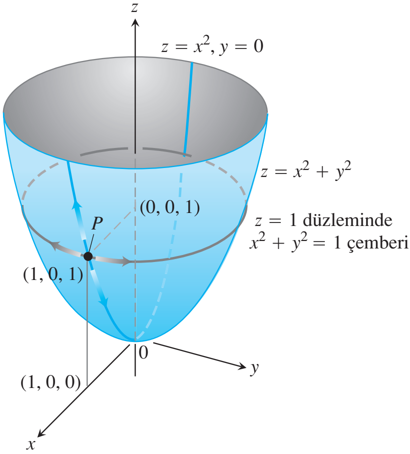
verir ve

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

bulunur. x ve z bağımsız değişkenler olduklarında, $\partial w/\partial x$'in formülü budur.

(1) ve (2) Denklemlerindeki $\partial w/\partial x$ formülleri gerçekten farklıdır. Bir formülden diğerine $z = x^2 + y^2$ bağıntısını kullanarak geçemeyiz. Tek bir değil iki tane $\partial w/\partial x$ vardır ve $\partial w/\partial x$'i bulmak için verilen talimatların yeterli olmadığını görürüz. *Hangi* $\partial w/\partial x$? diye sorarız.

(1) ve (2) Denklemlerinin geometrik yorumları denklemlerin neden değişik olduklarını açıklamaya yardımcı olur. $w = x^2 + y^2 + z^2$ fonksiyonu (x, y, z) noktasından orijine olan uzaklığın karesini ölçer. $z = x^2 + y^2$ koşulu (x, y, z) noktasının Şekil 14.58'de görülen dönel paraboloid üzerinde olduğunu söyler. Sadece bu yüzey üzerinde hareket edebilen bir $P(x, y, z)$ noktasında $\partial w/\partial x$'i hesaplamak ne demektir? P'nin değerleri, örneğin, (1, 0, 1) iken $\partial w/\partial x$'in değeri nedir?



ŞEKİL 14.58 P noktası $z = x^2 + y^2$ paraboloidi üzerinde bulunacak şekilde kısıtlanmışsa, $w = x^2 + y^2 + z^2$'nin P'de x'e göre kısmi türevi hareket doğrultusuna bağlıdır (Örnek 1). (1) x değişkeni $y = 0$ ile değişirken, P noktası xz-düzlemi içindeki $z = x^2$ parabolü üzerinde, yüzeyin yukarısına veya aşağısına $\partial w/\partial x = 2x + 4x^3$ ile hareket eder. (2) x, $z = 1$ ile değişirken, P, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ çemberi üzerinde hareket eder ve $\partial w/\partial x = 0$ olur.

x ve y'yi bağımsız olarak alırsak, $\partial w/\partial x$'i y'yi sabit tutup (bu durumda $y = 0$) ve x'i değiştirerek bulabiliriz. Bu, P'nin xz-düzlemi içindeki $z = x^2$ parabolü üzerinde hareket ettiği anlamına gelir. P bu parabol üzerinde hareket ederken, P'den orijine uzaklığın karesi olan w değişir. Bu durumda $\partial w/\partial x$'i

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 4x^3 + 4xy^2$$

olarak buluruz (yukarıdaki ilk çözümümüz). (1, 0, 1) noktasında, bu türevin değeri

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2 + 4 + 0 = 6$$

olur.

x ve z'yi bağımsız olarak alırsak, $\partial w/\partial x$'i x değişirken z'yi sabit tutarak buluruz. P'nin z-koordinatı 1 olduğu için, x'i değiştirmek P'yi $z = 1$ düzleminde bir çember üzerinde hareket ettirir. P bu çember üzerinde ilerlerken, orijinden uzaklığı sabit kalır ve bu uzaklığın karesi olan w değişmez. Yani, ikinci çözümümüzde bulduğumuz gibi,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

olur. ■

$w = f(x, y, z)$'nin Değişkenleri Başka Bir Denklemle Kısıtlanmışken $\partial w/\partial x$ Nasıl Bulunur?

Örnek 1'de gördüğümüz gibi, $w = f(x, y, z)$ fonksiyonundaki değişkenler başka bir değişkenle kısıtlanmışken, $\partial w/\partial x$'in değerini bulmanın üç adımı vardır. Bu adımlar $\partial w/\partial y$ ile $\partial w/\partial z$'yi bulmakta da kullanılır.

1. Hangi değişkenleri bağımsız, hangilerinin bağımlı olacağına *karar verin* (Pratikte, karar çalışmamızın fiziksel veya teorik konusuna bağlıdır. Bu bölümün sonundaki alıştırmalarda, değişkenlerin hangilerinin hangisi olduğunu söyleyeceğiz).
2. w ifadesindeki diğer bağımlı değişken(ler)i *ortadan kaldırın*.
3. Her zamanki gibi *türev alın.*

Değişkenlerin hangilerinin bağlı olacağına karar verdikten sonra, 2. adımı gerçekleştiremezsek, denklemlerin türevlerini oldukları gibi alır ve $\partial w/\partial x$'i daha sonra çözeriz. Aşağıdaki örnek bunun nasıl yapıldığını göstermektedir.

ÖRNEK 2 Belirlenmiş Kısıtlı Bağımsız Değişkenlerle Bir Kısmi Türev Bulmak

$$w = x^2 + y^2 + z^2 \qquad\qquad z^3 - xy + yz + y^3 = 1$$

denklemlerinde x ve y bağımsız değişkenler ise, $(x, y, z) = (2, -1, 1)$ noktasında $\partial w/\partial x$'in değerini bulun.

Çözüm w denkleminden z'yi yok etmek uygun değildir. Dolayısıyla, x ile y'ye bağımsız, w ile z'ye bağımlı değişkenler gibi bakarak, iki denklemin de iki tarafının x'e göre kapalı olarak türevini alırız. Bu

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} \tag{3}$$

ve

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x} - y + y\frac{\partial z}{\partial x} + 0 = 0 \tag{4}$$

verir. Artık bu denklemler birleştirilerek $\partial w/\partial x$ kısmi türevi x, y ve z cinsinden ifade edilebilir. (4) denkleminden $\partial z/\partial x$'i çözerek,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{y + 3z^2}$$

elde eder ve bunu (3) denklemine yerleştirerek,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + \frac{2yz}{y + 3z^2}$$

buluruz. Bu türevin $(x, y, z) = (2, -1, 1)$'deki değeri

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{(2,-1,1)} = 2(2) + \frac{2(-1)(1)}{-1 + 3(1)^2} = 4 + \frac{-2}{2} = 3$$

bulunur. ■

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Sonya Kovalevsky
(1850–1891)

Notasyon

Bir türevi hesaplarken hangi değişkenlerin bağımsız olarak varsayıldıklarını göstermek için, aşağıdaki gösterimi kullanabiliriz:

$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ x ve y bağımsız olmak üzere $\partial w/\partial x$

$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,t}$ y, x ve t bağımsız olmak üzere $\partial f/\partial y$.

ÖRNEK 3 Notasyon İle Belirlenmiş Kısıtlı Bağımsız Değişkenlerle Bir Kısmi Türev Bulmak

$w = x^2 + y - z + \sin t$ ve $x + y = t$ ise $(\partial w/\partial x)_{y,z}$'yi bulun.

Çözüm x, y, z bağımsız olmak üzere,

$$t = x + y, \qquad w = x^2 + y - z + \sin(x + y)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} = 2x + 0 - 0 + \cos(x + y)\frac{\partial}{\partial x}(x + y)$$

$$= 2x + \cos(x + y)$$

bulunur. ■

Ok Diyagramları

Örnek 3'tekine benzer problemleri çözmek için, değişkenlerle fonksiyonların arasındaki ilişkiyi belirten bir ok diyagramıyla işe başlamak genellikle yararlı olur.

$$w = x^2 + y - z + \sin t \qquad \text{ve} \qquad x + y = t$$

ise ve bizden x, y ve z bağımsızken $\partial w/\partial x$'i bulmamız isteniyorsa, uygun diyagram şunun gibidir:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \rightarrow w \tag{5}$$

Bağımsız değişkenler — Ara değişkenler — Bağlı değişken

Diyagramda aynı sembolik isimli bağımsız ve ara değişkenlerde bir karışıklıktan kaçınmak için ara değişkenlerin isimlerini değiştirmek faydalıdır (bağımsız değişkenlerin *fonksiyonları* olarak görünürler). Böylece, $u = x$, $v = y$ ve $s = z$ değiştirilmiş ara değişkenleri göstersin. Bu notasyonla yukarıdaki ok diyagramı

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ s \\ t \end{pmatrix} \rightarrow w \tag{6}$$

Bağımsız değişkenler — Ara değişkenler ve bağıntılar — Bağlı değişken

$u = x$
$v = y$
$s = z$
$t = x + y$

Diyagram solda bağımsız değişkenleri, ortada ara değişkenleri ve onların bağımsız değişkenlerle ilişkilerini ve sağda bağlı değişkeni gösterir. Şimdi fonksiyon,

$$w = u^2 + v - s + \sin t$$

olmak üzere

$$u = x, \qquad v = y, \qquad s = z \qquad \text{ve} \qquad t = x + y$$

şeklindedir.

$\partial w/\partial x$'i bulmak için, (6) denklemindeki ok diyagramının rehberliğinde, w'ye Zincir Kuralının dört değişkenli şeklini uygularız:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} \\
&= (2u)(1) + (1)(0) + (-1)(0) + (\cos t)(1) \\
&= 2u + \cos t \\
&= 2x + \cos(x + y).
\end{aligned}$$

$u = x$ ve $t = x + y$ orijinal değişkenlerini yerine yazarak

ALIŞTIRMALAR 14.9

Kısıtlanmış Değişkenlerle Kısmi Türevleri Bulmak

1–3 alıştırmalarında, işe değişkenler arasındaki bağıntıları gösteren bir diyagram çizerek başlayın.

1. $w = x^2 + y^2 + z^2$ ve $z = x^2 + y^2$ ise aşağıdakileri bulun.

a. $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$ **b.** $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_x$ **c.** $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$.

2. $w = x^2 + y - z + \sin t$ ve $x + y = t$ ise aşağıdakileri bulun.

a. $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,z}$ **b.** $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{z,t}$ **c.** $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y}$

d. $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{y,t}$ **e.** $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{x,z}$ **f.** $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{y,z}$.

3. $PV = nRT$ (n ve R sabit) ideal gaz yasasına uyan bir gazın iç enerjisi $U = f(P, V, T)$ olsun. Aşağıdakileri bulun.

a. $\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_V$ **b.** $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$

4.

a. $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ **b.** $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$

ise, $(x, y, z) = (0, 1, \pi)$ noktasında aşağıdakileri bulun.

$$w = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{ve} \qquad y \sin z + z \sin x = 0$$

5.

a. $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x$ **b.** $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$

ise, $(w, x, y, z) = (4, 2, 1, -1)$'de aşağıdakileri bulun.

$$w = x^2y^2 + yz - z^3 \qquad \text{ve} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 6$$

6. $x = u^2 + v^2$ ve $y = uv$ ise, $(u, v) = \left(\sqrt{2}, 1\right)$ noktasında $(\partial u/\partial y)_x$'i bulun.

7. Kutupsal koordinatlarda olduğu gibi, $x^2 + y^2 = r^2$ ve $x = r \cos \theta$ olduğunu varsayın. Aşağıdakileri bulun.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta \qquad \text{ve} \qquad \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y$$

8. $w = x^2 - y^2 = 4z + t$ ve $x + 2z + t = 25$ olduğunu varsayın.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x - 1 \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 2x - 2$$

denklemlerinin ikisinin de, değişkenlerin hangilerinin bağımlı ve hangilerinin bağımsız seçileceğine bağlı olarak, $\partial w/\partial x$'i verdiklerini gösterin. Her durumda bağımsız değişkenleri tanımlayın.

Belirli Formülleri Olmayan Kısmi Türevler

9. Hidrodinamikte geniş olarak kullanılan bir gerçeği, yani $f(x, y, z) = 0$ ise,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

olduğunu gösterin (*İpucu*: Bütün türevleri normal $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ ve $\partial f/\partial z$ cinsinden ifade edin).

10. $u = xy$ olmak üzere, $z = x + f(u)$ ise,

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x$$

olduğunu gösterin.

11. $g(x, y, z) = 0$ denkleminin z'yi x ve y bağımsız değişkenlerinin türevlenebilir bir fonksiyonu olarak tanımladığını ve $g_z \neq 0$ olduğunu varsayın. Aşağıdaki ifadeyi gösterin.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -\frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial z}$$

12. $f(x, y, z, w) = 0$ ve $g(x, y, z, w) = 0$ denklemlerinin z ve w'yi x ile y bağımsız değişkenlerinin diferansiyellenebilir fonksiyonları olarak tanımladıklarını ve

$$\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial z} \neq 0$$

olduğunu varsayın.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial w} - \dfrac{\partial f}{\partial w}\dfrac{\partial g}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial w} - \dfrac{\partial f}{\partial w}\dfrac{\partial g}{\partial z}}$$

ve

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial w} - \dfrac{\partial f}{\partial w}\dfrac{\partial g}{\partial z}}$$

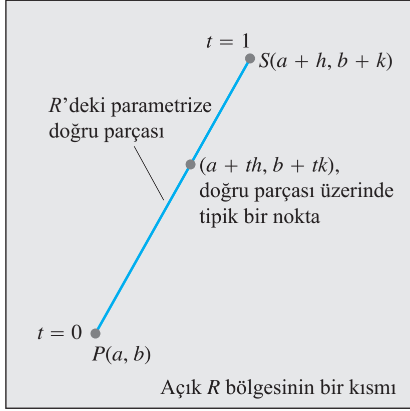
olduğunu gösterin.

14.10 İki Değişken İçin Taylor Formülü

Bu bölüm yerel ekstremum değerler için İkinci Türev Testini (Bölüm 14.7) ve iki bağımsız değişkenli fonksiyonlarını lineerizasyonlarının hata formülünü (Bölüm 14.6) türetmek için Taylor formülünü kullanır. Bu türetmelerde Taylor formülünün kullanılması, formülün her mertebeden iki değişkenli fonksiyonların polinom yaklaşımlarını sağlayan bir genişlemesini verecektir.

İkinci Türev Testinin Türetilmesi

Açık bir R bölgesindeki bir $P(a, b)$ noktasında $f_x = f_y = 0$ eşitliklerini sağlayan bir $f(x, y)$ fonksiyonunun R üzerinde sürekli kısmi türevleri var olsun (Şekil 14.59). h ve k,



ŞEKİL 14.59 $P(a, b)$ noktasında İkinci türev testini elde etme işine, P'den yakınındaki bir S noktasına kadar tipik bir doğru parçasını parametrize ederek başlarız.

$S(a + h, b + k)$ noktasını ve bu noktayı P'ye birleştiren doğru parçasının R içinde olmasını sağlayacak kadar küçük artımlar olsun. PS doğru parçasını

$$x = a + th, \qquad y = b + tk, \qquad 0 \le t \le 1$$

şeklinde parametrize ederiz. $F(t) = f(a + th, b + tk)$ ise, Zincir Kuralı

$$F'(t) = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = hf_x + kf_y$$

verir. f_x ve f_y diferansiyellenebilir oldukları için (sürekli kısmi türevleri vardır), F' türevi t'nin türetilebilir bir fonksiyonudur ve

$$F'' = \frac{\partial F'}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F'}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}(hf_x + kf_y) \cdot h + \frac{\partial}{\partial y}(hf_x + kf_y) \cdot k$$

$$= h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy} \qquad f_{xy} = f_{yx}$$

olur. F ve F' $[0, 1]$'de sürekli olduklarından ve F' fonksiyonu $(0, 1)$'de diferansiyellenebilir olduğundan $n = 2$ ve $a = 0$ ile Taylor formülünü kullanarak, 0 ile 1 arasındaki bir c sayısı için

$$F(1) = F(0) + F'(0)(1 - 0) + F''(c)\frac{(1 - 0)^2}{2}$$

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(c) \tag{1}$$

elde ederiz. (1) Denklemini f cinsinden yazmak

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + hf_x(a, b) + kf_y(a, b) + \frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}\right)\Big|_{(a+ch,\, b+ck)} \tag{2}$$

verir. $f_x(a, b) = f_x(a, b) = 0$ olduğundan, bu

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}\right)\Big|_{(a+ch,\, b+ck)} \tag{3}$$

haline indirgenir. f'nin (a, b)'de bir ekstremumunun bulunması $f(a + h, b + k) - f(a, b)$'nin işaretiyle belirlenir. (3) denkleminden, bu

$$Q(c) = (h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy})|_{(a+ch, b+ck)}$$

fonksiyonunun işaretiyle aynıdır. Şimdi, $Q(0) \neq 0$ ise, $Q(c)$'nin işareti yeterince küçük h ve k değerleri için $Q(0)$'ın işareti ile aynı olacaktır.

$$Q(0) = h^2 f_{xx}(a, b) + 2hkf_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b) \tag{4}$$

değerinin işaretini f_{xx} ve $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$'nin (a, b)'deki işaretlerinden tahmin edebiliriz. (4) denkleminin iki tarafını da f_{xx} ile çarpar ve sağ tarafı yeniden düzenlersek

$$f_{xx}Q(0) = (hf_{xx} + kf_{xy})^2 + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)k^2 \tag{5}$$

elde ederiz. (5) denkleminden aşağıdakileri çıkarırız:

1. (a, b)'de $f_{xx} < 0$ ve $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ise, h ve k'nin sıfırdan farklı yeterince küçük değerlerinde $Q(0) < 0$ olur ve f'nin (a, b)'de bir yerel *maksimumu* vardır.
2. (a, b)'de $f_{xx} > 0$ ve $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ise, h ve k'nin sıfırdan farklı yeterince küçük değerlerinde $Q(0) > 0$ olur ve f'nin (a, b)'de bir yerel minimumu vardır.

3. (a, b)'de $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ ise, h ve k'nin, $Q(0) < 0$ olmasını sağlayacak, sıfırdan farklı yeterince küçük değerlerinin bir kombinasyonu ve $Q(0) > 0$ olmasını sağlayacak başka kombinasyonu vardır. $z = f(x, y)$ yüzeyinde $P_0(a, b, f(a, b))$ noktasının keyfi derecede yakınında, P_0'ın üst tarafında ve alt tarafında noktalar vardır, dolayısıyla f'nin (a, b)'de bir *eyer noktası* vardır.

4. $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ ise, başka bir teste gerek vardır. $Q(0)$'ın sıfıra eşit olma olasılığı $Q(c)$'nin işareti hakkında sonuç çıkarmamızı önler.

Lineer Yaklaşımlar İçin Hata Formülü

Bir $f(x, y)$ fonksiyonu ile (x_0, y_0)'daki lineerizasyonu $L(x, y)$'nin değerleri arasındaki $E(x, y)$ farkının

$$|E(x, y)| \le \frac{1}{2} M(|x - x_0| + |y - y_0|)^2$$

eşitsizliğini sağladığını göstermek istiyoruz. f fonksiyonunun, (x_0, y_0) merkezli dikdörtgensel bir kapalı R bölgesini içeren bir açık kümede sürekli ikinci mertebe kısmi türevlerinin var olduğu kabul edilmektedir. M sayısı, $|f_{xx}|$, $|f_{yy}|$ ve $|f_{xy}|$'nin R'de bir üst sınırıdır.

İstediğimiz eşitsizlik (2) denkleminden gelir. Sırasıyla, a ve b yerine x_0 ve y_0, h ve k yerine de $x - x_0$ ve $y - y_0$ yazarak, sonucu

$$f(x, y) = \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}_{L(x,\, y) \text{ lineerizasyonu}}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\left((x - x_0)^2 f_{xx} + 2(x - x_0)(y - y_0) f_{xy} + (y - y_0)^2 f_{yy}\right)\Big|_{(x_0 + c(x - x_0),\, y_0 + c(y - y_0))}}_{E(x,\, y) \text{ hatası}}$$

olarak yeniden düzenleriz. Bu çarpıcı denklem

$$|E| \le \frac{1}{2}\left(|x - x_0|^2 |f_{xx}| + 2|x - x_0||y - y_0||f_{xy}| + |y - y_0|^2 |f_{yy}|\right)$$

olduğunu gösterir. Dolaysıyla, M, R üzerinde $|f_{xx}|$, $|f_{xy}|$ ve $|f_{yy}|$'nin değerlerinin bir üst sınırıysa,

$$|E| \le \frac{1}{2}\left(|x - x_0|^2 M + 2|x - x_0||y - y_0| M + |y - y_0|^2 M\right)$$

$$= \frac{1}{2} M(|x - x_0| + |y - y_0|)^2$$

bulunur.

İki Değişkenli Fonksiyonlar İçin Taylor Formülü

Daha önce F' ve F'' için türetilen denklemler, $f(x, y)$'ye

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{ve} \quad \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

operatörleri uygulanarak elde edilebilir. Bunlar, daha genel olan

$$F^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}F(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y) \qquad (6)$$

formülünün ilk iki örneğidir. (6) Denklemi $F(t)$'ye d^n/dt^n uygulamanın, $f(x, y)$ fonksiyonuna,

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$$

operatörünün binom teoremiyle açılmış halini uygulamakla eş olduğunu söyler.

f'nin $(n+1)$inci mertebeye kadar kısmi türevleri, merkezi (a, b)'de olan dikdörtgen şeklindeki bir bölgede sürekli ise, $F(t)$'nin Taylor formülünü

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^{(n)} + \text{kalan}$$

şeklinde açabilir ve $t = 1$ alarak

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \text{kalan}$$

elde edebiliriz. Bu son seride, sağ taraftaki ilk n türevi, (6) denkleminde $t = 0$ için hesaplanmış eşdeğer ifadeleri ile değiştirdiğimizde ve uygun bir kalan terim eklediğimizde aşağıdaki formüle ulaşırız:

(a, b) Noktasında $f(x, y)$'nin Taylor Formülü

$f(x, y)$ ve $(n+1)$ inci mertebeye kadar kısmi türevleri, merkezi (a, b)'de olan dikdörtgensel bir açık R bölgesinde sürekli olsunlar. Bu durumda, R'de,

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) = {} & f(a, b) + (hf_x + kf_y)\big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}(h^2f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2f_{yy})\big|_{(a,b)} \\ & + \frac{1}{3!}(h^3f_{xxx} + 3h^2kf_{xxy} + 3hk^2f_{xyy} + k^3f_{yyy})\big|_{(a,b)} + \cdots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\bigg|_{(a,b)} \\ & + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\bigg|_{(a+ch,b+ck)} \end{aligned} \tag{7}$$

bulunur.

İlk n türev terimi (a, b)'de hesaplanır. Son terim, (a, b) ile $(a+h, b+k)$'yi birleştiren doğru parçası üzerindeki bir $(a+ch, b+ck)$ noktasında hesaplanır.

$(a, b) = (0, 0)$ ise ve h ile k'ye (artık onlara x ve y diyerek) bağımsız değişkenler gibi davranırsak, (7) denklemi daha basit bir hal alır.

Orijinde $f(x, y)$'nin Taylor Formülü

$$\begin{aligned} f(x, y) = {} & f(0, 0) + xf_x + yf_y + \frac{1}{2!}(x^2f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2f_{yy}) \\ & + \frac{1}{3!}(x^3f_{xxx} + 3x^2yf_{xxy} + 3xy^2f_{xyy} + y^3f_{yyy}) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f \\ & + \frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\bigg|_{(cx,cy)} \end{aligned} \tag{8}$$

İlk n türev terimi (0, 0)'da hesaplanmaktadır. Son terim orijinle (x, y)'yi birleştiren doğru parçası üzerindeki bir noktada hesaplanır.

Taylor formülü bizi, iki değişkenli fonksiyonların polinom yaklaşımlarına götürür. İlk n türev terimi polinomu verir; son terim yaklaşım hatasını verir. Taylor formülünün ilk üç terimi fonksiyonun lineerizasyonunu verir. Lineerizasyonu iyileştirmek için, daha yüksek dereceden terimler ekleriz.

ÖRNEK 1 Kuadratik Bir Yaklaşım Bulmak

$f(x, y) = \sin x \sin y$'ye orijin civarında kuadratik bir yaklaşım bulun. $|x| \le 0.1$ ve $|y| \le 0.1$ ise, yaklaşım ne kadar kesindir?

Çözüm (8) Denklemlerinde $n = 2$ alırız:

$$f(x, y) = f(0, 0) + (xf_x + yf_y) + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy})$$
$$+ \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy})_{(cx,cy)}$$

ve

$$f(0, 0) = \sin x \sin y|_{(0,0)} = 0, \qquad f_{xx}(0, 0) = -\sin x \sin y|_{(0,0)} = 0$$
$$f_x(0, 0) = \cos x \sin y|_{(0,0)} = 0, \qquad f_{xy}(0, 0) = \cos x \cos y|_{(0,0)} = 1,$$
$$f_y(0, 0) = \sin x \cos y|_{(0,0)} = 0, \qquad f_{yy}(0, 0) = -\sin x \sin y|_{(0,0)} = 0$$

ile,

$$\sin x \sin y \approx 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(x^2(0) + 2xy(1) + y^2(0)),$$
$$\sin x \sin y \approx xy$$

buluruz. Yaklaşımdaki hata

$$E(x, y) = \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy})|_{(cx,cy)}$$

formülüyle bulunur. Üçüncü türevler mutlak değer olarak 1'i asla aşmazlar, çünkü sinüs ve kosinüslerin çarpımlarıdırlar. Ayrıca, $|x| \le 0.1$ ve $|y| \le 0.1$'dir. Böylece,

$$|E(x, y)| \le \frac{1}{6}((0.1)^3 + 3(0.1)^3 + 3(0.1)^3 + (0.1)^3) = \frac{8}{6}(0.1)^3 \le 0.00134$$

bulunur (yuvarlak olarak). $|x| \le 0.1$ ve $|y| \le 0.1$ ise, hata 0.00134'ü aşmayacaktır. ■

ALIŞTIRMALAR 14.10

Kuadratik ve Kübik Yaklaşımları Bulmak

1–10 alıştırmalarında, orijinde $f(x, y)$'nin Taylor formülünü kullanarak, f'nin orijin civarında kuadratik ve kübik yaklaşımlarını bulun.

1. $f(x, y) = xe^y$

2. $f(x, y) = e^x \cos y$

3. $f(x, y) = y \sin x$

4. $f(x, y) = \sin x \cos y$

5. $f(x, y) = e^x \ln(1 + y)$

6. $f(x, y) = \ln(2x + y + 1)$

7. $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$

8. $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$

9. $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x - y}$ **10.** $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x - y + xy}$

11. Taylor formülünü kullanarak, $f(x, y) = \cos x \cos y$ 'nin orijin civarında kuadratik bir yaklaşımını bulun. $|x| \le 0.1$ ve $|y| \le 0.1$ ise, yaklaşımdaki hatayı bulun.

12. 12. Taylor formülünü kullanarak, $e^x \sin y$'nin orijin civarında kuadratik bir yaklaşımını bulun. $|x| \le 0.1$ ve $|y| \le 0.1$ ise, yaklaşımdaki hatayı bulun.

Bölüm 14 Bölüm Tekrar Soruları

1. İki bağımsız değişkenli reel değerli bir fonksiyon nedir? Ya üç bağımsız değişkenli? Örnek verin.

2. Düzlemdeki veya uzaydaki kümelerin açık olması ne demektir? Ya kapalı? Örnekler verin. Ne açık ne de kapalı olan kümelere örnekler verin.

3. İki bağımsız değişkenli bir $f(x, y)$ fonksiyonunun değerlerini grafik olarak nasıl gösterirsiniz? Aynı şeyi üç değişkenli bir $f(x, y, z)$ fonksiyonu için nasıl yaparsınız?

4. Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun $(x, y) \to (x_0, y_0)$ iken limitinin L olması ne anlama gelir? İki bağımsız değişkenli fonksiyonların limitlerinin temel özellikleri nelerdir?

5. İki (üç) değişkenli bir fonksiyonun tanım kümesinde bir noktada sürekli olması ne demektir? Bazı noktalarda sürekli, bazılarında süreksiz fonksiyonlara örnekler verin.

6. Sürekli fonksiyonların cebirsel kombinasyonları ve bileşkeleri hakkında ne söylenebilir?

7. Limitlerin var olmadığı ile ilgili iki yol testini açıklayın.

8. Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun $\partial f/\partial x$ ve $\partial f/\partial y$ kısmi türevleri nasıl tanımlanır? Nasıl yorumlanır ve hesaplanırlar?

9. Birinci mertebe kısmi türevler ile iki bağımsız değişkenli fonksiyonların sürekliliği arasındaki ilişki, tek bağımsız değişkenli reel değerli fonksiyonların birinci türevleri ile sürekliliği arasındaki ilişkiden nasıl farklıdır? Örnek verin.

10. Karışık ikinci mertebe kısmi türevlerle ilgili Karışık Türev Teoremi nedir? İkinci ve daha yüksek mertebeden kısmi türevleri hesaplamaya nasıl yardımcı olur? Örnekler verin.

11. Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilmesi ne demektir? Artım Teoremi diferansiyellenebilirlik hakkında ne söyler?

12. f_x ve f_y'yi inceleyerek bir $f(x, y)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilir olduğuna nasıl karar verirsiniz? f'nin diferansiyellenebilirliği ile bir noktada sürekliliği arasındaki ilişki nedir?

13. Zincir Kuralı nedir? İki bağımsız değişkenli fonksiyonlar için nasıl bir şekil alır? Üç bağımsız değişkenli fonksiyonlar için? Yüzeylerde tanımlanan fonksiyonlar için? Bu farklı şekilleri diyagramla nasıl gösterirsiniz? Örnekler verin. Hangi model bütün farklı şekilleri hatırlamamızı sağlar?

14. Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun bir P_0 noktasında bir **u** birim vektörü yönünde türevi nedir? Hangi değişim oranını tanımlar? Geometrik yorumu nedir? Örnekler verin.

15. Diferansiyellenebilir bir $f(x, y)$ fonksiyonunun gradiyent vektörü nedir? Fonksiyonların doğrultu türevleri ile arasındaki ilişki nedir? Üç bağımsız değişkenli fonksiyonlar için benzer sonuçları sıralayın.

16. Diferansiyellenebilir bir $f(x, y)$ fonksiyonunun bir seviye eğrisi üzerindeki bir noktada teğeti nasıl bulursunuz? Diferansiyellenebilir bir $f(x, y, z)$ fonksiyonunun bir seviye yüzeyi üzerindeki bir noktada teğet düzlemi ve normali nasıl bulursunuz? Örnekler verin.

17. Değişimi öngörmek için yönlü türevleri nasıl kullanırsınız?

18. İki değişkenli bir $f(x, y)$ fonksiyonunu (x_0, y_0) noktasında nasıl lineerize edersiniz? Bunu neden yapmak isteyeseniz? Üç değişkenli bir fonksiyon nasıl lineerize edilir?

19. İki (üç) bağımsız değişkenli fonksiyonların lineer yaklaşımlarının doğrulukları hakkında ne söyleyebilirsiniz?

20. (x, y) noktası (x_0, y_0)'dan yakınlardaki bir $(x_0 + dx, y_0 + dy)$ noktasına giderse, diferansiyellenebilir bir $f(x, y)$ fonksiyonunun değerindeki değişikliği nasıl öngörürsünüz? Bir örnek verin.

21. Diferansiyellenebilir bir $f(x, y)$ fonksiyonunun yerel minimum, maksimum ve eyer noktalarını nasıl tanımlarsınız? Örnekler verin.

22. Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun yerel ekstremum değerlerini belirlemek için hangi türev testleri vardır? Bunlar, ekstremum değerleri bulma işini nasıl kolaylaştırır? Örnekler verin.

23. xy-düzleminde kapalı sınırlı bir bölgede, sürekli bir $f(x, y)$ fonksiyonunun ekstremumları nasıl bulunur? Bir örnek verin.

24. Lagrange çarpanları yöntemini tanımlayın ve örnekler verin.

25. $w = f(x, y, z)$ fonksiyonunda x, y ve z değişkenleri bir $g(x, y, z) = 0$ denklemi ile sınırlanmışsa $(\partial w/\partial x)_y$ ifadesinin anlamı nedir? Bir ok diyagramı, bu kısmi türevi sınırlı değişkenlerle hesaplamanıza nasıl yardımcı olur? Örnekler verin.

26. Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun Taylor formülü, polinom yaklaşımlarını ve hata öngörülerini nasıl üretir?

Bölüm 14 Problemler

Tanım Kümesi, Değer Kümesi ve Seviye Eğrileri

1–4 problemlerinde, verilen fonksiyonun tanım ve değer kümelerini bulun ve seviye eğrilerini tanımlayın. Tipik bir seviye eğrisini çizin.

1. $f(x, y) = 9x^2 + y^2$

2. $f(x, y) = e^{x+y}$

3. $g(x, y) = 1/xy$

4. $g(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$

5–8 problemlerinde, verilen fonksiyonun tanım ve değer kümelerini bulun ve seviye yüzeylerini tanımlayın. Tipik bir seviye yüzeyini çizin.

5. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$

6. $g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$

7. $h(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

8. $k(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$

Limit Hesaplamak

9–14 alıştırmalarındaki limitleri hesaplayın.

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi, \ln 2)} e^y \cos x$

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2 + y}{x + \cos y}$

11. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x - y}{x^2 - y^2}$

12. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^3y^3 - 1}{xy - 1}$

13. $\lim\limits_{P\to(1, -1, e)} \ln|x + y + z|$

14. $\lim\limits_{P\to(1,-1,-1)} \tan^{-1}(x + y + z)$

Farklı yaklaşma yolları düşünerek, 15 ve 16 problemlerindeki limitlerin var olmadığını gösterin.

15. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y\neq x^2}} \dfrac{y}{x^2 - y}$

16. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$

17. Sürekli genişleme $(x, y) \neq (0, 0)$ için $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ olsun. $f(0,0)$'ı, f'yi orijinde sürekli yapacak şekilde tanımlamak mümkün müdürü? Neden?

18. Sürekli genişleme

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x - y)}{|x| + |y|}, & |x| + |y| \neq 0 \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

olsun. f, orijinde sürekli midir? Neden?

Kısmi Türevler

19–24 problemlerinde, fonksiyonun her değişkene göre kısmi türevini bulun.

19. $g(r, \theta) = r\cos\theta + r\sin\theta$

20. $f(x, y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

21. $f(R_1, R_2, R_3) = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$

22. $h(x, y, z) = \sin(2\pi x + y - 3z)$

23. $P(n, R, T, V) = \dfrac{nRT}{V}$ (İdeal Gaz Yasası)

24. $f(r, l, T, w) = \dfrac{1}{2rl}\sqrt{\dfrac{T}{\pi w}}$

İkinci Derece Kısmi Türevler

25–28 problemlerindeki fonksiyonların ikinci mertebeden kısmi türevlerini bulun.

25. $g(x, y) = y + \dfrac{x}{y}$

26. $g(x, y) = e^x + y\sin x$

27. $f(x, y) = x + xy - 5x^3 + \ln(x^2 + 1)$

28. $f(x, y) = y^2 - 3xy + \cos y + 7e^y$

Zincir Kuralı Hesaplamaları

29. $w = \sin(xy + \pi)$, $x = e^t$ ve $y = \ln(t + 1)$ ise, $t = 0$'da dw/dt'yi bulun.

30. $w = xe^y + y\sin z - \cos z$, $x = 2\sqrt{t}$, $y = t - 1 + \ln t$ ve $z = \pi t$ ise $t = 1$'de dw/dt'yi bulun.

31. $w = \sin(2x - y)$, $x = r + \sin s$, $y = rs$ ise $r = \pi$ ve $s = 0$ iken, $\partial w/\partial r$ ve $\partial w/\partial s$'yi bulun.

32. $w = \ln\sqrt{1 + x^2} - \tan^{-1}x$ ve $x = 2e^u\cos v$ ise $u = v = 0$ iken, $\partial w/\partial v$ ve $\partial w/\partial v$'yi bulun.

33. $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos 2t$ eğrisi üzerinde $t = 1$'de $f(x, y, z) = xy + yz + xz$'nin t'ye göre türevini bulun.

34. $w = f(s)$, s'nin diferansiyellenebilir bir fonksiyonuysa ve $s = y + 5x$ ise,

$$\frac{\partial w}{\partial x} - 5\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

olduğunu gösterin.

Kapalı Türev Alma

35 ve 36 problemlerindeki denklemlerin y'yi x'in diferansiyellenebilir bir fonksiyonu olarak tanımladığını varsayarak, dy/dx'in P noktasındaki değerini bulun.

35. $1 - x - y^2 - \sin xy = 0$, $P(0, 1)$

36. $2xy + e^{x+y} - 2 = 0$, $P(0, \ln 2)$

Doğrultu Türevleri

37–40 problemlerinde, f'nin P_0'da en hızlı arttığı ve azaldığı yönleri bulun ve her yönde f'nin türevini bulun. Ayrıca, f'nin P_0'da $\mathbf{v}$ vektörü yönündeki türevini bulun.

37. $f(x, y) = \cos x\cos y$, $P_0(\pi/4, \pi/4)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

38. $f(x, y) = x^2e^{-2y}$, $P_0(1, 0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

39. $f(x, y, z) = \ln(2x + 3y + 6z)$, $P_0(-1, -1, 1)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

40. $f(x, y, z) = x^2 + 3xy - z^2 + 2y + z + 4, \quad P_0(0, 0, 0),$
$\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

41. Hız yönünde türev $f(x, y, z) = xyz$'nin $t = \pi/3$'te

$$\mathbf{r}(t) = (\cos 3t)\mathbf{i} + (\sin 3t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$$

helisinin hız vektörünün yönündeki türevini bulun.

42. Maksimum doğrultu türevi $f(x, y, z) = xyz$'nin doğrultu türevinin (1, 1, 1) noktasında alabileceği en büyük değer nedir?

43. Verilen değerlerle doğrultu türevleri (1, 2) noktasında $f(x, y)$ fonksiyonunun (2, 2)'ye giden yönde değeri 2 olan bir doğrultu türevi ve (1, 1)'e giden yönde değeri –2 olan bir doğrultu türevi vardır.

a. $f_x(1, 2)$ ve $f_y(1, 2)$'yi bulun.

b. f'nin (1,2)'de (4, 6) noktasına giden yöndeki doğrultu türevini bulun.

44. $f(x, y)$ fonksiyonu (x_0, y_0)'da diferansiyellenebilir ise aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

a. $\mathbf{u}$ bir birim vektörse, f'nin (x_0, y_0)'da $\mathbf{u}$ yönündeki doğrultu türevi $(f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}) \cdot \mathbf{u}$'dur.

b. f'nin (x_0, y_0)'da $\mathbf{u}$ yönündeki doğrultu türevi bir vektördür.

c. f'nin (x_0, y_0)'daki doğrultu türevinin en büyük değeri ∇f yönündedir.

d. (x_0, y_0)'da, ∇f vektörü $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ eğrisine normaldir.

Gradiyentler, Teğet Düzlemleri ve Normal Doğrular

45 ve 46 problemlerinde, $f(x, y, z) = c$ yüzeyini verilen noktalardaki ∇f'le birlikte çizin.

45. $x^2 + y + z^2 = 0; \quad (0, -1, \pm 1), \quad (0, 0, 0)$

46. $y^2 + z^2 = 4; \quad (2, \pm 2, 0), \quad (2, 0, \pm 2)$

47 ve 48 Problemlerinde, $f(x, y, z) = c$ seviye yüzeyine P_0'da teğet olan düzlemi bulun. Ayrıca, yüzeye P_0'da normal olan doğrunun parametrik denklemlerini bulun.

47. $x^2 - y - 5z = 0, \quad P_0(2, -1, 1)$

48. $x^2 + y^2 + z = 4, \quad P_0(1, 1, 2)$

49 ve 50 problemlerinde, verilen noktada $z = f(x, y)$ yüzeyine teğet düzlemin denklemini bulun.

49. $z = \ln(x^2 + y^2), \quad (0, 1, 0)$

50. $z = 1/(x^2 + y^2), \quad (1, 1, 1/2)$

51 ve 52 problemlerinde, $f(x, y) = c$ seviye eğrisinin P_0 noktasındaki teğet ve normalinin denklemlerini bulun. Sonra doğruları ve seviye eğrisini P_0'daki ∇f ile birlikte çizin.

51. $y - \sin x = 1, \quad P_0(\pi, 1)$ **52.** $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{3}{2}, \quad P_0(1, 2)$

Eğrilerin Teğetleri

53 ve 54 problemlerinde, yüzeylerin kesişim eğrilerinin verilen noktadaki teğeti olan doğrunun denklemini bulun.

53. Yüzeyler: $x^2 + 2y + 2z = 4, \quad y = 1$
Nokta: $(1, 1, 1/2)$

54. Yüzeyler: $x + y^2 + z = 2, \quad y = 1$
Nokta: $(1/2, 1, 1/2)$

Lineerizasyonlar

55 ve 56 problemlerinde, $f(x, y)$ fonksiyonunun P_0 noktasındaki $L(x, y)$ lineerizasyonunu bulun. Sonra $f(x, y) \approx L(x, y)$ yaklaşımının R dikdörtgeni üzerindeki hatasının büyüklüğü E'nin bir üst sınırını bulun.

55. $f(x, y) = \sin x \cos y, \quad P_0(\pi/4, \pi/4)$

$R: \quad \left|x - \dfrac{\pi}{4}\right| \le 0.1, \quad \left|y - \dfrac{\pi}{4}\right| \le 0.1$

56. $f(x, y) = xy - 3y^2 + 2, \quad P_0(1, 1)$

$R: \quad |x - 1| \le 0.1, \quad |y - 1| \le 0.2$

57 ve 58 problemlerinde, fonksiyonların verilen noktalardaki lineerizasyonlarını bulun.

57. $f(x, y, z) = xy + 2yz - 3xz$, (1, 0, 0) ve (1, 1, 0)

58. $f(x, y, z) = \sqrt{2} \cos x \sin(y + z)$, $(0, 0, \pi/4)$ ve $(\pi/4, \pi/4, 0)$

Tahminler ve Değişime Duyarlılık

59. Bir boru hattının hacmini ölçmek Çapı yaklaşık 36 inç ve uzunluğu 1 mil olan bir boru hattı parçasının içindeki hacmi hesaplamak istiyorsunuz. Hangi ölçümde daha dikkatli olmanız gerekir—uzunlukta mı, çapta mı? Neden?

60. Değişime duyarlık (1, 2) noktası civarında, $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3$ fonksiyonu x'teki değişimlere mi, y'deki değişimlere mi daha duyarlıdır? Nereden biliyorsunuz?

61. Elektrik devresini değiştirme Bir elektrik devresindeki I (amper) akımının V (volt) gerilimi ile R (ohm) direncine $I = V/R$ denklemiyle bağlı olduğunu varsayın. Gerilim 24'ten 23 volta düşer ve direnç 100'den 80 ohma düşerse, I artar mı, azalır mı? Ne kadar? I'daki değişim voltajdaki bir değişime mi yoksa dirençteki bir değişime mi daha duyarlıdır? Nereden biliyorsunuz?

62. Bir elipsin alanını öngörmede maksimum hata En yakın milimetreye yuvarlama ile $a = 10$ cm ve $b = 16$ cm olarak ölçülen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ elipsinin hesaplanan alanı $A = \pi ab$'deki yüzde hatanın ne kadar olmasını beklersiniz?

63. Bir çarpımı öngörmedeki hata u ve v pozitif bağımsız değişkenler olmak üzere, $y = uv$ ve $z = u + v$ olsun.

a. u, %2'lik ve v de %3'lük bir hatayla ölçülüyorsa, hesaplanan y-değerindeki yüzde hata yaklaşık ne olur?

b. z'nin hesaplanan değerindeki yüzde hatanın y'nin değerindeki yüzde hatadan daha az olduğunu gösterin.

64. Kalp indisi Kalp çıktısı araştırmalarında (Bölüm 3.7, Alıştırma 25) farklı kişileri karşılaştırılabilir hale getirmek için, araştırmacılar ölçülen kalp çıktısını vücudun yüzey alanına bölerek, *kalp indisi* C'yi bulurlar:

$$C = \frac{\text{kalp çıktısı}}{\text{vücut yüzey alanı}}$$

Ağırlığı w kilogram ve boyu h santimetre olarak ölçülen bir kişinin B vücut yüzey alanına B'yi santimetre kare olarak veren

$$B = 71.84 w^{0.425} h^{0.725},$$

formülüyle yaklaşım yapılır. Aşağıdaki ölçümlere sahip birinin kalp indisini hesaplamak üzeresiniz:

Kalp çıktısı:	7 L/dak
Ağırlık:	70 kg
Yükseklik:	180 cm

Hesapta hangisi daha büyük bir etki yaratacaktır, ağırlığı ölçerken yapılan 1 kg'lik bir hata mı, yüksekliği ölçerken yapılan 1 cm'lik bir hata mı?

Yerel Ekstremumlar

65–70 problemlerindeki fonksiyonları, yerel maksimum, minimum ve eyer noktaları için test edin. Fonksiyonun bu noktalardaki değerlerini bulun.

65. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 4$

66. $f(x, y) = 5x^2 + 4xy - 2y^2 + 4x - 4y$

67. $f(x, y) = 2x^3 + 3xy + 2y^3$

68. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 15$

69. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2$

70. $f(x, y) = x^4 - 8x^2 + 3y^2 - 6y$

Mutlak Ekstremumlar

71–78 problemlerinde, f'nin R üzerinde mutlak maksimum ve minimum değerlerini bulun.

71. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 3y$

R: Birinci dörtte bir bölgeden $x + y = 4$ doğrusuyla kesilen üçgensel bölge.

72. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 1$

R: Birinci dörtte bir bölgede, koordinat eksenleri, $x = 4$ ve $y = 2$ doğrularıyla sınırlanan dikdörtgensel bölge.

73. $f(x, y) = y^2 - xy - 3y + 2x$

R: $x = \pm 2$ ve $y = \pm 2$ doğrularıyla çevrelenen kare bölge.

74. $f(x, y) = 2x + 2y - x^2 - y^2$

R: Birinci dörtte bir bölgede, koordinat eksenleri, $x = 2$, $y = 2$ doğrularıyla çevrelenen kare.

75. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y$

R: Alttan x-ekseni, üstten $y = x + 2$ doğrusu ve sağdan $x = 2$ doğrusu ile sınırlanan üçgensel bölge.

76. $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4 + 16$

R: Alttan $y = -2$ doğrusu, üstten $y = x$ doğrusu ve sağdan $x = 2$ doğrusuyla sınırlanan üçgensel bölge

77. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2$

R: $x = \pm 1$ ve $y = \pm 1$ doğrularıyla çevrelenen kare bölge.

78. $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3 + 1$

R: $x = \pm 1$ ve $y = \pm 1$ doğrularıyla çevrelenen kare bölge.

Lagrange Çarpanları

79. Bir çember üzerinde ekstremum $f(x, y) = x^3 + y^2$'nin $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindeki ekstremum değerlerini bulun.

80. Bir çember üzerinde ekstremum $f(x, y) = xy$'nin $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindeki ekstremum değerlerini bulun.

81. Bir disk içinde ekstremum $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2y$'nin $x^2 + y^2 \leq 1$ birim diski içindeki ekstremum değerlerini bulun.

82. Bir disk içinde ekstremum $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - xy$'nin $x^2 + y^2 \leq 9$ diski içindeki ekstremum değerlerini bulun.

83. Bir küre üzerinde ekstremum $f(x, y, z) = x - y + z$'nin $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ birim küresi üzerindeki ekstremum değerlerini bulun.

84. Orijine minimum uzaklık $z^2 - xy = 4$ yüzeyi üzerinde orijine en yakın noktaları bulun.

85. Bir kutunun maliyetini minimize etmek Kapalı dikdörtgen şeklinde bir kutunun hacmi V cm^3 olacaktır. Kutuda kullanılan malzemenin masrafı taban ve tavan için a cent/cm^2, arka ve ön için b cent/cm^2 ve kalan yüzler için c cent/cm^2'dir. Hangi boyutlar toplam malzemenin maliyetini minimize eder?

86. En küçük hacim (2, 1, 2) noktasından geçen ve birinci sekizde bir bölgeden en küçük hacmi kesen $x/a + y/b + c/z = 1$ düzlemini bulun.

87. Yüzeylerin kesişim eğrisi üzerinde ekstremum $f(x, y, z) = x(y + z)$'nin $x^2 + y^2 = 1$ dik silindiriyle $xz = 1$ hiperbolik silindirinin kesişim eğrisi üzerindeki ekstremum değerlerini bulun.

88. Bir düzlem ile bir koninin kesişim eğrisi üzerinde orijine en küçük uzaklık $x + y + z = 1$ düzlemi ile $z^2 = 2x^2 + 2y^2$ konisinin kesişim eğrisi üzerinde orijine en yakın noktayı bulun.

Kısıtlanmış Değişkenlerle Kısmi Türevler

89 ve 90 problemlerinde, işe değişkenler arasındaki ilişkileri gösteren bir diyagram çizerek başlayın.

89. $w = x^2 e^{yz}$ ve $z = x^2 - y^2$ ise, aşağıdakileri bulun.

a. $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$ **b.** $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_x$ **c.** $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$

90. $U = f(P, V, T)$, ideal gaz yasası $PV = nRT$'ye (n ve R birer sabit) uyan bir gazın iç enerjisi olsun. Aşağıdakileri bulun.

a. $\left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_P$ **b.** $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T$

Teori ve Örnekler

91. $w = f(r, \theta)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ve $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ olsun. $\partial w/\partial x$ ile $\partial w/\partial y$'yi bulun ve yanıtlarınızı r ve θ cinsinden ifade edin.

92. $z = f(u, v)$, $u = ax + by$ ve $v = ax - by$ olsun. z_x ile z_y'yi f_u, f_v ve a, b sabitleri cinsinden ifade edin.

93. a ve b sabit, $w = u^3 + \tanh u + \cos u$ ve $u = ax + by$ ise,

$$a\frac{\partial w}{\partial y} = b\frac{\partial w}{\partial x}$$

olduğunu gösterin.

94. Zincir Kuralını kullanmak $w = \ln(x^2 + y^2 + 2z)$, $x = r + s$, $y = r - s$ ve $z = 2rs$ ise, Zincir Kuralıyla w_r ile w_s'yi bulun. Sonra yanıtınızı başka bir yolla kontrol edin.

95. Vektörler arasında açı $e^u \cos v - x = 0$ ve $e^u \sin v - y = 0$ denklemleri u ve v'yi x ile y'nin diferansiyellenebilir fonksiyonları olarak tanımlar.

$$\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j}$$

vektörlerinin arasındaki açının sabit olduğunu gösterin.

96. Kutupsal koordinatlar ve ikinci mertebe türevler $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ kutupsal koordinatlarını tanımlamak $f(x, y)$'yi $g(r, \theta)$'ya çevirir. $(r, \theta) = (2, \pi/2)$ noktasında,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1$$

ise, o noktada $\partial^2 g/\partial\theta^2$ değerini bulun.

97. Bir düzleme paralel normal doğru

$$(y + z)^2 + (z - x)^2 = 16$$

Yüzeyi üzerinde normali yz-düzlemine paralel noktaları bulun.

98. xy-düzlemine paralel teğet düzlem

$$xy + yz + zx - x - z^2 = 0$$

yüzeyinin üzerinde teğet düzlemin xy-düzlemine paralel olduğu noktaları bulun.

99. Gradiyent vektör konum vektörüne paralel $\nabla f(x, y, z)$' nin her zaman $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ konum vektörüne paralel olduğunu varsayın. Herhangi bir a için, $f(0, 0, a) = f(0, 0, -a)$ olduğunu gösterin.

100. Her yönde doğrultu türevi var fakat gradiyent yok

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

fonksiyonunun orijinde her yöndeki doğrultu türevinin 1'e eşit olduğunu, ama f'nin orijinde gradiyentinin bulunmadığını gösterin.

101. Orijinden geçen normal doğru $xy + z = 2$ yüzeyinin $(1, 1, 1)$'deki normalinin orijinden geçtiğini gösterin.

102. Teğet düzlem ve normal doğru

a. $x^2 - y^2 + z^2 = 4$ yüzeyini çizin.

b. Yüzeye $(2, -3, 3)$'te normal olan bir vektör bulun. Vektörü de çiziminize ekleyin.

c. $(2, -3, 3)$'teki teğet düzlemin ve normalin denklemlerini bulun.

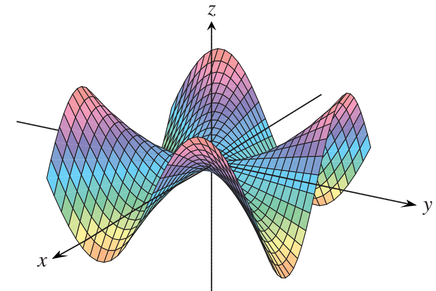
Bölüm 14 Ek ve İleri Alıştırmalar

Kısmi Türevler

1. Orijinde eyer noktalı bir fonksiyon Bölüm 14.2'deki Alıştırma 50'yi yaptıysanız,

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

fonksiyonunun (aşağıdaki şekle bakın) $(0, 0)$'da sürekli olduğunu biliyorsunuzdur. $f_{xy}(0, 0)$ ve $f_{yx}(0, 0)$'ı bulun.



2. **Kısmi türevlerinden bir fonksiyonu bulmak** Birinci mertebe kısmi türevleri $\partial w/\partial x = 1 + e^x \cos y$ ve $\partial w/\partial y = 2y - e^x \sin y$ ve (ln 2, 0) noktasındaki değeri ln 2 olan bir $w = f(x, y)$ fonksiyonu bulun.

3. **Leibniz kuralının bir ispatı** Leibniz kuralı, f fonksiyonu [a, b] aralığında sürekliyse ve $u(x)$ ile $v(x)$ de x'in, değerleri $[a, b]$'de olan diferansiyellenebilir fonksiyonlarıysa,

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$$

olduğunu söyler. Kuralı

$$g(u, v) = \int_u^v f(t)\, dt, \qquad u = u(x), \qquad v = v(x)$$

alarak ve dg/dx'i Zincir Kuralıyla hesaplayarak ispatlayın.

4. **Sınırlı ikinci-kısmi türevlerinden bir fonksiyonu bulmak** $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ olmak üzere r'nin iki kere türetilebilen bir f fonksiyonu için

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$$

olduğunu varsayın. Belirli a ve b sabitleri için

$$f(r) = \frac{a}{r} + b$$

olduğunu gösterin.

5. **Homojen fonksiyonlar** Her t, x ve y için $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ ise fonksiyonu *n. dereceden* (n negatif olmayan bir tamsayı) *homojendir*. Böyle bir (yeterince türetilebilir) fonksiyon için, aşağıdakileri ispatlayın.

a. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$

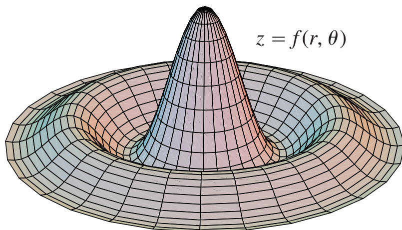
b. $x^2\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + 2xy\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + y^2\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = n(n-1)f.$

6. **Kutupsal koordinatlarda yüzey** r ve θ kutupsal koordinatlar olmak üzere

$$f(r, \theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin 6r}{6r}, & r \neq 0 \\ 1, & r = 0 \end{cases}$$

olsun. Aşağıdakileri bulun.

a. $\lim_{r \to 0} f(r, \theta)$ **b.** $f_r(0, 0)$ **c.** $f_\theta(r, \theta), \quad r \neq 0.$



Gradiyentler ve Teğetler

7. **Konum vektörlerinin özellikleri** $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ve $r = |\mathbf{r}|$ olsun.

a. $\nabla r = \mathbf{r}/r$ olduğunu gösterin.

b. $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$ olduğunu gösterin.

c. Gradiyenti $\mathbf{r}$'ye eşit olan bir fonksiyon bulun.

d. $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r\, dr$ olduğunu gösterin.

e. Herhangi bir sabit $\mathbf{A}$ vektörü için, $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{A}$ olduğunu gösterin.

8. **Teğete ortogonal gradiyent** Diferansiyellenebilir bir $f(x, y)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilir bir $x = g(t)$, $y = h(t)$ eğrisi üzerinde, değerinin sabit bir c olduğunu; yani her t için

$$f(g(t), h(t)) = c$$

olduğunu varsayın. Bu denklemin iki tarafının da t'ye göre türevini alarak, eğrinin üzerindeki her noktada ∇f'nin eğrinin teğet vektörüne normal olduğunu gösterin.

9. **Bir yüzeye teğet eğri** (0, 0, 1)'de,

$$\mathbf{r}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + (t \ln t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

eğrisinin

$$xz^2 - yz + \cos xy = 1$$

yüzeyine teğet olduğunu gösterin.

10. **Bir yüzeye teğet eğri** (0, –1, 1)'de,

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{t^3}{4} - 2\right)\mathbf{i} + \left(\frac{4}{t} - 3\right)\mathbf{j} + \cos(t - 2)\mathbf{k}$$

eğrisinin

$$x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 0$$

yüzeyine teğet olduğunu gösterin.

Ekstremum Değerler

11. **Bir yüzey üzerinde ekstremumlar** z'nin $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ yüzeyi üzerindeki olası tek maksimum ve minimumlarının (0, 0) ve (3, 3)'te olduğunu gösterin. (0,0)'da ne bir maksimum ne de bir minimum bulunduğunu gösterin. z'nin (3, 3)'te bir maksimum veya minimumu olup olmadığını belirleyin.

12. **Kapalı birinci bölgede maksimum** $f(x, y) = 6xye^{-(2x+3y)}$'nin kapalı birinci dörtte bir bölgedeki (negatif olmayan eksenleri içerir) maksimum değerini bulun.

13. **Birinci sekizde-bir bölgeden kesilen minimum hacim** $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ düzlemleri ve birinci sekizde-bir bölgedeki bir noktada

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

elipsoidine teğet bir düzlemle sınırlı bölgenin, minimum hacmini bulun.

14. ***xy*-düzleminde bir doğrudan bir parabole minimum uzaklık** $y = x + 1$ ve $u = v^2$ kısıtlamaları ile $f(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2$ fonksiyonunu minimize ederek, xy-düzleminde $y = x + 1$ doğrusundan $y^2 = x$ parabolüne olan minimum uzaklığı bulun.

Teori ve Örnekler

15. Birinci mertebe kısmi türevlerin sınırlı olması sürekliliği gerektirir Şu teoremi ispatlayın: $f(x, y)$, xy-düzleminin açık bir R bölgesinde tanımlı ise ve f_x ile f_y R'de sınırlı ise $f(x,y)$ fonksiyonu R'de süreklidir (Sınırlılık varsayımı temeldir).

16. $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$'nin diferansiyellenebilir bir $f(x, y, z)$ fonksiyonunun tanım kümesi içinde düzgün bir eğri olduğunu varsayın. df/dt, ∇f ve $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ arasındaki ilişkiyi tanımlayın. Eğri üzerinde, f'nin eğri üzerindeki diğer değerlerine göre ekstremum değerlerinin bulunduğu iç noktalarda ∇f ile $\mathbf{v}$ hakkında ne söylenebilir? Yanıtınızı açıklayın.

17. Kısmi türevlerinden fonksiyonu bulmak f ve g'nin,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y},$$

olacak şekilde, x ve y'nin fonksiyonları olduklarını ve

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f(1, 2) = g(1, 2) = 5 \quad \text{ve} \quad f(0, 0) = 4$$

olduğunu varsayın. $f(x, y)$ ve $g(x, y)$'yi bulun.

18. Değişim oranının değişim oranı $f(x, y)$ iki değişkenli bir fonksiyon ise ve $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ bir birim vektörse, $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$'nin $f(x, y)$'nin (x, y)'de $\mathbf{u}$ yönündeki değişim oranı olduğunu biliyoruz. f'nin (x, y)'de $\mathbf{u}$ yönündeki değişim oranının değişim oranı için benzer bir formül bulun.

19. Isı arayan bir parçacığın yolu Isı arayan bir parçacığın düzlemdeki herhangi bir (x, y) noktasında maksimum sıcaklık artışı yönünde ilerleme özelliği vardır. (x, y)'deki sıcaklık $T(x, y) = -e^{-2y} \cos x$ ise, ısı arayan parçacığın $(\pi/4, 0)$ noktasındaki yolu için bir $y = f(x)$ denklemi bulun.

20. Sekmeden sonra hız Bir doğru üzerinde sabit $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ hızıyla ilerleyen bir parçacık $(0, 0, 30)$ noktasından geçmekte ve $z = 2x^2 + 3y^2$ yüzeyine çarpmaktadır. Parçacık yüzeyden, yansıma açısı geliş açısına eşit olacak şekilde sekmektedir. Hız kaybı olmadığını varsayarsak, sektikten sonra parçacığın hızı nedir? Yanıtınızı basitleştirin.

21. Bir yüzeye teğet doğrultu türevleri S, $f(x, y) = 10 - x^2 - y^2$'nin grafiği olan yüzey olsun. Uzayda her (x, y, z) noktasında sıcaklığın $T(x, y, z) = x^2y + y^2z + 4x + 14y + z$ olduğunu varsayın.

a. S yüzeyine $(0, 0, 10)$ noktasında teğet, olası bütün yönlerin arasından, hangi yön $(0, 0, 10)$'daki sıcaklığın değişim oranını maksimum yapar?

b. S'ye $(1, 1, 8)$ noktasında teğet olan hangi yön sıcaklığın değişim oranını bir maksimum yapar?

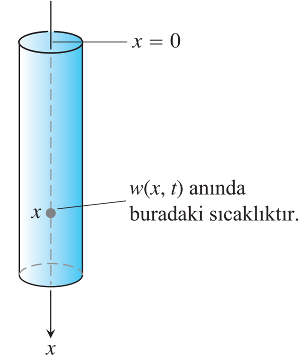
22. Bir sondaj kuyusu Düz bir toprak parçası üzerinde, jeologlar doğrusal bir kuyu kazmış ve 1000 ft'te bir mineral yatağına rastlamışlardır. İlk kuyunun 100 ft kuzeyinde bir kuyu daha kazmış ve bu sefer mineral yatağını 950 ft'te bulmuşlardır. İlk kuyunun 100 ft doğusunda üçüncü bir kuyuda mineral yatağı 1025 ft'te bulunmuştur. Jeologların mineral yatağının kubbe şeklinde olduğuna inanmak için nedenleri vardır ve ekonomik nedenlerden dolayı yatağın yüzeye en yakın olduğu yeri bulmak istemektedirler. Yüzeyin xy-düzlemi olduğunu varsayarak, jeologların dördüncü kuyuyu birinci kuyunun hangi tarafında kazmalarını önerirsiniz?

Bir Boyutlu Isı Denklemi

$w(x, t)$, kenarları mükemmel şekilde yalıtılmış düzgün bir iletken çubukta (aşağıdaki şekle bakın) t anında x konumundaki sıcaklığı temsil ediyorsa, w_{xx} ve w_t kısmi türevleri

$$w_{xx} = \frac{1}{c^2} w_t$$

şeklinde bir diferansiyel denklemi sağlar. Bu denkleme **bir boyutlu ısı denklemi** denir. Pozitif c^2 sabitinin değeri çubuğun yapıldığı malzemeyle belirlenir. Geniş bir malzeme yelpazesi için deneysel olarak belirlenmiştir. Verilen bir uygulamada, uygun değer bir tablodan bulunur. Örneğin, kuru toprak için, $c^2 = 0.19\ \text{ft}^2/\text{gündür}$.



Kimya ve biyokimyada, ısı denklemi **difüzyon denklemi** olarak bilinir. Bu bağlamda, $w(x, t)$ sıvıyla dolu bir tüpten yayılan çözünmüş bir maddenin, örneğin tuzun, konsantrasyonunu temsil eder. $w(x, t)$'nin değeri bir x noktasının t anındaki konsantrasyonudur. Başka uygulamalarda, $w(x, t)$ bir gazın uzun, ince bir borudan yayılmasını temsil eder.

Elektrik mühendisliğinde, ısı denklemi, **telgraf denklemleri** olarak adlandırılan

$$v_{xx} = RCv_t$$

ve

$$i_{xx} = RCi_t$$

şeklinde ortaya çıkar. Bu denklemler, koaksiyel bir kablodaki veya kaçağın ve endüktansın ihmal edilebilir olduğu başka bir kablodaki v gerilimini ve i akımını tanımlarlar. Bu denklemlerdeki fonksiyonlar ve sabitler şöyledir:

$v(x, t) = x$ noktasında t anındaki gerilim

R = birim uzunluktaki direnç

C = birim kablo uzunluğundaki topraklama kapasitansı

$i(x, t) = x$ noktasında t anındaki akım

23. r bir sabit olmak üzere, $w = e^{rt} \sin \pi x$ şeklindeki bir boyutlu ısı denkleminin bütün çözümlerini bulun.

24. $w = e^{rt} \sin kx$ şeklinde olan ve $w(0, t) = 0$ ve $w(L, t) = 0$ koşullarını sağlayan bir boyutlu ısı denkleminin bütün çözümlerini bulun. $t \to \infty$ iken, bu çözümlere ne olur?

Bölüm 14 Teknoloji Uygulama Projeleri

Mathematica/Maple Module

Yüzeyleri Çizmek

Yüzeylerin, konturların ve seviye eğrilerinin çizimlerini etkili olarak üretir

Mathematica/Maple Module

Kaykay'ın Arkasındaki Matematiği Araştırmak : Doğrultu Türevlerinin Analizi

Bir kaykay, önce bir seviye yüzeyi üzerinde, sonra bir rampada ve son olarak bir paraboloid üzerinde tanıtılır. Doğrultu türevlerini kaykay cinsinden hesaplayın, çizin ve analiz edin.

Mathematica/Maple Module

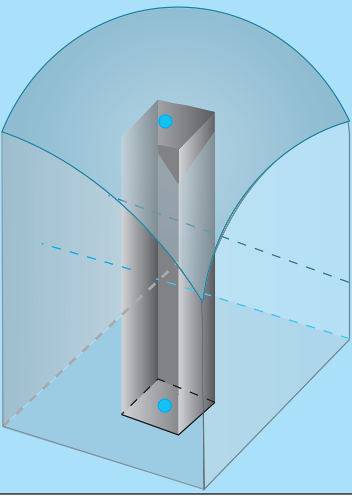
Kalıp Aramak, Okunan Değerlere En Küçük Kareler Yöntemini Uygulamak

Bir sayısal veri noktaları kümesine, noktalardan doğruya dik uzaklıkların kareleri toplamını minimize eden doğruyu seçerek, bir doğru uydurun.

Mathematica/Maple Module

Lagrange Kaykaya Gider: Ne Kadar Yükselir?

Kaykay'a geri dönün ve kaykaycıların serüvenlerini, Lagrange çarpanlarını kullanarak, maksimum ve minimum yükseklikler için hem grafik ve hem de analitik yönden analiz edin.



Bölüm

15

Katlı Integraller

GİRİŞ Bu bölümde, iki değişkenli bir $f(x, y)$ fonksiyonunun, düzlemde bir bölge üzerindeki integralini ve üç değişkenli bir $f(x, y, z)$ fonksiyonunun, uzayda bir bölge üzerindeki integralini ele alıyoruz. Bu integrallere *katlı integraller* denir ve Bölüm 5'te tanıtılan tek değişkenli integrallerde olduğu gibi yakınsayan Riemann toplamlarının limitleri olarak tanımlanırlar. Katlı integralleri, toplam kütle veya değişen yoğunluklu bir cismin açısal momentumu ve genel eğrisel sınırlı bir cismin hacmi gibi iki veya üç boyutta değişen nicelikleri hesaplamakta kullanabiliriz.

15.1 Katlı İntegraller

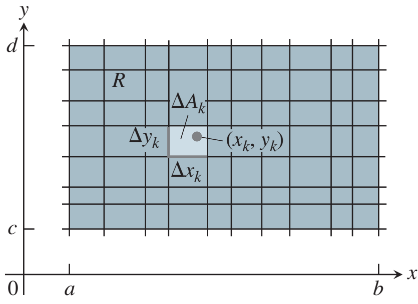
Bölüm 5'te, sürekli bir $f(x)$ fonksiyonunun bir $[a, b]$ aralığındaki belirli integralini Riemann toplamlarının bir limiti olarak tanımladık. Bu bölümde, bu fikri, iki değişkenli sürekli bir $f(x, y)$ fonksiyonunun, düzlemde sınırlı bir R bölgesi üzerindeki integralini tanımlamak için genişletiyoruz. Her iki durumda da integraller, yakınsayan Riemann toplamlarının limitleridir. Tek değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonunun integrali için Riemann toplamları, sonlu bir aralığı kısa alt aralıklara bölmek, her alt aralığın uzunluğunu, alt aralıktaki bir c_k noktasında f'nin değeri ile çarpmak ve bütün çarpımları toplamakla elde edilir. İki katlı integralleri kurmak için benzer bir bölme, çarpma ve toplama yöntemi kullanılır. Ancak, bu defa kısa alt aralıklar yerine, düzlemsel bir R bölgesini küçük dikdörtgenlere böleriz. Sonra, her dikdörtgenin alanını, dikdörtgen içindeki bir noktada f'nin değeri ile çarpar ve sonunda bütün bu çarpımları toplarız. f sürekli olduğunda, her küçük dikdörtgen hem boydan hem enden küçülürken, bu toplamlar bir tek sayıya yakınsar. Limit, f'nin R üzerindeki iki katlı integralidir. Tek katlı integrallerde olduğu gibi, katlı integralleri ters türevler yardımıyla hesaplayabiliriz. Bu bizi, iki katlı bir integrali, Riemann toplamlarının bir limiti olarak, doğrudan tanımından hesaplama güçlüğünden kurtarır. Katlı integrallerin hesaplanmasında ortaya çıkan asıl problem, integrasyon sınırlarının belirlenmesinde yatar. Bölüm 5'teki integraller, iki uç noktası ile belirlenen bir aralık üzerinde hesaplanırken, katlı integraller düzlemde veya uzayda bir bölgede hesaplanırlar. Bu, sadece sabitler değil, değişkenler içeren integrasyon sınırlarına neden olur. İntegrasyon bölgelerini tanımlamak, katlı integrallerin hesaplanmasında ortaya çıkan yeni temel meseledir.

Dikdörtgenler Üzerinde İki Katlı İntegraller

İki katlı integraleri araştırmamıza, en basit düzlemsel bölge tipini, bir dikdörtgeni, ele alarak başlıyoruz. Dikdörtgensel bir R

$$R:\ a \le x \le b, \quad c \le y \le d$$

bölgesi üzerinde tanımlı bir $f(x, y)$ fonksiyonu düşünelim.



ŞEKİL 15.1 R bölgesini $\Delta A_k = \Delta x_k\, \Delta y_k$ alanlı küçük dikdörtgenlere ayıran dikdörtgensel şebeke.

R'yi, x- ve y-eksenlerine paralel doğrulardan oluşan bir doğrular ağı ile küçük dikdörtgenlere böleriz (Şekil 15.1). Doğrular, R'yi dikdörtgensel n parçaya böler ve her parçanın boyu ve eni küçüldükçe böyle parçaların sayısı n giderek artar. Bu dikdörtgenler R'nin bir bölünüşünü oluştururlar. Genişliği Δx ve yüksekliği Δy olan küçük bir dikdörtgensel parçanın alanı $\Delta A = \Delta x \Delta y$ dir. R'nin bölünüşünü oluşturan küçük parçaları belli bir sırada numaralandırırsak, k. küçük dikdörtgenin alanı ΔA_k olmak üzere, alanları $\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots, \Delta A_n$ ile verilir.

R üzerinde bir Riemann toplamı oluşturmak için k. küçük dikdörtgenin içinde bir (x_k, y_k) noktası seçer, fonksiyonun bu noktadaki değeri ile ΔA_k alanını çarpar ve bütün bu çarpımları toplarız:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\, \Delta A_k$$

k. küçük dikdörtgenin içinden (x_k, y_k) noktasını nasıl seçtiğimize bağlı olarak, S_n için farklı değerler elde edebiliriz.

R'nin bölünüşündeki bütün küçük dikdörtgenlerin genişlikleri ve yükseklikleri sıfıra yaklaşırken bu Riemann toplamlarına ne olduğu ile ilgileniyoruz. P bölünüşünün, $\|P\|$ ile gösterilen **norm**'u, bölünüşteki dikdörtgenlerin genişliklerinin veya yüksekliklerinin en büyüğüdür. $\|P\| = 0.1$ ise R'nin bölünüşündeki bütün dikdörtgenlerin genişlikleri en çok ve yükseklikleri en çok 0.1 dir. Bazen P'nin normu sıfıra yaklaşırken, ($\|P\| \to 0$ ile gösterilir) Riemann toplamları yakınsar. Bu durumda limit

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\, \Delta A_k$$

olarak yazılır. $\|P\| \to 0$ iken, dikdörtgenler daralırlar, kısalırlar ve sayıları, n, giderek artar. Dolayısıyla bu limiti, $n \to \infty$ ve $\|P\| \to 0$ iken $\Delta A_k \to 0$ olduğunu göz önünde bulundurarak,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\, \Delta A_k$$

şeklinde de yazabiliriz.

Bu çeşit bir limitin içerdiği bir çok seçenek vardır. Küçük dikdörtgenler topluluğu, R'nin dikdörtgensel bir bölünüşünü tanımlayan yatay ve dikey doğrular şebekesiyle belirlenir. Bu şekilde belirlenen her küçük dikdörtgen içinde, f'nin hesaplandığı, keyfi bir (x_k, y_k) noktasının seçimi vardır. Bu seçimler birlikte, tek bir Riemann toplamı tanımlarlar. Bir limit oluşturmak için, dikdörtgenlerinin hem genişlikleri ve hem de yükseklikleri sıfıra giden ve dikdörtgenlerinin sayısı sonsuza giden bölünüşler seçerek, bütün süreci tekrar tekrar yineleriz.

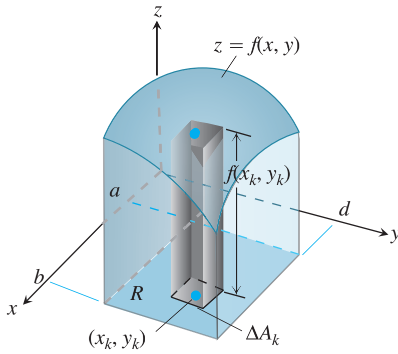
Hangi seçimler yapılırsa yapılsın, S_n toplamlarının, aynı limit değerine eşit olan birer limiti varsa f'ye integrallenebilir bir fonksiyon ve

$$\iint_R f(x, y)\, dA \qquad \text{veya} \qquad \iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

ile gösterilen limit değerine de f'nin R üzerindeki **iki katlı integrali** denir. Bölüm 5'te incelenen tek değişken durumundaki gibi, R üzerinde sürekli olan bir $f(x, y)$ fonksiyonunun integrallenebilir olduğu gösterilebilir. Sadece sonlu sayıda noktada veya düzgün eğri üzerinde süreksiz olanlar gibi bir çok süreksiz fonksiyon da integrallenebilir. Bunların ispatını daha ileri seviyedeki derslere bırakıyoruz.

Hacim Olarak İki Katlı İntegraller

$f(x, y)$, xy–düzleminde dikdörtgensel bir R bölgesi üzerinde pozitif bir fonksiyon iken, f'nin R bölgesi üzerindeki iki katlı integralini, xy–düzleminin üst tarafından alttan R ve



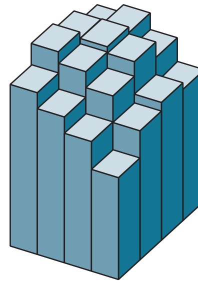
ŞEKİL 15.2 Katı cisimlere dikdörtgensel kutularla yaklaşımda bulunmak, daha genel katı cisimlerin hacimlerini iki katlı integraller olarak tanımlamamızı sağlar. Burada gösterilen katı cismin hacmi $f(x, y)$'nin R bölgesi üzerinde iki katlı integralidir.

üstten $z = f(x, y)$ yüzeyi ile sınırlı, 3-boyutlu bir katı bölgenin hacmi olarak yorumlayabiliriz (Şekil 15.2). $S_n = \sum f(x_k, y_k)\Delta A_k$ toplamındaki her $f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$ terimi, katı cismin ΔA_k tabanı üstünde bulunan kısmının hacmine yaklaşımda bulunan dikey bir dikdörtgensel kutunun hacmidir. Böylece S_n toplamı, prizmanın toplam hacmi demek istediğimiz şeye yaklaşımda bulunur. Bu hacmi, $n \to \infty$ için $\Delta A_k \to 0$ olmak üzere

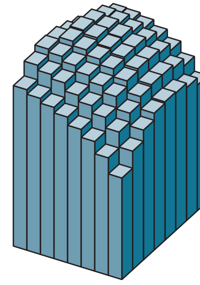
$$\text{Hacim} = \lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f(x, y)\, dA$$

olarak *tanımlarız.*

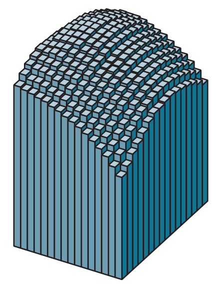
Bekleyebileceğiniz gibi, bu daha genel hacim hesaplama yöntemi Bölüm 6'daki yöntemlerle uyuşur, ama bunu burada ispatlamayacağız. Şekil 15.3 hacime, kutuların sayısı n'nin artmasıyla giderek daha doğru hale gelen, Riemann toplamı yaklaşımlarını göstermektedir.



(a) $n = 16$



(b) $n = 64$



(c) $n = 256$

ŞEKİL 15.3 n artarken Riemann toplamı yaklaşımları, Şekil 15.2'de gösterilen katı cismin toplam hacmine yaklaşır.

İki Katlı İntegralleri Hesaplamada Fubini Teoremi

xy-düzleminde R: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$ dikdörtgensel bölgesinin üzerinde, $z = 4 - x - y$ düzleminin altında kalan hacmi hesaplamak istediğimizi varsayın. x-eksenine dik dilimlerle, Bölüm 6.1'deki dilimleme yöntemini kullanırsak (Şekil 15.4), hacim, $A(x)$ değeri x'teki kesit alanı olmak üzere,

$$\int_{x=0}^{x=2} A(x)\, dx \tag{1}$$

olur. Her x değerinde, $A(x)$ değerini, x'teki kesit düzleminde $z = 4 - x - y$ eğrisinin altında kalan alan olan

$$A(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\, dy \tag{2}$$

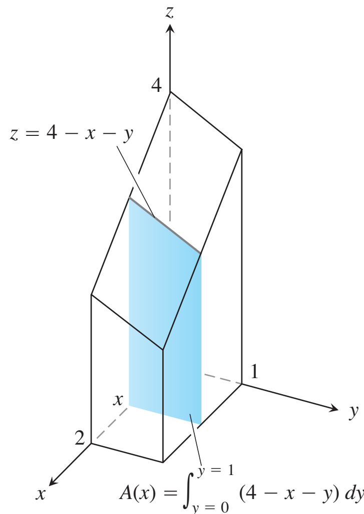
integrali olarak hesaplayabiliriz. $A(x)$'i hesaplarken, x sabit tutulur ve integrasyon y'ye göre yapılır. (1) ve (2) denklemlerini birleştirirsek, tüm cismin hacminin

$$\text{Hacim} = \int_{x=0}^{x=2} A(x)\, dx = \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\, dy \right) dx$$

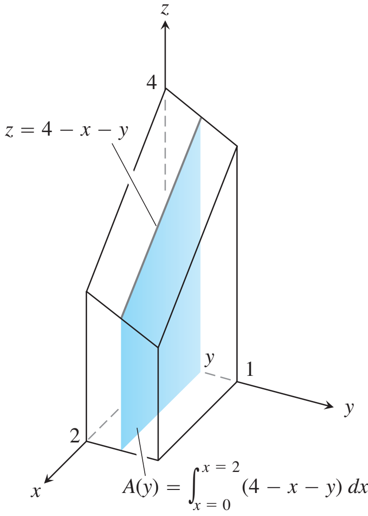
$$= \int_{x=0}^{x=2} \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_{x=0}^{x=2} \left(\frac{7}{2} - x \right) dx$$

$$= \left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 5 \tag{3}$$

olduğunu görürüz.



ŞEKİL15.4 $A(x)$ kesit alanını elde etmek için, x'i sabit tutar ve y'ye göre integral alırız.



ŞEKİL 15.5 $A(y)$ kesit alanını elde etmek için, y'yi sabit tutar ve x'e göre integral alırız.

İntegralleri hesaplamadan, sadece hacim için bir formül yazmak isteseydik,

$$\text{Hacim} = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x - y)\,dy\,dx$$

yazabilirdik. Tekrarlı integral olarak tanımlanan sağ taraftaki ifade hacmin, x'i sabit tutarak $4 - x - y$'yi $y = 0$'dan $y = 1$'e kadar y'ye göre integre edip, sonra da ortaya çıkan ifadeyi $x = 0$'dan $x = 2$'ye kadar, x'e göre integre ederek bulunduğunu söyler. 0 ve 1 integrasyon sınırları y ile ilgilidir. Dolayısıyla bunlar dy'ye daha yakın olan integral üzerine yerleştirilmiştir. İntegrasyonun diğer sınırları, 0 ve 2, x değişkeni ile ilgilidir, dolayısıyla dx ile eşlenen dıştaki integral işareti üzerine yerleştirilmişlerdir.

Hacmi y-eksenine dik düzlemlerle dilimleyerek hesaplasaydık ne olurdu (Şekil 15.5)? y'nin bir fonksiyonu olarak, tipik kesit alanı

$$A(y) = \int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y)\,dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_{x=0}^{x=2} = 6 - 2y \qquad (4)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla bütün cismin hacmi, daha önceki hesabımızla uyumlu olarak

$$\text{Hacim} = \int_{y=0}^{y=1} A(y)\,dy = \int_{y=0}^{y=1} (6 - 2y)\,dy = \left[6y - y^2\right]_0^1 = 5$$

bulunur.

Yine,

$$\text{Hacim} = \int_0^1 \int_0^2 (4 - x - y)\,dx\,dy$$

yazarak, hacim için bir tekrarlı integral formülü verebiliriz. Sağ taraftaki ifade, hacmi, (4) denklemindeki gibi $4 - x - y$'yi $x = 0$'dan $x = 2$'ye kadar x'e göre integre edip sonra da sonucu $y = 0$'dan $y = 1$'e kadar y'ye göre integre ederek bulabileceğimizi söyler. Bu tekrarlı integralde, integrasyon sırası (3) denkleminin tersine önce x'e göre sonra y'ye göredir.

Tekrarlı integrallerle yapılan bu iki hacim hesaplamasının, R: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$ bölgesi üzerindeki

$$\iint_R (4 - x - y)\,dA$$

iki katlı integrali ile ilişkisi nedir? Yanıt, tekrarlı integrallerin ikisinin de iki katlı integralin değerini vermesidir. Bu, iki katlı integral, aynı bölgenin hacmini iki tekrarlı integral olarak ölçtüğünden, doğal olarak bekleyebileceğimiz şeydir. 1907'de Guido Fubini tarafından yayınlanan bir teorem, herhangi bir sürekli fonksiyonun bir dikdörtgen üzerindeki iki katlı integralinin, tekrarlı bir integral olarak herhangi bir sırada hesaplanabileceğini söyler (Fubini, teoremini daha genel olarak ispatlamıştır, ama bizim yaptıklarımıza indirgenmesi böyledir).

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Guido Fubini
(1879–1943)

TEOREM 1 Fubini Teoremi (Birinci Şekli)

$f(x, y)$, R: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ dikdörtgen bölgesinde sürekliyse,

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx$$

olur.

Fubini teoremi dikdörtgenler üzerindeki iki katlı integrallerin tekrarlı integraller olarak hesaplanabileceğini söyler. Böylece iki katlı bir integrali, her defasında bir değişkene göre integre ederek hesaplayabiliriz.

Fubini teoremi ayrıca, iki katlı integrali *herhangi bir* sırada hesaplayabileceğimizi de söyler, bu Örnek 3'te göreceğimiz gibi, gerçek bir kolaylıktır. Dilimlemeyle bir hacmi hesaplarken, hem x-eksenine dik düzlemler hem de y-eksenine dik düzlemler kullanabiliriz.

ÖRNEK 1 İki Katlı Bir İntegral Hesaplamak

$f(x, y) = 1 - 6x^2y$ ve R: $0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1$ için $\iint_R f(x, y)\, dA$'yı hesaplayın.

Çözüm Fubini teoremiyle,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}(1 - 6x^2y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1}\Big[x - 2x^3y\Big]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_{-1}^{1}(2 - 16y)\, dy = \Big[2y - 8y^2\Big]_{-1}^{1} = 4$$

bulunur. İntegrasyon sırasını değiştirmek de aynı sonucu verir:

$$\int_{0}^{2}\int_{-1}^{1}(1 - 6x^2y)\, dy\, dx = \int_{0}^{2}\Big[y - 3x^2y^2\Big]_{y=-1}^{y=1} dx$$

$$= \int_{0}^{2}[(1 - 3x^2) - (-1 - 3x^2)]\, dx$$

$$= \int_{0}^{2} 2\, dx = 4.$$

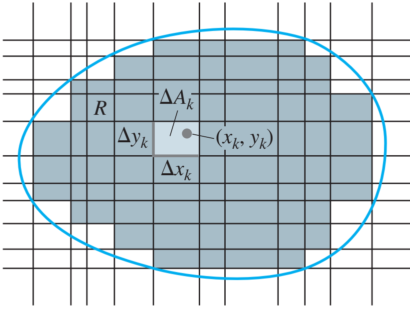
■

TEKNOLOJİ KULLANMAK **Çok Katlı İntegrasyon**

Çoğu Bilgisayarlı Cebir Sistemi hem çok katlı hem de tekrarlı integralleri hesaplayabilir. Tipik prosedür belirlediğiniz integrasyon sırasına göre iç içe geçmiş iterasyonlarda BCS integre et komutunu uygulamaktır:

İntegral	Tipik BCS Formülasyonu
$\iint x^2y\, dx\, dy$	int (int (x ^ 2 * y, x), y) ;
$\int_{-\pi/3}^{\pi/4}\int_{0}^{1} x\cos y\, dx\, dy$	int (int (x * cos (y), x = 0 . . 1), y = −Pi/3 . . Pi/4);

Bir BCS, bir belirli integral için kesin bir değer üretemezse, genellikle sayısal olarak yaklaşık bir değer bulabilir. Çok katlı bir integrali, bir BCS sistemi ile hesaplamak için ayarlamak hayli zor bir iş olabilir ve bölgenin sınırlarının nasıl tanımlanacağının bilinmesini gerektirebilir.



ŞEKİL 15.6 Dikdörtgensel olmayan bir sınırlı bölgeyi hücrelerle bölen dikdörtgensel bir şebeke.

Dikdörtgensel Olmayan Sınırlı Bölgelerde İki Katlı İntegraller

Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun, Şekil 15.6'da görülene benzer, dikdörtgensel olmayan sınırlı bir bölge üzerindeki iki katlı integralini tanımlamak için, yine R'yi, küçük dikdörtgensel hücrelerden oluşan ve bileşimleri R'nin bütün noktalarını içeren, bir şebeke ile kaplamakla başlarız. Fakat bu defa, sınırı eğrisel olduğundan ve şebekedeki bazı küçük dikdörtgenler kısmen R'nin dışında kaldığından, R'nin içinde kalan sonlu sayıda dikdörtgenle R'yi tamamen dolduramayız. R'nin bir bölünüşü, kısmen ya da tamamen dışarıda kalanların hiçbirini kullanmadan, tamamen R'nin içinde kalan dikdörtgenler alınarak oluşturulur. Sıkça karşılaştığımız bölgeler için, bölünüşün normu (kullanılan dikdörtgenlerin genişliklerinin veya yüksekliklerinin en büyüğü) sıfıra yaklaşırken, R'nin içerdiği dikdörtgenlerin sayısı giderek artar.

R'nin bir bölünüşü verildiğinde, dikdörtgenleri herhangi bir sırada 1'den n'ye numaralar ve k. dikdörtgenin alanını ΔA_k ile gösteririz. Sonra, k. dikdörtgende bir (x_k, y_k) noktası seçer ve

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$$

Riemann toplamını oluştururuz. S_n'yi oluşturan bölünüşün normu sıfıra giderken, $\|P\| \to 0$, içerilen bütün dikdörtgenlerin genişlikleri ve yükseklikleri sıfıra gider. Dolayısıyla, dikdörtgenlerin sayısı sonsuza gider. $f(x, y)$ sürekli bir fonksiyon ise bu Riemann toplamları, yaptığımız her seçimden bağımsız olarak, bir limit değere yakınsar. Bu limite, $f(x, y)$'nin R üzerindeki **iki katlı integrali** denir:

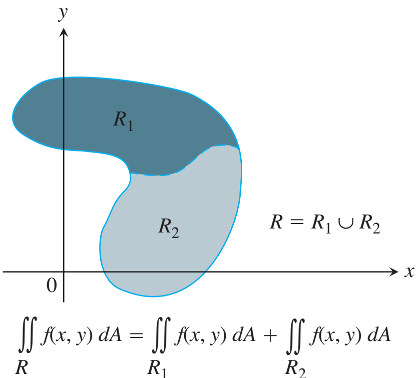
$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \iint_R f(x, y)\,dA$$

R'nin sınırının şekli, bir aralık üzerindeki integrallerde bulunmayan sorunlar çıkarır. R'nin sınırı eğrisel olduğunda, bölünüşün n dikdörtgeni R'nin içinde bulunur fakat R'nin tamamını kaplamaz. Bir bölünüşün R'ye yakınsaması için, kısmen R'nin dışında kalan küçük dikdörtgenlerle örtülen kısımlar, bölünüşün normu sıfıra giderken ihmal edilebilir olmalıdır. Bu, küçük normlu bir bölünüşle neredeyse doldurulmuş olma özelliği, ele alacağımız bütün bölgeler için sağlanmaktadır. Uç uca eklenmiş çokgenlerden, çemberlerden, elipslerden ve bir aralık üzerinde sürekli grafiklerden oluşan sınırlar problem teşkil etmezler. Şekil olarak "fraktal" bir eğri problemli olabilir. Fakat çoğu uygulamalar için böyle eğriler söz konusu değildir. İki katlı integrallerin hesaplanması için hangi tip R bölgelerinin kullanılabileceğine dair dikkatli bir araştırmayı daha ileri seviye derslere bırakıyoruz.

Sürekli fonksiyonların dikdörtgensel olmayan bölgelerdeki iki katlı integrallerinin cebirsel özellikleri, (ileride özetlenmiştir) dikdörtgensel bölgelerdeki integrallerinkilerle aynıdır. Tanım kümesi Toplanabilirlik Özelliğine göre, R yine sonlu sayıda doğru parçası veya düzgün eğriyle sınırlı, üst üste binmeyen R_1 ve R_2 bölgelerine ayrılmışsa (örnek olarak Şekil 15.7'ye bakın),

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \iint_{R_1} f(x, y)\,dA + \iint_{R_2} f(x, y)\,dA$$

yazılabilir.

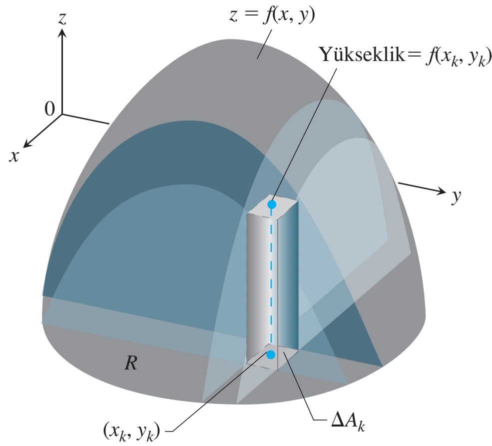


ŞEKİL 15.7 Dikdörtgensel bölgelerin toplanabilirlik özelliği sürekli eğrilerle sınırlanan bölgeler için de geçerlidir.

$f(x, y)$ pozitifse ve R üzerinde sürekliyse R ile $z = f(x, y)$ yüzeyi arasındaki katı bölgenin hacmini (Şekil 15.8), daha önceki gibi $\iint_R f(x, y)\,dA$, olarak tanımlarız.

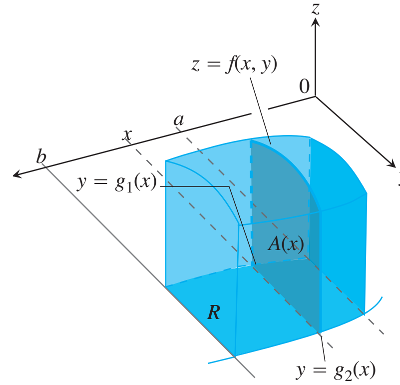
R, xy-düzleminde "üstten" ve "alttan" $y = g_2(x)$ ve $y = g_1(x)$ eğrileri ve yanlardan $x = a$, $x = b$ doğrularıyla sınırlı, Şekil 15.9'da görülen bölge gibi bir bölgeyse, hacmi yine dilimleme yöntemi ile bulabiliriz. Önce

$$A(x) = \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x, y)\,dy$$



Hacim $= \lim \sum f(x_k, y_k)\, \Delta A_k = \iint_R f(x, y)\, dA$

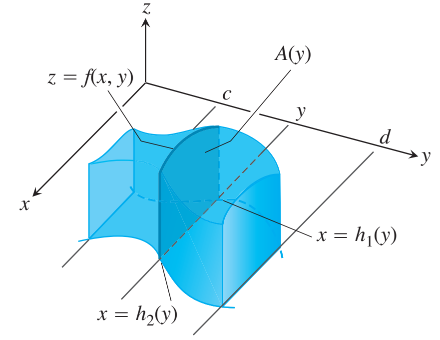
ŞEKİL 15.8 Eğri tabanlı cisimlerin hacimlerini de dikdörtgen tabanlı cisimlerin hacimlerini tanımladığımız gibi tanımlarız.



ŞEKİL 15.9 Burada gösterilen dikey dilimin alanı

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$$

ile verilir. Cismin hacmini hesaplamak için bu alanı $x = a$'dan $x = b$'ye kadar integre ederiz.



ŞEKİL 15.10 Burada gösterilen cismin hacmi

$$\int_c^d A(y)\, dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

dir.

kesit alanını hesaplar ve $A(x)$'i $x = a$'dan $x = b$'ye kadar integre ederek hacmi tekrarlı bir integral olarak buluruz:

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx. \tag{5}$$

Aynı şekilde, R, $x = h_2(y)$ ve $x = h_1(y)$ eğrileri ve $y = c$ ve $y = d$ doğrularıyla sınırlı Şekil 15.10'da gösterilen bölge gibi bir bölgeyse, dilimleme ile hesaplanan hacim

$$\text{Hacim} = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy \tag{6}$$

tekrarlı integraliyle hesaplanır.

(5) ve (6) denklemlerindeki tekrarlı integrallerin ikisinin de, f'nin R üzerindeki iki katlı integrali olarak tanımladığımız, hacmi vermeleri aşağıda verilen Fubini teoreminin daha güçlü şeklinin bir sonucudur.

TEOREM 2 Fubini Teoremi (Daha Kuvvetli Şekil)

$f(x, y)$ bir R bölgesi üzerinde sürekli olsun.

1. R, g_1 ve g_2 $[a, b]$'de sürekli olmak üzere, $a \le x \le b$, $g_1(x) \le y \le g_2(x)$ ile tanımlanıyorsa,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

olur.

2. R, h_1 ve h_2 $[c, d]$'de sürekli olmak üzere, $c \le y \le d$, $h_1(y) \le x \le h_2(y)$ ile tanımlanıyorsa,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

olur.

ÖRNEK 2 Hacim Bulmak

Tabanı, xy-düzleminde x-ekseni, $y = x$ ve $x = 1$ doğruları tarafından sınırlı üçgen olan ve tepesi

$$z = f(x, y) = 3 - x - y$$

düzleminde bulunan prizmanın hacmini bulun.

Çözüm Sayfa 1075'teki Şekil 15.11'e bakın. 0 ile 1 arasındaki herhangi bir x için, y, $y = 0$'dan $y = x$'e değişebilir (Şekil 15.11b). Dolayısıyla

$$V = \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2}\right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = 1$$

olur. İntegrasyon sırası değiştirildiğinde (Şekil 15.11c), hacim integrali

$$V = \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left[3x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_{x=y}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(3 - \frac{1}{2} - y - 3y + \frac{y^2}{2} + y^2\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - 4y + \frac{3}{2}y^2\right) dy = \left[\frac{5}{2}y - 2y^2 + \frac{y^3}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = 1$$

olur. İki integral de, olmaları gerektiği gibi, eşittir. ■

Fubini teoremi iki katlı bir integralin herhangi bir integrasyon sırasıyla tekrarlanan bir integral olarak hesaplanabileceğini garantilerken, bir integralin değerini bulmak diğerinin değerini bulmaktan daha kolay olabilir. Aşağıdaki örnek bunun nasıl olduğunun bir örneğidir.

ÖRNEK 3 İki Katlı Bir İntegral Hesaplamak

R, xy-düzleminde x-ekseni, $y = x$ doğrusu ve $x = 1$ doğrusuyla sınırlanan üçgen olmak üzere

$$\iint_R \frac{\sin x}{x}\, dA$$

integralini hesaplayın.

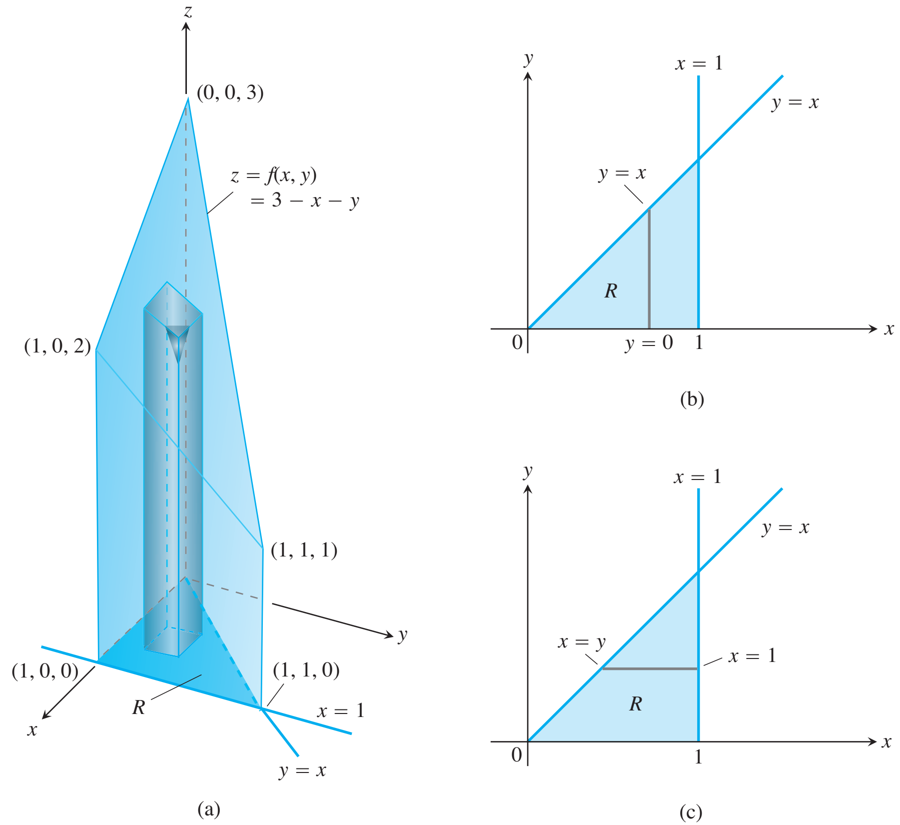
Çözüm İntegrasyon bölgesi Şekil 15.12'de gösterilmektedir. Önce y'ye, sonra da x'e göre integre edersek,

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dy\right) dx = \int_0^1 \left(y \frac{\sin x}{x}\Big]_{y=0}^{y=x}\right) dx = \int_0^1 \sin x\, dx$$

$$= -\cos(1) + 1 \approx 0.46.$$

buluruz. İntegrasyon sırasını değiştirir ve

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x}\, dx\, dy$$



ŞEKİL 15.11 (a) Üçgen tabanı xy-düzleminde olan prizma. Bu prizmanın hacmi R üzerinde iki katlı bir integral olarak tanımlanmıştır. Bunu tekrarlı bir integral olarak hesaplamak için, önce y'ye, sonra x'e göre veya ters sırada integre edebiliriz (Örnek 2).
(b)

$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x} f(x, y)\, dy\, dx$$

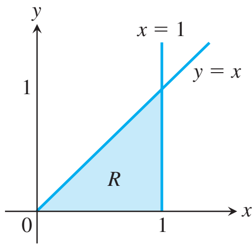
integralinin integrasyon sınırları. Önce y'ye göre integre edersek, R'den geçen dikey bir doğru boyunca integre eder ve sonra soldan sağa doğru R'deki bütün dikey doğruları içerecek şekilde integre ederiz.
(c)

$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=1} f(x, y)\, dx\, dy$$

integralinin integrasyon sınırları. Önce x'e göre integre edersek, R'de geçen yatay bir doğru boyunca integre eder ve alttan üste doğru R'deki bütün yatay doğruları içerecek şekilde integre ederiz.

integralini almaya kalkarsak, $\int((\sin x)/x)\, dx$'in elemanter fonksiyonlar cinsinden ifade edilememesi yüzünden durmak zorunda kalırız.

Bunun gibi durumlarda, hangi integrasyon sırasının iyi olduğunu tahmin etmek için genel bir kural yoktur. Seçtiğiniz ilk sıra işe yaramazsa, diğerini deneyin. Bazı hallerde her iki sıra da işe yaramayabilir. Bu gibi durumlarda sayısal yaklaşımları kullanmak zorunda kalırız. ■



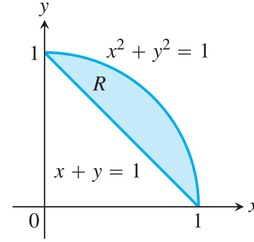
ŞEKİL 15.12 Örnek 3'teki integrasyon bölgesi.

İntegrasyon Sınırlarını Bulmak

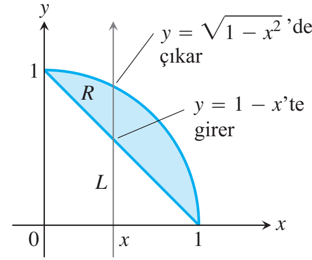
Şimdi, integrasyon sınırlarını bulmak için, düzlemde bir çok bölgeye uygulanabilen bir prosedür veriyoruz. Bu prosedürün işe yaramadığı daha karmaşık bölgeler, çoğunlukla bu prosedür uygulanabilecek şekilde parçalara ayrılır.

$\iint_R f(x, y)\,dA$ integralini, önce y'ye sonra da x'e göre integre ederek hesaplamak için, aşağıdaki adımları izleyin.

1. *Çizim*. İntegrasyon bölgesini çizin ve sınırlayıcı eğrileri belirtin.



2. *İntegrasyonun y sınırlarını bulun* Artan y yönünde R'den geçen dikey bir L doğrusu hayal edin. L'nin girdiği ve çıktığı y değerlerini işaretleyin. Bunlar integrasyonun y sınırlarıdır ve genellikle x'in fonksiyonlarıdırlar (sabit yerine).

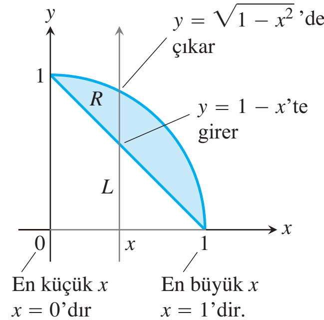


3. *İntegrasyonun x-sınırlarını bulun* R'den geçen bütün dikey doğruları kapsayan x-sınırlarını seçin. İntegral

$$\iint_R f(x, y)\,dA =$$

$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$$

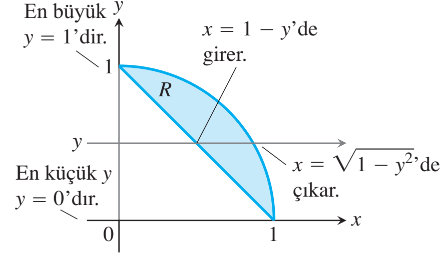
olur.



Aynı iki katlı integrali, integrasyon sırası değişmiş tekrarlı integral olarak hesaplamak için, 2. ve 3. adımlarda dikey doğrular yerine yatay doğrular kullanın. İntegral

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy$$

olur.

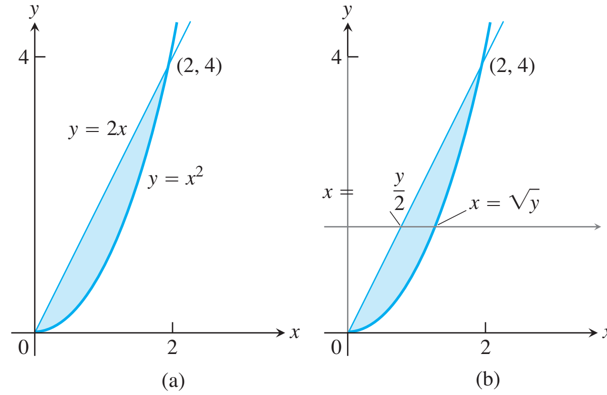


ÖRNEK 4 İntegrasyon Sırasını Değiştirmek

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x + 2)\, dy\, dx$$

integralinin integrasyon bölgesini çizin ve integrasyon sırası değiştirilmiş eşdeğer bir integral yazın.

Çözüm İntegrasyon bölgesi, $x^2 \le y \le 2x$ ve $0 \le x \le 2$ eşitsizlikleriyle verilmektedir. Dolayısıyla, $x = 0$ ve $x = 2$ doğruları arasında $y = x^2$ ile $y = 2x$ eğrilerinin sınırladığı bölgedir (Şekil 15.13a).



ŞEKİL 15.13 Örnek 4'ün integrasyon bölgesi

Değiştirilmiş sırada integrasyonun sınırlarını bulmak için, bölge boyunca soldan sağa giden bir yatay doğru hayal ederiz. $x = y/2$'de girer ve $x = \sqrt{y}$'de çıkar. Böyle bütün doğruları kapsamak üzere, y'yi $y = 0$'dan $y = 4$'e götürürüz (Şekil 15.13b). İntegral

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x + 2)\, dx\, dy$$

olur. Bu integrallerin ortak değeri 8'dir. ■

İki Katlı İntegrallerin Özellikleri

Tek katlı integraller gibi, sürekli fonksiyonların iki katlı integrallerinin hesaplamalarda ve uygulamalarda yararlı özellikleri vardır.

İki Katlı İntegrallerin Özellikleri

$f(x, y)$ ve $g(x, y)$ fonksiyonları sürekli ise

1. *Sabitle Çarpım:* $\iint_R cf(x,y)\,dA = c\iint_R f(x,y)\,dA$ (herhangi bir c sayısı)

2. *Toplam ve Fark:*

$$\iint_R (f(x,y) \pm g(x,y))\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA \pm \iint_R g(x,y)\,dA$$

3. *Baskınlık:*

(a) R üzerinde $f(x, y) \geq 0$ ise $\iint_R f(x,y)\,dA \geq 0$

(b) R üzerinde $f(x, y) \geq g(x, y)$ ise

$$\iint_R f(x,y)\,dA \geq \iint_R g(x,y)\,dA$$

4. R, üst üste binmeyen R_1 ve R_2 gibi iki bölgenin bileşimi ise (Şekil 15.7):

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA$$

Bu özelliklerin arkasındaki fikir, integrallerin toplamlar gibi davranmalarıdır. Bir $f(x, y)$ fonksiyonu sabit katı olan $cf(x, y)$ ile değiştirilirse, f için bir

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$$

Riemann toplamı, cf için olan

$$\sum_{k=1}^{n} cf(x_k, y_k)\,\Delta A_k = c\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k = cS_n$$

Riemann toplamı ile değiştirilmiş olur.
$n \to \infty$ için limit almak, $c\lim_{n\to\infty} S_n = c\iint_R f\,dA$ ve $\lim_{n\to\infty} cS_n = \iint_R cf\,dA$ integrallerinin eşit olduklarını gösterir. Sonuç olarak, sabitle çarpım kuralı toplamlar üzerinden iki katlı integrallere taşınır.

Diğer özellikleri de Riemann toplamları için gerçeklemek ve aynı nedenle iki katlı integrallere taşımak kolaydır. Bu tartışma fikri vermesine rağmen, bu özelliklerin sağlandığına dair gerçek bir ispat, Riemann toplamlarının nasıl yakınsadığı hakkında dikkatli bir analiz gerektirir.

ALIŞTIRMALAR 15.1

İntegrasyon Bölgelerini ve İki Katlı İntegralleri Bulmak

1–10 alıştırmalarında, integrasyon bölgesini çizin ve integrali hesaplayın.

1. $\int_0^3 \int_0^2 (4 - y^2)\, dy\, dx$

2. $\int_0^3 \int_{-2}^0 (x^2 y - 2xy)\, dy\, dx$

3. $\int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (x + y + 1)\, dx\, dy$

4. $\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin x + \cos y)\, dx\, dy$

5. $\int_0^{\pi} \int_0^{x} x \sin y\, dy\, dx$

6. $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y\, dy\, dx$

7. $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y}\, dx\, dy$

8. $\int_1^2 \int_y^{y^2} dx\, dy$

9. $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy}\, dx\, dy$

10. $\int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2} e^{y/\sqrt{x}}\, dy\, dx$

11–16 alıştırmalarında, f'yi verilen bölgede integre edin.

11. Dörtgen Birinci dörtte bir bölgede $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$, $x = 2$ doğrularıyla sınırlı bölgede $f(x, y) = x/y$

12. Kare $1 \le x \le 2$, $1 \le y \le 2$ karesinde $f(x, y) = 1/(xy)$

13. Üçgen Köşeleri (0, 0), (1, 0) ve (0, 1)'de olan üçgen bölgede $f(x, y) = x^2 + y^2$

14. Dikdörtgen $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le 1$ dikdörtgeninde $f(x, y) = y \cos xy$

15. Üçgen uv-düzleminin birinci dörtte bir bölgesinden $u + v = 1$ doğrusuyla kesilen üçgen bölgede $f(u, v) = v - \sqrt{u}$

16. Eğrisel bölge st-düzleminin birinci dörtte bir bölgesinde $t = 1$'den $t = 2$'ye kadar $s = \ln t$ eğrisinin üst tarafında kalan bölgede $f(s, t) = e^s \ln t$

17–20 alıştırmalarından her biri, bir Kartezyen koordinat düzleminin bir bölgesinde bir integral vermektedir. Bölgeyi çizin ve integrali hesaplayın.

17. $\int_{-2}^0 \int_v^{-v} 2\, dp\, dv$ (pv-düzlemi)

18. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-s^2}} 8t\, dt\, ds$ (st-düzlemi)

19. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_0^{\sec t} 3 \cos t\, du\, dt$ (tu-düzlemi)

20. $\int_0^3 \int_1^{4-2u} \frac{4 - 2u}{v^2}\, dv\, du$ (uv-düzlemi)

İntegrasyon Sırasını Değiştirmek

21–30 alıştırmalarında integrasyon bölgesini çizin ve integrasyon sırası değiştirilmiş eşdeğer bir iki katlı integral yazın.

21. $\int_0^1 \int_2^{4-2x} dy\, dx$

22. $\int_0^2 \int_{y-2}^0 dx\, dy$

23. $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx\, dy$

24. $\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} dy\, dx$

25. $\int_0^1 \int_1^{e^x} dy\, dx$

26. $\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 dx\, dy$

27. $\int_0^{3/2} \int_0^{9-4x^2} 16x\, dy\, dx$

28. $\int_0^2 \int_0^{4-y^2} y\, dx\, dy$

29. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3y\, dx\, dy$

30. $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x\, dy\, dx$

İki Katlı İntegralleri Hesaplamak

31–40 alıştırmalarında, integrasyon bölgesini çizin, integrasyon sınırlarını belirleyin ve integrali hesaplayın.

31. $\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\, dy\, dx$

32. $\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin xy\, dy\, dx$

33. $\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy}\, dx\, dy$

34. $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4 - y}\, dy\, dx$

35. $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\, dx\, dy$

36. $\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3}\, dy\, dx$

37. $\int_0^{1/16} \int_{y^{1/4}}^{1/2} \cos(16\pi x^5)\, dx\, dy$

38. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\, dx}{y^4 + 1}$

39. Kare bölge R, $|x| + |y| = 1$ karesinin içindeki bölge olmak üzere, $\iint_R (y - 2x^2)\, dA$

40. Üçgen bölge R, $y = x$, $y = 2x$ ve $x + y = 2$ doğrularıyla sınırlı bölge olmak üzere, $\iint_R xy\, dA$

$z = f(x, y)$ Yüzeyinin Altında Kalan Hacim

41. $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin altında ve xy-düzleminde $y = x$, $x = 0$ ve $x + y = 2$ doğrularıyla sınırlanan üçgenin üstündeki bölgenin hacmini bulun.

42. Üstten $z = x^2$ silindiri ve alttan xy-düzleminde $y = 2 - x^2$ parabolü ve $y = x$ doğrusuyla çevrelenen bölgeyle sınırlı cismin hacmini bulun.

43. Tabanı, xy-düzleminde $y = 4 - x^2$ parabolü ve $y = 3x$ doğrusuyla çevrili üçgen olan ve üstü $z = x + 4$ düzlemi ile sınırlanan cismin hacmini bulun.

44. Birinci sekizde bir bölgede, koordinat düzlemleri, $x^2 + y^2 = 4$ silindiri ve $z + y = 3$ düzlemiyle sınırlanan cismin hacmini bulun.

45. Birinci sekizde bir bölgede, koordinat düzlemleri, $x = 3$ düzlemi ve $z = 4 - y^2$ parabolik silindiriyle sınırlı cismin hacmini bulun.

46. Birinci sekizde bir bölgeden $z = 4 - x^2 - y$ yüzeyiyle kesilen cismin hacmini bulun.

47. Birinci sekizde bir bölgeden $z = 12 - 3y^2$ silindiri ve $x + y = 2$ düzlemiyle kesilen takozun hacmini bulun.

48. $|x| + |y| \le 1$ kare sütunundan $z = 0$ ve $3x + z = 3$ düzlemleriyle kesilen cismin hacmini bulun.

49. Önden ve arkadan $x = 2$ ve $x = 1$ düzlemleri, yanlardan $y = \pm 1/x$ silindirleri, üstten ve alttan $z = x + 1$ ile $z = 0$ düzlemleriyle sınırlanan cismin hacmini bulun.

50. Önden ve arkadan $x = \pm\pi/3$ düzlemleri, yanlardan $y = \pm \sec x$ silindirleri, üstten $z = 1 + y^2$ silindiri ve alttan xy-düzlemiyle sınırlanan cismin hacmini bulun.

Sınırlı Olmayan Bölgeler Üzerindeki İntegraller

İki katlı genelleştirilmiş integraller çoğunlukla tek değişkenli genelleştirilmiş integrallere benzer şekilde hesaplanabilirler. Aşağıdaki genelleştirilmiş integrallerin birincileri, sanki adi integrallermiş gibi düzenlenmiştir. Sonrasında, Bölüm 8.8'deki gibi, uygun sınırlar alarak tek değişkenli genelleştirilmiş integral hesaplanır. 51–54 alıştırmalarındaki genelleştirilmiş integralleri tekrarlı integraller olarak hesaplayın.

51. $\displaystyle\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y}\, dy\, dx$

52. $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}} (2y + 1)\, dy\, dx$

53. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}\, dx\, dy$

54. $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty x e^{-(x+2y)}\, dx\, dy$

İki Katlı İntegrallere Yaklaşımda Bulunmak

55 ve 56 alıştırmalarında, $f(x, y)$'nin verilen $x = a$ dikey doğruları ve $y = c$ yatay doğrularıyla bölünmüş R bölgesindeki iki katlı integraline yaklaşımda bulunun. Her alt dikdörtgende, (x_k, y_k)'yı belirtildiği şekilde, yaklaşımınız için kullanın.

$$\iint_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k)\, \Delta A_k$$

55. Üstten $y = \sqrt{1 - x^2}$ yarı çemberi, alttan x-ekseniyle sınırlı R bölgesinde, (x_k, y_k) k. alt dikdörtgenin alt sol köşesi olmak üzere (alt dikdörtgenin R'de bulunması koşuluyla), $x = -1, -1/2, 0, 1/4, 1/2, 1$ ve $y = 0, 1/2, 1$ bölünüşünü kullanarak $f(x, y) = x + y$

56. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ çemberi içindeki R bölgesinde, (x_k, y_k) k. alt dikdörtgende (R'nin içinde olması koşuluyla) merkez olmak üzere $x = 1, 3/2, 2, 5/2, 3$ ve $y = 2, 5/2, 3, 7/2, 4$ bölünüşünü kullanarak $f(x, y) = x + 2y$

Teori ve Örnekler

57. Daire kesmesi $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2}$'yi $x^2 + y^2 \le 4$ dairesinden $\theta = \pi/6$ ve $\theta = \pi/2$ ışınlarıyla kesilen küçük bölgede integre edin.

58. Sınırsız bölge $f(x, y) = 1/[(x^2 - x)(y - 1)^{2/3}]$'ü $2 \le x < \infty$, $0 \le y \le 2$ sonsuz dikdörtgen üzerinde integre edin.

59. Dairesel olmayan silindir xy-düzlemindedir ve üstten $z = x^2 + y^2$ paraboloidiyle sınırlıdır. Silindirin hacmi

$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2)\, dx\, dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

ile bulunur. Taban bölgesi R'yi çizin ve silindirin hacmini integrasyon sırası değiştirilmiş tek bir tekrarlı integral olarak ifade edin. Sonra integrali hesaplayarak, hacmi bulun.

60. İki katlı integrale dönüştürme Aşağıdaki integrali hesaplayın.

$$\int_0^2 (\tan^{-1}\pi x - \tan^{-1} x)\, dx$$

(*İpucu:* İntegrandı bir integral olarak yazın)

61. İki katlı bir integrali maksimize etmek xy-düzlemindeki hangi R bölgesi

$$\iint_R (4 - x^2 - 2y^2)\, dA$$

integralini maksimize eder? Yanıtınızı açıklayın.

62. İki katlı bir integrali minimize etmek xy-düzlemindeki hangi R bölgesi

$$\iint_R (x^2 + y^2 - 9)\, dA$$

integralini minimize eder? Yanıtınızı açıklayın.

63. Sürekli bir $f(x, y)$ fonksiyonunun xy-düzlemindeki bir dikdörtgen bölgede integralini hesaplamak ve integrasyon sırasına bağlı olarak farklı sonuçlar elde etmek mümkün müdür? Yanıtınızı açıklayın.

64. xy-düzleminde köşeleri (0, 1), (2, 0) ve (1, 2)'de olan üçgenle çevrelenen bir R bölgesinde sürekli bir $f(x, y)$ fonksiyonunun iki katlı integralini nasıl hesaplarsınız? Yanıtınızı açıklayın.

65. Sınırsız bölge Aşağıdaki eşitliği ispatlayın.

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^b \int_{-b}^b e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = 4\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx\right)^2$$

66. Genelleştirilmiş iki katlı integral

$$\int_0^1 \int_0^3 \frac{x^2}{(y - 1)^{2/3}}\, dy\, dx$$

Genelleştirilmiş integralini hesaplayın.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

İki Katlı İntegralleri Sayısal Olarak Hesaplama

67–70 alıştırmalarındaki integrallerin değerlerini öngörmek için, bir iki katlı integral hesaplayıcısı kullanın.

67. $\displaystyle\int_1^3\int_1^x \frac{1}{xy}\,dy\,dx$ **68.** $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$

69. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \tan^{-1} xy\,dy\,dx$

70. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3\sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\,dx$

71–76 alıştırmalarındaki integralleri hesaplamak için, bir iki katlı integral hesaplayıcısı kullanın. Sonra, integrasyon sırasını değiştirin ve yine iki katlı integral hesaplayıcısı ile hesaplayın.

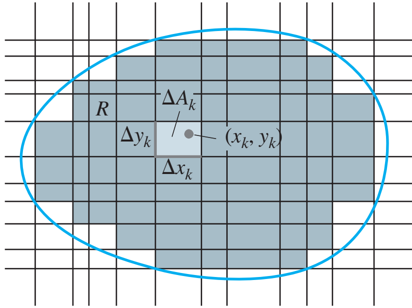
71. $\displaystyle\int_0^1\int_{2y}^4 e^{x^2}\,dx\,dy$ **72.** $\displaystyle\int_0^3\int_{x^2}^9 x\cos(y^2)\,dy\,dx$

73. $\displaystyle\int_0^2\int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} (x^2y - xy^2)\,dx\,dy$

74. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{4-y^2} e^{xy}\,dx\,dy$

75. $\displaystyle\int_1^2\int_0^{x^2} \frac{1}{x+y}\,dy\,dx$ **76.** $\displaystyle\int_1^2\int_{y^3}^8 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$

15.2 Alan, Momentler ve Kütle Merkezleri



ŞEKİL 15.14 R bölgesinin bir bölünüşünün normu sıfıra yaklaşırken, ΔA_k alanlarının toplamları R'nin $\iint_R dA$ iki katlı integrali ile tanımlanan alanını verir.

Bu bölümde, düzlemde sınırlı bölgelerin alanlarını hesaplamak ve iki değişkenli bir fonksiyonun ortalama değerini bulmak için iki katlı integrallerin nasıl kullanılacağını göstereceğiz. Sonra bir fizik problemini, düzlemde bir bölgeyi kaplayan ince bir plakanın kütle merkezinin bulunmasını, çalışacağız.

Düzlemde Sınırlanmış Bölgelerin Alanları

Önceki bölümde, bir R bölgesindeki iki katlı integralin tanımında $f(x, y) = 1$ alırsak, Riemann toplamları

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k \tag{1}$$

haline indirgenir.

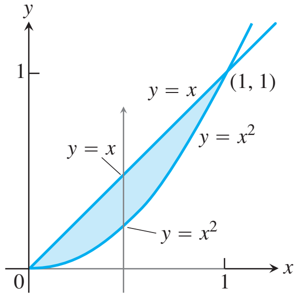
Bu, basitçe R'nin bölünüşündeki küçük dikdörtgenlerin alanlarının toplamıdır ve R'nin alanı demek istediğimiz şeye yaklaşır. R bölgesinin bir bölünüşünün normu sıfıra yaklaşırken, bölünüşteki bütün dikdörtgenlerin yükseklikleri ve genişlikleri sıfıra yaklaşır ve R'nin örtülüşü artarak tamamlanır (Şekil 15.14). R'nin alanını

$$Alan = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \iint_R dA \tag{2}$$

limiti olarak tanımlarız.

> **TANIM Alan**
>
> Kapalı, sınırlı bir düzlemsel R bölgesinin **alanı**
>
> $$A = \iint_R dA$$
>
> ile verilir.

Bu bölümdeki diğer tanımlar gibi, buradaki tanım da, tek değişkenli alan tanımında olduğundan, daha büyük bir bölge yelpazesine uygulanır, fakat ikisinin de uygulanabileceği bölgelerde daha önceki tanımla uyuşur. Alan tanımındaki intgrali hesaplamak için, sabit $f(x, y) = 1$ fonksiyonunu R üzerinde integre ederiz.



ŞEKİL 15.15 Örnek 1'deki bölge.

ÖRNEK 1 Alan Bulmak

Birinci dörtte bir bölgede $y = x$ ve $y = x^2$ ile sınırlanan R bölgesinin alanını bulun.

Çözüm İki eğrinin nerede kesiştiğini belirterek bölgeyi çizer (Şekil 15.15) ve alanı

$$A = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\, dx = \int_0^1 \Big[y \Big]_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

olarak hesaplarız. İçerideki integralin hesaplanması ile elde edilen $\int_0^1 (x - x^2)\, dx$ integralinin, bu iki eğri arasındaki alan için Bölüm 5.5'deki yöntem kullanılarak yazılmış integral olduğuna dikkat edin. ■

ÖRNEK 2 Alan Bulmak

$y = x^2$ parabolü ve $y = x + 2$ doğrusuyla çevrelenen R bölgesinin alanını bulun.

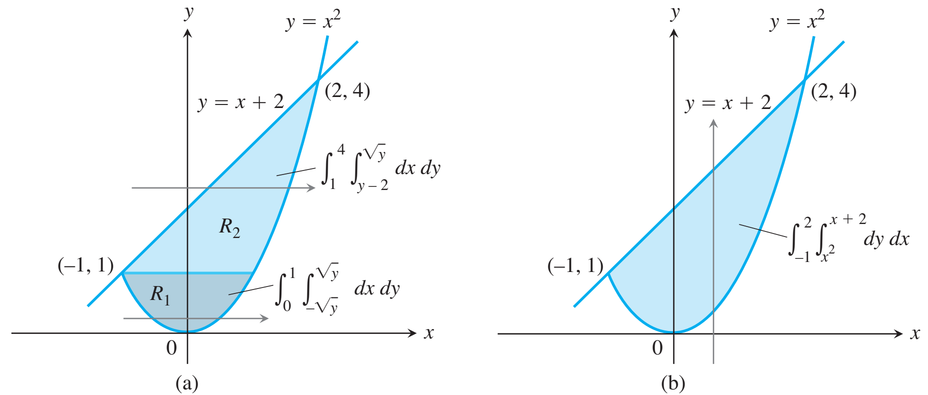
Çözüm R'yi Şekil 15.16(a)'da görülen R_1 ve R_2 bölgelerine ayırırsak, alanı

$$A = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\, dy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\, dy$$

olarak hesaplayabiliriz. Öte yandan, integrasyon sırasını değiştirmek (Şekil 15.16b),

$$A = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} dy\, dx$$

verir.



ŞEKİL 15.16 Bu alanı hesaplamak (a) ilk integrasyon x'e göreyse, iki tane iki katlı integral, (b) integrasyon y'ye göreyse, sadece bir tane iki katlı integral gerektirir (Örnek 2).

Sadece bir integral gerektiren bu ikinci sonuç daha basittir ve pratikte kullanmak isteyeceğimiz budur. Alan

$$A = \int_{-1}^{2} \Big[y \Big]_{x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$ ■

olarak bulunur.

Ortalama Değer

Tek değişkenli, integre edilebilir bir fonksiyonun kapalı bir aralıktaki ortalama değeri, fonksiyonun aralıktaki integralinin aralığın uzunluğuna oranıdır. Düzlemde, sınırlı bir R bölgesinde tanımlı, iki değişkenli integre edilebilir bir fonksiyon için ortalama değer, fonksiyonun bölge üzerindeki integralinin bölgenin alanına oranıdır.

Bu, fonksiyonun, yan duvarları bölgenin sınırları üzerinde bulunan bir havuzun içinde çalkalanan suyun bir andaki yüksekliğini verdiğini düşünmekle gözümüzde canlandırılabilir. Havuzdaki suyun ortalama yüksekliği, suyu sabit bir yükseklikte durgunlaşmaya bırakarak bulunabilir. Bu durumda yükseklik, havuzdaki suyun hacminin, havuzun alanına oranına eşittir. Bu bizi, integre edilebilir bir f fonksiyonunun bir R bölgesi üzerindeki ortalama değerini aşağıdaki gibi tanımlamaya götürür:

$$f\text{'nin } R\text{'deki } \textbf{Ortalama değeri} = \frac{1}{R\text{'nin alanı}} \iint_R f\, dA \qquad (3)$$

f, R'yi kaplayan ince bir plakanın sıcaklığı ise, f'nin R üzerindeki iki katlı integralinin R'nin alanına oranı, plakanın ortalama sıcaklığıdır. $f(x, y)$, (x, y) noktasından sabit bir P noktasına olan uzaklık ise, f'nin R üzerindeki ortalama değeri R'deki noktaların P'den ortalama uzaklığıdır.

ÖRNEK 3 Ortalama Değer Bulmak

$f(x, y) = x \cos xy$'nin R: $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le 1$ dikdörtgenindeki ortalama değerini bulun.

Çözüm f'nin R üzerindeki integralinin değeri

$$\int_0^{\pi} \int_0^1 x \cos xy\, dy\, dx = \int_0^{\pi} \Big[\sin xy \Big]_{y=0}^{y=1} dx \qquad \int x \cos xy\, dy = \sin xy + C$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin x - 0)\, dx = -\cos x \Big]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$$

olarak bulunur. R'nin alanı π'dir. f'nin R üzerindeki ortalama değeri $2/\pi$'dir. ■

İnce Düz Plakalar İçin Momentler ve Kütle Merkezleri

Bölüm 6.4'te, momentler ve kütle merkezleri kavramlarını tanıtmış ve bu büyüklüklerin, ince çubuklar veya şeritler ve sabit yoğunluklu plakalar için nasıl hesaplandığını görmüştük. Katlı integralleri kullanarak, bu hesaplamaları değişken yoğunluklu çeşitli şekillere, genişletebiliriz. Önce, ince düz bir plakanın kütle merkezini bulma problemini ele alıyoruz: örneğin alüminyum bir disk veya üçgensel bir metal yaprak. Böyle bir

plakada yoğunluk dağılımının sürekli olduğunu varsayıyoruz. Bir malzemenin $\delta(x, y)$ ile gösterilen *yoğunluk* fonksiyonu, birim alan başına kütledir. Bir plakanın kütlesi, plakayı oluşturan R bölgesi üzerinde yoğunluk fonksiyonunun integre edilmesi ile elde edilir. Bir eksen etrafındaki birinci moment, eksenden uzaklık kere yoğunluğun R üzerinde integre edilmesi ile hesaplanır. Kütle merkezi, birinci momentten bulunur. Tablo 15.1, kütleler, birinci momentler ve kütle merkezleri için iki katlı integral formüllerini vermektedir.

TABLO 15.1 *xy*-düzleminde bir R bölgelesini kaplayan ince plakalar için kütle ve birinci moment formülleri.

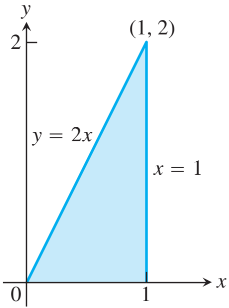
Kütle: $M = \iint_R \delta(x, y)\, dA$ $\quad$ $\delta(x, y)$, (x, y)'deki yoğunluktur.

Birinci momentler: $M_x = \iint_R y\delta(x, y)\, dA, \qquad M_y = \iint_R x\delta(x, y)\, dA$

Kütle merkezi: $\bar{x} = \dfrac{M_y}{M}, \qquad \bar{y} = \dfrac{M_x}{M}$

ÖRNEK 4 Değişken Yoğunluklu İnce Bir Plakanın Kütle Merkezini Bulmak

İnce bir plaka, birinci dörtte bir bölgede x-ekseni ile $x = 1$ ve $y = 2x$ doğrularının sınırladığı üçgensel bölgeyi kaplamaktadır. (x, y) noktasında plakanın yoğunluğu $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$'dır. Plakanın kütlesini ve koordinat eksenleri etrafındaki birinci momentleri ile kütle merkezini bulun.



ŞEKİL 15.17 Örnek 4'teki, plaka ile kaplanmış üçgensel bölge

Çözüm Plakayı çizer ve hesaplamamız gereken integrallerin integrasyon sınırlarını belirleyecek kadar detay ekleriz (Şekil 15.17).

Plakanın kütlesi

$$M = \int_0^1 \int_0^{2x} \delta(x, y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[6xy + 3y^2 + 6y\right]_{y=0}^{y=2x} dx$$

$$= \int_0^1 (24x^2 + 12x)\, dx = \left[8x^3 + 6x^2\right]_0^1 = 14$$

olarak bulunur.

x-ekseni etrafındaki birinci moment

$$M_x = \int_0^1 \int_0^{2x} y\delta(x, y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy + 6y^2 + 6y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[3xy^2 + 2y^3 + 3y^2\right]_{y=0}^{y=2x} dx = \int_0^1 (28x^3 + 12x^2)\, dx$$

$$= \left[7x^4 + 4x^3\right]_0^1 = 11$$

olur.

Benzer bir hesaplama, y-ekseni etrafındaki momenti verir:

$$M_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x\delta(x, y)\, dy\, dx = 10.$$

Dolayısıyla kütle merkezinin koordinatları

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{11}{14}$$

olur.

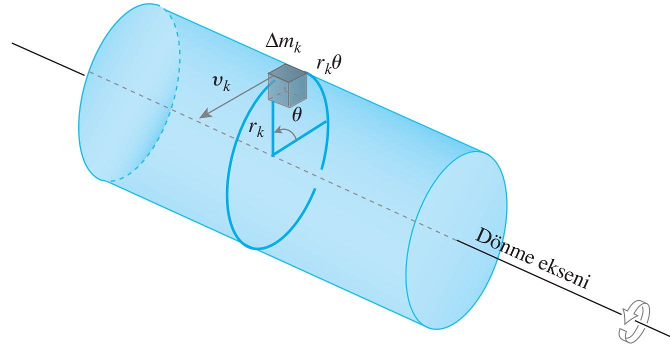
Eylemsizlik Momenti

Bir cismin birinci momentleri (Tablo 15.1), denge ve bir yerçekimi alanında bir cismin farklı koordinat eksenleri etrafında gösterdiği tork hakkında bilgi verir. Ama cisim dönen bir şaft ise, şaftta ne kadar enerji depolandığı veya şaftı belirli bir açısal hıza ivmelendirmenin ne kadar enerji gerektireceğiyle ilgilenmemiz daha doğaldır. İkinci moment veya eylemsizlik momenti buradan gelir.

Şaftı Δm_k kütleli küçük bloklara böldüğünüzü düşünün ve r_k, k. bloğun kütle merkezinden dönme eksenine olan uzaklık olsun (Şekil 15.18). Şaft $\omega = d\theta/dt$ radyan bölü saniye açısal hızıyla dönüyorsa, bloğun kütle merkezi yörüngesini

$$v_k = \frac{d}{dt}(r_k\theta) = r_k\frac{d\theta}{dt} = r_k\omega$$

lineer hızıyla izleyecektir.



ŞEKİL 15.18 Dönen bir şaftta depolanan enerji miktarı için bir integral bulmak amacıyla, önce şaftın küçük bloklara ayrıldığını hayal ederiz. Her bloğun kendi kinetik enerjisi vardır. Her bloğun enerjisinin katkısını toplayarak şaftın kinetik enerjisini buluruz.

Bloğun kinetik enerjisi yaklaşık olarak

$$\frac{1}{2}\Delta m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\Delta m_k(r_k\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 r_k^2\, \Delta m_k$$

olur. Çubuğun kinetik enerjisi de yaklaşık olarak

$$\sum \frac{1}{2}\omega^2 r_k^2\, \Delta m_k$$

olur.

Şaftı daha küçük bloklara ayırarak bu toplamlarla yaklaşılan integral şaftın kinetik enerjisini verir:

$$\text{KE}_{\text{şaft}} = \int \frac{1}{2}\omega^2 r^2\, dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2\, dm \qquad (4)$$

Bu eşitlikteki

$$I = \int r^2\, dm$$

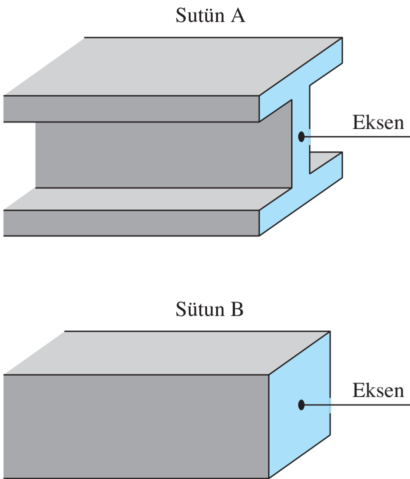
çarpanı şaftın dönme ekseni etrafındaki *eylemsizlik momenti*dir ve (4) denkleminden şaftın kinetik enerjisinin

$$\text{KE}_{\text{şaft}} = \frac{1}{2} I\omega^2$$

olduğunu görürüz.

Bir şaftın eylemsizlik momenti bazı yönlerden bir lokomotifin ataletine benzer. m kütleli bir lokomotifi lineer bir υ hızıyla harekete geçirmek için, $KE = (1/2)m\upsilon^2$ kadar bir kinetik enerji sağlamamız gerekir. Lokomotifi durdurmak için, bu enerjiyi salmamız gerekir. Eylemsizlik momenti I olan bir şaftı bir ω açısal hızıyla döndürmeye başlamak için $KE = (1/2)I\omega^2$ kadar bir kinetik enerji sağlamamız gerekir. Şaftı durdurmak için bu miktar enerjiyi geriye almamız gerekir. Şaftın eylemsizlik momenti lokomotifin kütlesi gibidir. Lokomotifin kalkmasını veya durmasını zorlaştıran şey kütledir. Şaftın dönmesini veya durmasını zorlaştıran şey eylemsizlik momentidir. Eylemsizlik momenti sadece şaftın kütlesine değil, aynı zamanda kütlenin dağılımına da bağlıdır.

Eylemsizlik momenti ayrıca yatay bir metal sütunun bir yük altında ne kadar bükülebileceğini belirlemede rol oynar. Sütunun sertliği, sütunun yatay eksenine dik olan tipik bir kesitin kutupsal eylemsizlik momenti I olmak üzere, bir sabit kere I dır. I'nın değeri ne kadar büyükse, sütun o kadar serttir ve verilen yük altında o kadar az bükülür. Kesitleri kare olan sütunlar yerine I-sütunları kullanmamızın nedeni budur. Sütunun altındaki ve üstündeki çıkıntılar sütunun kütlesinin çoğunu yatay eksenden uzak tutarak I'nın değerini maksimize eder (Şekil 15.19).



ŞEKİL 15.19 Bir sütunun yatay ekseni etrafındaki kutupsal eylemsizlik momenti ne kadar büyük olursa, sütun o kadar sert olur. A ve B sütunlarının kesit alanları aynıdır, ama A daha serttir.

Eylemsizlik momentinin nasıl çalıştığını anlamak istiyorsanız, aşağıdaki deneyi yapın. Bir kalemin uçlarına iki madeni para yapıştırın ve kalemi kütle merkezinin etrafında döndürün. Hareket yönünü her değiştirdiğinizde hissettiğiniz direncin nedeni eylemsizlik momentidir. Şimdi madeni paraları kütle merkezine doğru eşit mesafede yer değiştirin ve kalemi yeniden döndürün. Sistemin kütlesi ve kütle merkezi aynıdır, ama şimdi hareketteki değişimlere daha az direnç göstermektedir. Eylemsizlik momenti azalmıştır. Eylemsizlik momenti bir beyzbol sopasına, golf sopasına veya tenis raketine "hissedilmelerini" veren şeydir. Ağırlıkları aynı olan, aynı görünen ve kütle merkezleri aynı olan tenis raketleri, ağırlıkları aynı şekilde dağılmamışsa, farklı hissedilecekler ve davranacaklardır.

Düzlemde, ince plakaların eylemsizlik momentlerinin hesaplanması, Tablo 15.2'de özetlenen iki katlı integral formüllerine yol açar. Küçük ince bir parçanın Δm kütlesi, parçacığın alanı ΔA ile parçacığın içindeki bir noktanın yoğunluğu çarpımına eşittir. Uzayda bir bölgeyi kaplayan cisimlerin eylemsizlik momentlerinin hesaplanması Bölüm 15.5'te incelenmiştir.

Birinci momentler M_x ve M_y ile **eylemsizlik momentileri** veya **ikinci momentler** I_x ve I_y arasındaki matematiksel fark, ikinci momentlerin "çevirme kolu" uzaklıkları x ve y'nin *karelerini* kullanmalarıdır.

I_0 momentine orijin etrafında kutupsal eylemsizlik momenti de denir. Yoğunluk $\delta(x, y)$ (birim alan başına kütle) kere temsili bir (x, y) noktasından orijine uzaklığın karesi olan $r^2 = x^2 + y^2$'nin integre edilmesiyle hesaplanır. $I_0 = I_x + I_y$ olduğuna dikkat edin; ikisini bili-

yorsak, üçüncüyü otomatik olarak biliyoruz demektir (I_0 momentine bazen z- ekseni etrafındaki eylemsizlik momentini temsil eden I_z de denir. Bu durumda, $I_z = I_x + I_y$ bağıntısına **Dik Eksen Teoremi** denir). ve

Jirasyon yarıçapı R_x

$$I_x = MR_x^2$$

denklemiyle tanımlanır. Plakanın tüm kütlesinin aynı I_x'i verecek şekilde x-ekseninden ne kadar uzakta yoğunlaştığını söyler. Jirasyon yarıçapı eylemsizlik momentini bir kütle ve bir uzunluk cinsinden ifade etmenin uygun bir yolunu verir. R_y ve R_0 yarıçapları aynı şekilde

$$I_y = MR_y^2 \quad \text{ve} \quad I_0 = MR_0^2$$

ile verilir. Eylemsizlik momentleri'nin (ikinci momentler) yanı sıra jirasyon yarıçaplarının formüllerini de veren Tablo 15.2'deki formülleri elde etmek için karekök alırız.

TABLO 15.2 *xy*-düzleminde ince plakalar için ikinci moment formülleri

Eylemsizlik momentleri (ikinci momentler):		
x-ekseni etrafında:	$I_x = \iint y^2\delta(x, y)\, dA$	
y-ekseni etrafında:	$I_y = \iint x^2\delta(x, y)\, dA$	
Bir L doğrusu etrafında:	$I_L = \iint r^2(x, y)\delta(x, y)\, dA$, $r(x, y) = (x, y)$'den L'ye olan uzaklık	
Orijin etrafında (kutupsal moment):	$I_0 = \iint (x^2 + y^2)\delta(x, y)\, dA = I_x + I_y$	
Jirasyon yarıçapı:	x-ekseni etrafında:	$R_x = \sqrt{I_x/M}$
	y-ekseni etrafında:	$R_y = \sqrt{I_y/M}$
	Orijin etrafında:	$R_0 = \sqrt{I_0/M}$

ÖRNEK 5 Eylemsizlik Momentleri ve Jirasyon Yarıçapları Bulmak

Örnek 4'teki ince plaka için (Şekil 15.17), koordinat eksenleri ve orijin etrafındaki eylemsizlik momentlerini ve jirasyon yarıçaplarını bulunuz.

Çözüm Örnek 4'te verilen $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$ yoğunluk fonksiyonunu kullanarak x-ekseni etrafındaki eylemsizlik momenti

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y^2\delta(x, y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy^2 + 6y^3 + 6y^2)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left[2xy^3 + \frac{3}{2}y^4 + 2y^3\right]_{y=0}^{y=2x} dx = \int_0^1 (40x^4 + 16x^3)\, dx \\ &= \left[8x^5 + 4x^4\right]_0^1 = 12 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde, y-ekseni etrafındaki eylemsizlik momenti

$$I_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2 \delta(x, y)\, dy\, dx = \frac{39}{5}$$

olarak bulunur. I_x'i hesaplamak için y^2 kere yoğunluk fonksiyonunu ve I_y'yi hesaplamak için de x^2 kere yoğunluk fonksiyonunu integre ettiğimize dikkat edin.

I_x ve I_y'yi bildiğimiz için, I_0'ı bulmak için bir integral kurmamız gerekmez: $I_0 = I_x + I_y$ denklemini kullanabiliriz:

$$I_0 = 12 + \frac{39}{5} = \frac{60 + 39}{5} = \frac{99}{5}$$

Üç jirasyon yarıçapı ise,

$$R_x = \sqrt{I_x/M} = \sqrt{12/14} = \sqrt{6/7} \approx 0.93$$

$$R_y = \sqrt{I_y/M} = \sqrt{\left(\frac{39}{5}\right)/14} = \sqrt{39/70} \approx 0.75$$

$$R_0 = \sqrt{I_0/M} = \sqrt{\left(\frac{99}{5}\right)/14} = \sqrt{99/70} \approx 1.19$$

olarak bulunur.

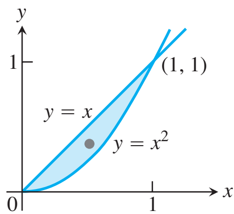
Momentler istatistikte de önemlidir. Birinci moment, bir veri kümesinin ortalaması μ'nün hesabında kullanılır. İkinci moment de $\left(\Sigma^2\right)$ variansını ve $\left(\Sigma\right)$ standart sapmasını hesaplamakta kullanılır. Üçüncü ve dördüncü momentler eğrilik (skewness) ve kurtosis olarak bilinen istatistiksel büyüklükleri hesaplamakta kullanılırlar.

Geometrik Şekillerin Merkezleri

Bir cismin yoğunluğu sabitse, Tablo 15.1'de $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ formüllerinde pay ve payda sadeleşir. $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ söz konusu olduğunda, δ yoğunluğu 1 bile olabilir. Yani, δ sabitken, kütle merkezinin yeri cismin yapıldığı malzemenin değil, şeklinin bir özelliği olur. Böyle durumlarda, mühendisler kütle merkezini cismin **merkezi** olarak adlandırabilirler. Bir merkezi bulmak için, δ'yı 1'e eşitler ve $\bar{x}$ ve $\bar{y}$'yi daha önceki gibi, birinci momentleri kütleye bölerek buluruz.

ÖRNEK 6 Bir Bölgenin Merkezini Bulmak

Birinci dörtte bir bölgede, üstten $y = x$ doğrusu ve alttan $y = x^2$ parabolüyle sınırlı bölgenin merkezini bulun.



ŞEKİL 15.20 Bu bölgenin merkezi Örnek 6'da bulunmuştur.

Çözüm Bölgeyi çizer ve integrasyon sınırlarını belirleyecek detayları ekleriz (Şekil 15.20). Sonra δ'yı 1'e eşitler ve Tablo 15.1'deki uygun formülleri hesaplarız:

$$M = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 1\, dy\, dx = \int_0^1 \left[y\right]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$M_x = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} y\, dy\, dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{1}{15}$$

$$M_y = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x\, dy\, dx = \int_0^1 \left[xy\right]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Bu M, M_x ve M_y değerlerinden

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1/12}{1/6} = \frac{1}{2} \qquad \text{ve} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1/15}{1/6} = \frac{2}{5}$$

buluruz. Merkez $(1/2, 2/5)$ noktasıdır. ■

ALIŞTIRMALAR 15.2

İki Katlı İntegrasyonla Alanlar

1–8 alıştırmalarında, verilen doğru ve eğrilerle sınırlı bölgeleri çizin. Sonra bölgenin alanını iki katlı bir tekrarlı integral olarak ifade edin ve integrali hesaplayın.

1. Koordinat eksenleri ve $x + y = 2$ doğrusu

2. $x = 0$, $y = 2x$ ve $y = 4$ doğruları

3. $x = -y^2$ parabolü ve $y = x + 2$ doğrusu

4. $x = y - y^2$ parabolü ile $y = -x$ doğrusu

5. $y = e^x$ eğrisi ile $y = 0$, $x = 0$ ve $x = \ln 2$ doğrusu

6. Birinci dörtte bir bölgede, $y = \ln x$ ve $y = 2\ln x$ eğrileri ile $x = e$ doğrusu

7. $x = y^2$ ve $x = 2y - y^2$ parabolleri

8. $x = y^2 - 1$ ve $x = 2y^2 - 2$ parabolleri

İntegrasyon Bölgelerini Belirlemek

9–14 alıştırmalarındaki integraller ile integrallerin toplamı xy-düzlemindeki bölgelerin alanlarını verir. Her bölgeyi çizin, her sınırlayıcı eğriyi denklemiyle belirtin ve eğrilerin kesiştikleri noktaların koordinatlarını verin. Sonra her bölgenin alanını bulun.

9. $\displaystyle\int_0^6 \int_{y^2/3}^{2y} dx\, dy$

10. $\displaystyle\int_0^3 \int_{-x}^{x(2-x)} dy\, dx$

11. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} dy\, dx$

12. $\displaystyle\int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} dx\, dy$

13. $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_{-2x}^{1-x} dy\, dx + \int_0^2 \int_{-x/2}^{1-x} dy\, dx$

14. $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2-4}^0 dy\, dx + \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy\, dx$

Ortalama Değerler

15. $f(x, y) = \sin(x + y)$'nin

a. $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$ dikdörtgeninde,

b. $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi/2$ dikdörtgeninde

ortalama değerini bulun.

16. Sizce hangisi daha büyük olacaktır, $f(x, y) = xy$'nin $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ karesi üzerindeki ortalama değeri mi, f'nin birinci dörtte bir bölgedeki $x^2 + y^2 \le 1$ çeyrek çemberindeki ortalama değeri mi? Bulmak için hesaplayın.

17. $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$ karesinde $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin ortalama yüksekliğini bulun.

18. $f(x, y) = 1/(xy)$'nin $\ln 2 \le x \le 2\ln 2$, $\ln 2 \le y \le 2\ln 2$ karesindeki ortalama değerini bulun.

Sabit Yoğunluk

19. Kütle merkezi bulmak Birinci dörtte bir bölgede $x = 0$, $y = x$ doğruları ve $y = 2 - x^2$ parabolüyle sınırlı, $\delta = 3$ yoğunluklu ince bir plakanın kütle merkezini bulun.

20. Eylemsizlik momentleri ve jirasyon yarıçapı bulmak Birinci dörtte bir bölgede $x = 3$ ve $y = 3$ doğrularıyla sınırlı, sabit δ yoğunluklu ince bir plakanın koordinat eksenleri etrafında eylemsizlik momentlerini ve jirasyon yarıçaplarını bulun.

21. Bir merkez bulmak Birinci dörtte bir bölgede x-ekseni, $y^2 = 2x$ parabolü ve $x + y = 4$ doğrusuyla sınırlı bölgenin merkezini bulun.

22. Bir merkez bulmak Birinci dörtte bir bölgeden $x + y = 3$ doğrusuyla kesilen üçgen bölgenin merkezini bulun.

23. Bir merkez bulmak x-ekseni ve $y = \sqrt{1 - x^2}$ eğrisiyle sınırlı yarı dairesel bölgenin merkezini bulun.

24. Bir merkez bulmak Birinci dörtte bir bölgede $y = 6x - x^2$ parabolü ve $y = x$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanı $125/6$ birimdir. Merkezi bulun.

25. Bir merkez bulmak Birinci dörtte bir bölgeden $x^2 + y^2 = a^2$ çemberiyle kesilen bölgenin merkezini bulun.

26. Bir merkez bulmak x-ekseni ile $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$ yayının arasındaki bölgenin merkezini bulun.

27. Eylemsizlik momentleri bulmak $x^2 + y^2 = 4$ çemberiyle sınırlı $\delta = 1$ yoğunluklu ince tabakanın x-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentini bulun. Sonra bu sonucu kullanarak I_y ve I_0'ı bulun.

28. Bir eylemsizlik momenti bulmak $y = (\sin^2 x)/x^2$ eğrisi ve x-ekseninin $\pi \le x \le 2\pi$ aralığıyla sınırlı, sabit $\delta = 1$ yoğunluklu ince yaprağın y-eksenine göre eylemsizlik momentini bulun.

29. Sonsuz bir bölgenin merkezi İkinci dörtte bir bölgede koordinat eksenleri ve $y = e^x$ eğrisi ile çevrelenen sonsuz bölgenin merkezini bulun (Kütle-moment formüllerinde genelleştirilmiş integraller kullanın).

30. Sonsuz bir plakanın birinci momenti Birinci dörtte bir bölgede $y = e^{-x^2/2}$ eğrisinin altında kalan sonsuz bölgeyi kaplayan $\delta(x, y) = 1$ yoğunluklu ince plakanın y-ekseni etrafındaki birinci momentini bulun.

Değişken Yoğunluk

31. Bir eylemsizlik momentleri ve jirasyon yarıçapı bulmak $\delta(x, y) = x + y$ ise, $x = y - y^2$ parabolü ve $x + y = 0$ doğrusu ile sınırlanan ince plakanın x-eksen etrafındaki eylemsizlik momentini ve jirasyon yarıçapını bulun.

32. Kütle bulmak $\delta(x, y) = 5x$ ise, $x^2 + 4y^2 = 12$ elipsinden $x = 4y^2$ parabolü ile kesilen küçük bölgeyi kaplayan ince plakanın kütlesini bulun.

33. Kütle merkezi bulmak $\delta(x, y) = 6x + 3y + 3$ ise, y-ekseni ile $y = x$ ve $y = 2 - x$ doğrularıyla sınırlı ince üçgen bir plakanın kütle merkezini bulun.

34. Bir kütle merkezi ve eylemsizlik momenti bulmak (x, y) noktasındaki yoğunluk $\delta(x, y) = y + 1$ ise, $x = y^2$ ve $x = 2y - y^2$ eğrileriyle sınırlı ince plakanın kütlesini ve x-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentini bulun.

35. Kütle merkezi, eylemsizlik momenti ve jirasyon yarıçapı $\delta(x, y) = x + y + 1$ ise, birinci dörtte bir bölgeden $x = 6$ ve $y = 1$ doğrularıyla kesilen ince dikdörtgen plakanın kütle merkezini ve y-ekseni etrafındaki jirasyon yarıçapını bulun.

36. Kütle merkezi, eylemsizlik momenti ve jirasyon yarıçapı $\delta(x, y) = y + 1$ ise, $y = 1$ doğrusu ve $y = x^2$ parabolü ile sınırlı ince plakanın kütle merkezini ve y ekseni etrafındaki eylemsizlik momenti ile jirasyon yarıçapını bulun.

37. Kütle merkezi, eylemsizlik momenti ve jirasyon yarıçapı $\delta(x, y) = 7y + 1$ ise, x-ekseni, $x = \pm 1$ doğruları ve $y = x^2$ parabolü ile sınırlı ince plakanın kütle merkezini ve y-ekseni etrafındaki eylemsizlik momenti ile jirasyon yarıçapını bulun.

38. Kütle merkezi, eylemsizlik momenti ve jirasyon yarıçapı $\delta(x, y) = 1 + (x/20)$ ise, $x = 0$, $x = 20$, $y = -1$ ve $y = 1$ doğrularıyla sınırlı ince bir dikdörtgen plakanın kütle merkezini ve x-ekseni etrafındaki eylemsizlik momenti ve jirasyon yarıçapını bulun.

39. Kütle merkezi, eylemsizlik momenti ve jirasyon yarıçapı $\delta(x, y) = y + 1$ ise, $y = x$, $y = -x$ ve $y = 1$ doğrularıyla sınırlı ince üçgen plakanın kütle merkezini, koordinat eksenleri etrafındaki eylemsizlik momentleri ile jirasyon yarıçaplarını ve kutupsal eylemsizlik momentini ve jirasyon yarıçapını bulun.

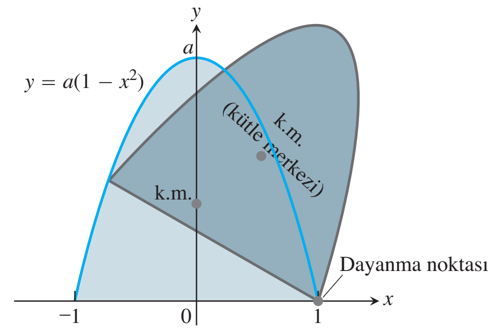
40. Kütle merkezi, eylemsizlik momenti ve jirasyon yarıçapı Alıştırma 39'u $\delta(x, y) = 3x^2 + 1$ için tekrarlayın.

Teori ve Örnekler

41. Bakteri nüfusu $f(x, y) = (10{,}000e^y)/(1 + |x|/2)$ ifadesi xy-düzleminde, x ve y santimetre olmak üzere, bir bakteri grubunun "nüfus yoğunluğunu" temsil ediyorsa, $-5 \le x \le 5$ ve $-2 \le y \le 0$ dikdörtgeninin içinde yaşayan toplam bakteri nüfusunu bulun.

42. Bölgesel Nüfus $f(x, y) = 100\,(y + 1)$ fonksiyonu ve mil olarak ölçülmek üzere Dünya'da bir düzlemsel bölgenin nüfus yoğunluğunu temsil ediyorsa, $x = y^2$ ve $x = 2y - y^2$ eğrileriyle sınırlı bölgedeki insan sayısını bulun.

43. Aygıt tasarımı Bir aygıt tasarlarken, düşünülen şeylerden biri aygıtın devrilmesinin ne kadar zor olacağıdır. Eğildiğinde, kütle merkezi *dayanma noktası*nın, aygıtın üzerinde döndüğü noktanın, doğru tarafında olduğu sürece, kendini düzeltecektir. Neredeyse sabit yoğunluklu bir aygıtın profilinin eski moda bir radyo gibi parabolik olduğunu varsayın. xy-düzlemindeki $0 \le y \le a(1 - x^2)$, $-1 \le x \le 1$ bölgesini doldurduğunu varsayın (Şekle bakın). Hangi a değerleri aygıtın 45°'den fazla eğilmesini sağlar?



44. Bir eylemsizlik momentini minimize etmek Sabit $\delta(x, y) = 1$ yoğunluklu dikdörtgen bir plaka birinci dörtte bir bölgede $x = 4$ ve $y = 2$ doğrularıyla sınırlı bölgeyi kaplamaktadır. Dikdörtgenin $y = a$ doğrusu etrafındaki eylemsizlik momenti I_a

$$I_a = \int_0^4 \int_0^2 (y - a)^2 \, dy \, dx$$

integraliyle verilir. I_a'yı minimize eden a değerini bulun.

45. Sınırsız bir bölgenin merkezi xy-düzleminde $y = 1/\sqrt{1 - x^2}$, $y = -1/\sqrt{1 - x^2}$ eğrileri ve $x = 0$, $x = 1$ doğrularıyla sınırlanan sonsuz bölgenin merkezini bulun.

46. İnce bir çubuğun jirasyon yarıçapı Sabit çizgisel δ gm/cm yoğunluklu ve L cm uzunluklu ince çubuğun aşağıdaki eksenlere göre jirasyon yarıçapını bulun.

a. çubuğun kütle merkezinden geçen ve çubuğun eksenine dik eksene göre;

b. çubuğun uçlarından birinde çubuğun eksenine dik eksene göre.

47. (*Alıştırma 34'ün devamı*) Sabit δ yoğunluklu ince bir plaka xy-düzleminde $x = y^2$ ve $x = 2y - y^2$ eğrileriyle sınırlı bir R bölgesini kaplamaktadır.

a. Sabit yoğunluk Plakanın kütlesini Alıştırma 34'tekiyle aynı yapacak δ'yı bulun.

b. Ortalama Değer (a) şıkkındaki δ'yı $\delta(x, y) = y + 1$'in R'deki ortalama değeriyle karşılaştırın.

48. Teksas'taki ortalama sıcaklık *Teksas Almanağı*'na göre, Teksas'ta 254 ilçe ve her ilçede bir Ulusal Hava Servisi istasyonu bulunmaktadır. t_0 anında, hava istasyonlarından her birinin yerel sıcaklığı kaydettiğini varsayın. t_0 anında Teksas'taki ortalama sıcaklığı verecek mantıklı bir yaklaşım sunan formülü bulun. Yanıtınız *Teksas Almanağı*'nda bulunan verileri içermelidir.

Paralel Eksen Teoremi

$L_{\text{k.m.}}$, xy-düzleminde bir bölgeyi kaplayan m kütleli ince bir plakanın kütle merkezinden geçen bir doğru olsun. L, $L_{\text{k.m.}}$'ye paralel ve h birim uzakta bir doğru olsun. **Paralel Eksen Teoremi** bu koşullar altında plakanın L ve $L_{\text{k.m.}}$ etrafındaki eylemsizlik momentleri I_L ve $L_{\text{k.m.}}$'nin

$$I_L = L_{\text{k.m.}} + mh^2$$

denklemini sağladıklarını söyler.

49. Paralel Eksen Teoreminin ispatı

a. Plaka düzleminde, plakanın kütle merkezinden geçen herhangi bir doğru etrafında, plakanın birinci momentin sıfır olduğunu gösterin (*İpucu*: Doğru y-ekseni olmak üzere, kütle merkezini orijine yerleştirin. $\bar{x} = M_y/M$ formülü size ne söyler?).

b. (a) şıkkındaki sonucu kullanarak Paralel Eksen Teoremini türetin. Düzlemin koordinatlarının, $L_{\text{k.m.}}$'yi y-ekseni, L'yi de $x = h$ doğrusu yapacak şekilde olduğunu varsayın. Sonra I_L integralinin integrandını açarak integralleri değerlerini bildiğiniz integrallerin toplamı olarak yazın.

50. Eylemsizlik momentleri bulmak

a. Paralel Eksen Teoreminin ve Örnek 4'ün sonuçlarını kullanarak, Örnek 4'teki plakanın, plakanın kütle merkezinden geçen dikey ve yatay doğrular etrafındaki eylemsizlik momentlerini bulun.

b. (a)'daki sonucu kullanarak plakanın $x = 1$ ve $y = 2$ doğruları etrafındaki eylemsizlik momentini bulun.

Pappüs Formülü

Pappus, düzlemde üst üste binmeyen iki bölgenin birleşimlerinin merkezinin, bölgelerin kendi kütle merkezlerini birleştiren doğru üzerinde bulunduğunu biliyordu. Daha ayrıntılı olarak, m_1 ve m_2'nin xy-düzleminde üst üste binmeyen P_1 ve P_2 bölgelerini kaplayan ince plakaların kütleleri olduğunu varsayın. $\mathbf{c}_1$ ve $\mathbf{c}_2$ de, sırasıyla, orijinden P_1 ve P_2'nin kütle merkezlerine olan vektörler olsun. Bu durumda, iki plakanın birleşimi $P_1 \cup P_2$'nin kütle merkezi

$$\mathbf{c} = \frac{m_1\mathbf{c}_1 + m_2\mathbf{c}_2}{m_1 + m_2}. \tag{5}$$

vektörüyle belirlenir. (5) denklemi **Pappus formülü** olarak bilinir. İkiden fazla üst üste binmeyen plaka için, sayıları sonlu olmak üzere, bu formül

$$\mathbf{c} = \frac{m_1\mathbf{c}_1 + m_2\mathbf{c}_2 + \cdots + m_n\mathbf{c}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \tag{6}$$

şeklinde genelleşir. Bu formül özellikle merkezlerini geometriden bildiğimiz sabit yoğunluklu parçalardan oluşan ve şekli düzgün olmayan bir plakanın merkezini bulmak için yararlıdır. Her parçanın merkezini bulur ve (6) denklemini uygulayarak plakanın merkezini buluruz.

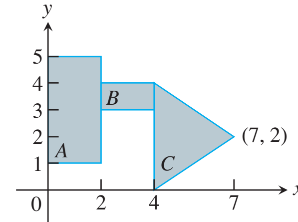
51. Pappus formülünü (denklem (5)) türetin. (*İpucu*: Plakaları birinci dörtte bir bölgedeki bölgeler olarak çizin ve kütle merkezlerini $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$, $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ olarak isimlendirin. Koordinat eksenleri etrafında $P_1 \cup P_2$'nin momentleri nedir?)

52. (5) denklemini ve matematiksel indüksiyon kullanarak (6) denkleminin herhangi bir pozitif $n > 2$ tamsayısı için geçerli olduğunu gösterin.

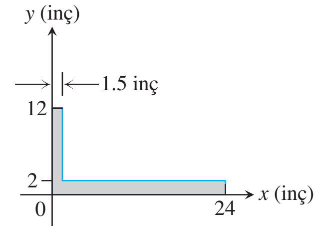
53. A, B ve C aşağıda gösterilen şekiller olsun. Pappus formülünü kullanarak aşağıdaki bölgelerin merkezlerini bulun.

a. $A \cup B$ **b.** $A \cup C$

c. $B \cup C$ **d.** $A \cup B \cup C$.



54. Kütle merkezi yerleştirmek Aşağıda gösterilen marangoz karesinin kütle merkezinin yerini belirleyin.



55. İkizkenar bir T üçgeninin tabanı $2a$ ve yüksekliği h'dir. Taban, bir dondurma külahına benzer bir şekil oluşturacak şekilde, a yarıçaplı dairesel bir D yarım diskin çapı üzerinde bulunmaktadır. $T \cup D$'nin merkezinin T ve D'nin ortak sınırında bulunması için a ve h arasındaki ilişki ne olmalıdır? Peki kütle merkezinin T'nin içinde olması için?

56. h yükseklikli ikizkenar bir T üçgeninin tabanı, kenarlarının uzunluğu s olan bir Q karesinin bir kenarıdır (Kare ve üçgen üst üste binmezler). $T \cup Q$'nun merkezinin üçgenin tabanında olması için h ile s arasındaki ilişki ne olmalıdır? Yanıtınızı Alıştırma 55'in yanıtıyla karşılaştırın.

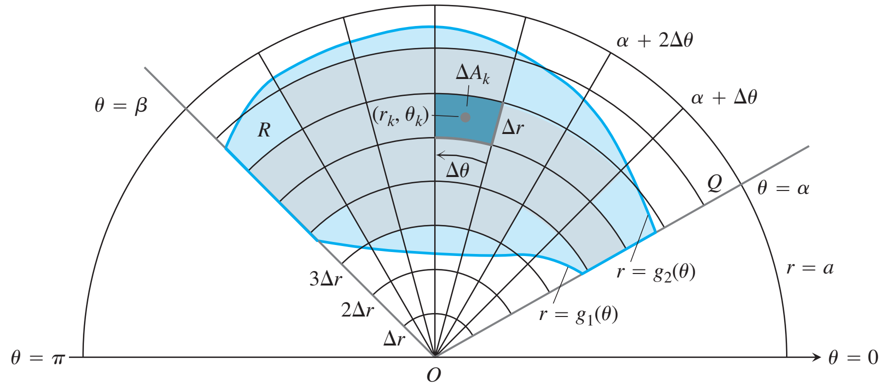
15.3 Kutupsal Formda İki Katlı İntegraller

Bazen, kutupsal koordinatlara geçersek integralleri hesaplamak daha kolaydır. Bu bölüm değişimin nasıl yapılacağını ve sınırları kutupsal denklemlerle verilen integrallerin nasıl hesaplanacağını göstermektedir.

Kutupsal Koordinatlarda İntegraller

Bir fonksiyonun xy-düzlemindeki bir R bölgesi üzerinde iki katlı integralini tanımlarken, işe R'yi kenarları koordinat eksenlerine paralel dikdörtgenlere bölerek başladık. Bunlar kullanılması doğal şekillerdir, çünkü kenarlarının ya x-değerleri ya da y-değerleri sabittir. Kutupsal koordinatlarda doğal şekil, kenarları sabit r- veya θ- değerleri olan "kutupsal dikdörtgenler"dir.

Bir $f(r, \theta)$ fonksiyonunun $\theta = \alpha$ ve $\theta = \beta$ ışınları ile sürekli $r = g_1(\theta)$ ve $r = g_2(\theta)$ eğrilerinin sınırladığı bir R bölgesinde tanımlandığını varsayın. Ayrıca, α ile β arasındaki her θ değeri için, $0 \leq g_1(\theta) \leq g_2(\theta) \leq a$ olduğunu varsayın. Bu durumda R, $0 \leq r \leq a$ ve $a \leq \theta \leq \beta$ denklemleriyle tanımlanan pervane-şekilli bölgede bulunur. Şekil 15.21'e bakın.



ŞEKİL 15.21 R: $g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$, $a \leq \theta \leq \beta$ bölgesi, pervane-şekilli Q: $0 \leq r \leq a$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ bölgesi içinde bulunur. Q'nun dairesel yay ve ışınlarla bölünüşü R'nin bir bölünüşünü verir.

Q'yu bir dairesel yay ve ışın şebekesiyle kaplarız. Yaylar merkezleri orijinde olan, $\Delta r = a/m$ olmak üzere, Δr, $2\Delta r, \ldots, m\Delta r$ yarıçaplı çemberlerden kesilmiştir. Işınlar, $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/m'$ olmak üzere,

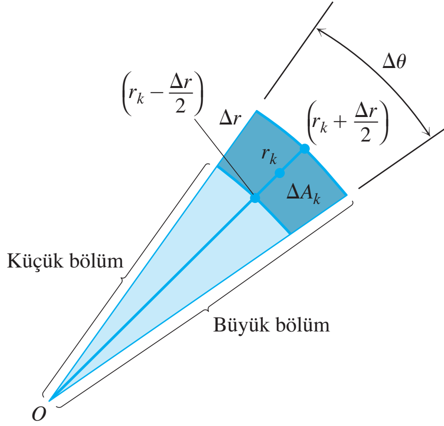
$$\theta = \alpha, \qquad \theta = \alpha + \Delta\theta, \qquad \theta = \alpha + 2\Delta\theta, \qquad \ldots, \qquad \theta = \alpha + m'\Delta\theta = \beta$$

ile verilir. Yaylar ve ışınlar Q'yu "kutupsal dikdörtgenler" denen küçük parçalara ayırır.

R'nin içinde kalan kutupsal dikdörtgenleri (sırası önemli değildir), alanlarına $\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots, \Delta A_n$ diyerek numaralandırırız. Alanı ΔA_k olan kutupsal dikdörtgenin içinde herhangi bir (r_k, θ_k) noktası alalım.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k)\, \Delta A_k$$

toplamını oluşturalım.



ŞEKİL 15.22

$$\Delta A_k = \begin{pmatrix}\text{büyük bölü-}\\ \text{mün alanı}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{küçük bölü-}\\ \text{mün alanı}\end{pmatrix}$$

olduğunun gözlenmesi, $\Delta A_k = r_k\,\Delta r\,\Delta\theta$ formülünü verir.

f fonksiyonu R üzerinde sürekli ise, Δr ve $\Delta\theta$'yı sıfıra götürecek şekilde şebekeyi küçültürken bu toplam bir limite yaklaşacaktır. Bu limite f'nin R üzerindeki iki katlı integrali denir. Sembolik olarak,,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f(r, \theta)\, dA$$

olarak yazılır. Bu limiti hesaplamak için, önce S_n toplamını, ΔA_k'yı Δr ve $\Delta\theta$ cinsinden ifade edilecek şekilde yazmamız gerekir. Uygunluk için, r_k'yı k. kutupsal dikdörtgen ΔA_k'yı sınırlayan iç ve dış yayların yarıçaplarının ortalaması olarak alırız. ΔA_k'yi içten sınırlayan yayın yarıçapı $r_k - (\Delta r/2)$'dir (Şekil 15.22). Dış yayın yarıçapı ise $r_k + (\Delta r/2)$'dir.

Yarıçapı r olan bir çemberin, açısı θ olan takoz-şekilli bir bölümünün alanı, çemberin alanı

$$A = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2$$

dir. Bu, çemberin alanı πr^2'yi, takoz içinde kalan çember alanının oranı, $\theta/2\pi$ ile çarparak görülebilir.

$$\text{İç yarıçap:}\quad \frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$$

$$\text{Dış Yarıçap:}\quad \frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$\Delta A_k = \text{Büyük bölümün alanı} - \text{Küçük bölümün alanı}$$

$$= \frac{\Delta\theta}{2}\left[\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 - \left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2\right] = \frac{\Delta\theta}{2}(2r_k\,\Delta r) = r_k\,\Delta r\,\Delta\theta$$

olur. Bu sonuçları S_n'yi tanımlayan toplamla birleştirmek

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k) r_k\,\Delta r\,\Delta\theta$$

verir. $n \to \infty$ iken ve Δr ve $\Delta\theta$ değerleri sıfıra yaklaşırken bu toplamlar

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

iki katlı integraline yakınsar.

Fubini teoreminin bir versiyonu, bu toplamlarla yaklaşılan limitin r ve θ'ya göre tekrarlı integrallerle

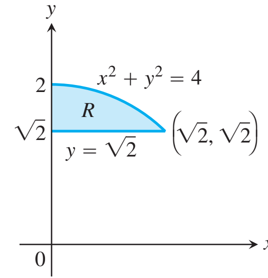
$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

şeklinde hesaplanabileceğini söyler.

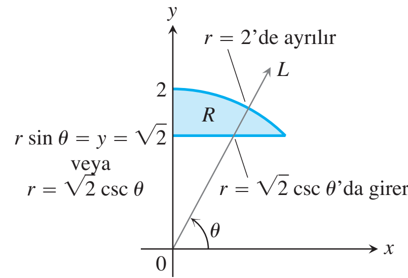
İntegrasyon Sınırlarını Bulmak

Kartezyen koordinatlarda integrasyon sınırlarını bulma prosedürü kutupsal koordinatlarda da işe yarar. $\iint_R f(r, \theta)\, dA$ integralini kutupsal koordinatlardaki bir R bölgesinde, önce r'ye göre sonra θya göre integre ederek hesaplamak için aşağıdaki adımları atın.

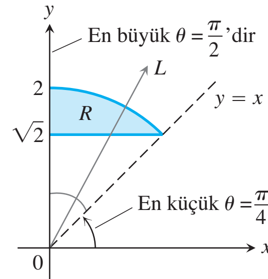
1. *Bir çizim:* Bölgeyi çizin ve sınırlayıcı eğrileri belirtin.



2. *İntegrasyonun r-sınırlarını bulun*: Orijinden geçen ve R'yi artan r yönünde kesen bir L ışını düşünün L'nin R'ye girdiği ve çıktığı r-değerlerini işaretleyin. Bunlar integrasyonun r-sınırlarıdır. Genellikle L'nin pozitif x-ekseniyle yaptığı θ açısına bağlıdırlar.



3. *İntegrasyonun θ-sınırlarını bulun*: R'yi sınırlayan en büyük ve en küçük θ-değerlerini bulun. Bunlar integrasyonun θ-sınırlarıdır.



İntegral

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \int_{r=\sqrt{2}\csc\theta}^{r=2} f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

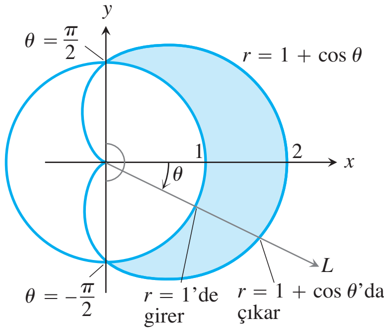
olur.

ÖRNEK 1 İntegrasyon Sınırlarını Bulmak

$r = 1 + \cos\theta$ kardioidinin içinde ve $r = 1$ çemberinin dışında kalan R bölgesinde $f(r, \theta)$'yı integre etmek için integrasyon sınırlarını bulun.

Çözüm

1. Önce bölgeyi çizer ve sınırlayıcı eğrileri belirtiriz (Şekil 15.23).
2. Sonra *integrasyonun r-sınırlarını* buluruz. Orijinden çıkan tipik bir ışın $r = 1$'de R'ye girer ve $r = 1 + \cos\theta$'da çıkar.



ŞEKİL 15.23 Örnek 1'deki bölge için kutupsal koordinatlarda integrasyon sınırlarını bulmak..

3. Son olarak *integrasyonun θ-sınırlarını* buluruz: Orijinden çıkarak R'yi kesen ışınlar $\theta = -\pi/2$' den $\theta = \pi/2$'ye kadar değişir. İntegral

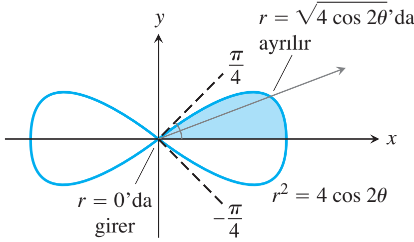
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{1}^{1+\cos\theta} f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

olur. ■

$f(r,\theta)$, değeri 1 olan sabit fonksiyon ise, f'nin R üzerindeki integrali R'nin alanıdır.

> **Kutupsal Koordinatlarda Alan**
> Kutupsal koordinat düzleminde kapalı ve sınırlı bir R bölgesinin alanı
>
> $$A = \iint_R r\, dr\, d\theta$$
>
> ile bulunur.

Bu alan formülü, ispatlamayacağımız halde, daha önceki bütün formüllerle uyumludur.



ŞEKİL 15.24 Renkli bölge üzerinde integral almak için, r'yi 0'dan $\sqrt{4\cos 2\theta}$ 'ya ve θ'yı da 0'dan $\pi/4$'e götürürüz (Örnek 2).

ÖRNEK 2 Kutupsal Koordinatlarda Alan Bulmak

$r^2 = 4\cos 2\theta$ fiyonguyla çevrelenen bölgenin alanını bulun.

Çözüm İntegrasyon sınırlarını belirlemek için fiyongu çizer (Şekil 15.24) ve simetriden dolayı toplam alanın, birinci dörtte bir bölgedeki kısmın 4 katı olduğunu görürüz.

$$A = 4\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}} r\, dr\, d\theta = 4\int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{4\cos 2\theta}} d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/4} 2\cos 2\theta\, d\theta = 4\sin 2\theta\Big]_0^{\pi/4} = 4$$ ■

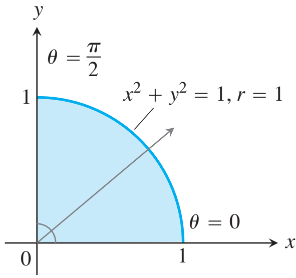
Kartezyen İntegralleri Kutupsal İntegrallere Çevirmek

Kartezyen bir $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ integralini kutupsal bir integrale çevirme prosedürünün iki adımı vardır. Önce $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ yazın ve Kartezyen integraldeki $dx\,dy$ yerine $r\,dr\,d\theta$ koyun. Sonra R'nin sınırı için kutupsal integrasyon sınırlarını bulun.

Bu durumda Kartezyen integral, G kutupsal koordinatlardaki integrasyon bölgesini belirtmek üzere,

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

halini alır. Bu, Bölüm 5'teki değişken değiştirme yöntemi gibidir. Yalnız bu defa bir yerine değiştirilmesi gereken iki değişken vardır. $dx\,dy$ yerine, $dr\,d\theta$ değil, $r\,dr\,d\theta$ yazıldığına dikkat edin. Katlı integrallerde değişken dönüşümünün (yerine koyma) daha genel bir incelemesi Bölüm 15.7'de verilmiştir.



ŞEKİL 15.25 Kutupsal koordinatlarda, bu bölge basit eşitsizliklerle tanımlanır:
$0 \le r \le 1$ ve $0 \le \theta \le \pi/2$
(Örnek 3).

ÖRNEK 3 Kartezyen İntegralleri Kutupsal İntegrallere Çevirmek

Birinci dörtte bir bölgede $x^2 + y^2 = 1$ çeyrek çemberiyle sınırlı, $\delta(x, y) = 1$ yoğunluklu ince plakanın orijin etrafındaki kutupsal eylemsizlik momentini bulun.

Çözüm İntegrasyon sınırlarını belirlemek için plakayı çizeriz (Şekil 15.25). Kartezyen koordinatlarda, kutupsal moment

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

integralinin değeridir. y'ye göre integrasyon, tablosuz hesaplanması zor olan

$$\int_0^1 \left(x^2\sqrt{1 - x^2} + \frac{(1 - x^2)^{3/2}}{3} \right) dx$$

integralini verir.

Esas integrali kutupsal koordinatlara çevirirsek, işler kolaylaşır. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ almak ve $dx\, dy$ yerine $r\, dr\, d\theta$ yazarak,

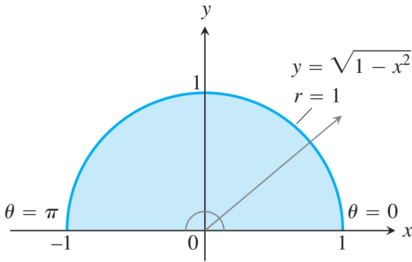
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\, d\theta = \frac{\pi}{8}$$

elde ederiz.

Kutupsal koordinatlara dönüşüm burada neden bu kadar etkilidir? Bir neden $x^2 + y^2$'nin r^2'ye sadeleşmesidir. Diğeri integrasyon sınırlarının sabitlere dönüşmesidir. ■

ÖRNEK 4 Kutupsal Koordinatlar Kullanarak İntegral Hesaplamak



ŞEKİL 15.26 Örnek 4'teki yarı dairesel bölge
$0 \le r \le 1$ ve $0 \le \theta \le \pi$
bölgesidir.

R, x-ekseni ve $y = \sqrt{1 - x^2}$ eğrisiyle sınırlı yarım dairesel bölge olmak üzere (Şekil 15.26)

$$\iint_R e^{x^2+y^2}\, dy\, dx$$

integralini hesaplayın.

Çözüm Kartezyen koordinatlarda, söz konusu integral elemanter olmayan bir integraldir ve $e^{x^2+y^2}$'yi x'e veya y'ye göre integre etmenin doğrudan bir yolu yoktur. Yine de bu integral ve buna benzer başka integraller matematikte —örneğin istatistikte— önemlidir ve bunu hesaplamanın bir yolunu bulmamız gerekir. Kutupsal koordinatlar sorunu çözer. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ almak ve $dy\, dx$ yerine $r\, dr\, d\theta$ yazmak integrali

$$\iint_R e^{x^2+y^2}\, dy\, dx = \int_0^{\pi} \int_0^1 e^{r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(e - 1)\, d\theta = \frac{\pi}{2}(e - 1)$$

olarak hesaplamamızı sağlar. $r\, dr\, d\theta$'daki r, e^{r^2}'yi hesaplamak için ihtiyacımız olan şeydir. O olmadan, devam edemezdik, başlangıçtaki gibi çakılır kalırdık. ■

ALIŞTIRMALAR 15.3

Kutupsal İntegralleri Hesaplamak

1–16 alıştırmalarında, Kartezyen integrali eşdeğer bir kutupsal integrale çevirin. Sonra kutupsal integrali hesaplayın.

1. $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx$

2. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx$

3. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$

4. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$

5. $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\, dx$

6. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$

7. $\int_{0}^{6}\int_{0}^{y} x\, dx\, dy$

8. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{x} y\, dy\, dx$

9. $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}\, dy\, dx$

10. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \frac{4\sqrt{x^2 + y^2}}{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy$

11. $\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{\sqrt{(\ln 2)^2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$

12. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx$

13. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x + y}{x^2 + y^2}\, dy\, dx$

14. $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0} xy^2\, dx\, dy$

15. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln (x^2 + y^2 + 1)\, dx\, dy$

16. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1 + x^2 + y^2)^2}\, dy\, dx$

Kutupsal Koordinatlarda Alan Bulmak

17. Birinci dörtte bir bölgeden $r = 2(2 - \sin 2\theta)^{1/2}$ eğrisiyle kesilen bölgenin alanını bulun.

18. Kardioid ve çember $r = 1 + \cos\theta$ kardioidinin içinde ve $r = 1$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulun.

19. Bir gülün yaprağı $r = 12 \cos 3\theta$ gülünün bir yaprağıyla çevreli bölgenin alanını bulun.

20. Salyangoz kabuğu Pozitif x-ekseni ve $r = 4\theta/3,\ 0 \le \theta \le 2\pi$, spiraliyle çevrili bölgenin alanını bulun. Bölge bir salyangoz kabuğuna benzer.

21. Birinci dörtte bir bölgede kardioid Birinci dörtte bir bölgeden r = 1 + sin θ kardioidiyle kesilen bölgenin alanını bulun.

22. Örtüşen kardioidler $r = 1 + \cos\theta$ ve $r = 1 - \cos\theta$ kardioidlerinin ikisinde de bulunan bölgenin alanını bulun.

Kütle ve Momentler

23. Bir plakanın birinci momenti Alttan x-ekseni ve üstten $r = 1 - \cos\theta$ kardioidiyle sınırlı, sabit $\delta(x, y) = 3$ yoğunluklu ince plakanın x-ekseni etrafındaki birinci momentini bulun.

24. Bir diskin eylemsizlik ve kutupsal momentleri $x^2 + y^2 = a^2$ çemberiyle sınırlı dairenin (x, y) noktasındaki yoğunluğu, k bir sabit olmak üzere, $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$ ise, dairenin x-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentiyle orijin etrafındaki kutupsal eylemsizlik momentini bulun.

25. Bir plakanın kütlesi $r = 3$ çemberinin dışında ve $r = 6 \sin\theta$ çemberinin içindeki bölgeyi kaplayan ince plakanın yoğunluk fonksiyonu $\delta(x, y) = 1/r$ ise, plakanın kütlesini bulun.

26. Bir çember ile örtüşen kardioidin kutupsal momenti $r = 1 - \cos\theta$ kardioidinin içinde ve $r = 1$ çemberinin dışındaki bölgeyi kaplayan ince plakanın yoğunluk fonksiyonu $\delta(x, y) = 1/r^2$ ise, plakanın orijin etrafındaki kutupsal eylemsizlik momentini bulun.

27. Bir kardioid bölgenin merkezi $r = 1 + \cos\theta$ kardioidiyle çevrili bölgenin merkezini bulun.

28. Bir kardioid bölgenin kutupsal momenti $r = 1 + \cos\theta$ kardioidiyle çevrili bölgeyi kaplayan ince plakanın yoğunluk fonksiyonu $\delta(x, y) = 1$ ise, plakanın orijin etrafındaki kutupsal eylemsizlik momentini bulun.

Ortalama Değerler

29. Bir yarım kürenin ortalama yüksekliği xy-düzleminde $x^2 + y^2 \le a^2$ dairesinin üzerindeki $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ yarım küresinin ortalama yüksekliğini bulun.

30. Bir koninin ortalama yüksekliği xy-düzleminde $x^2 + y^2 \le a^2$ dairesinin üstündeki $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin ortalama yüksekliğini bulun.

31. Bir diskin içinden merkezine ortalama uzaklık $x^2 + y^2 \le a^2$ dairesinin içindeki bir $P(x, y)$ noktasından orijine ortalama uzaklığı bulun.

32. Bir diskin içindeki bir noktadan sınırındaki bir noktaya uzaklığın karesinin ortalaması $x^2 + y^2 \le 1$ dairesindeki $P(x, y)$ noktasının $A(1, 0)$ sınır noktasına uzaklığının karesinin ortalama değerini bulun.

Teori ve Örnekler

33. Kutupsal integrale dönüşüm $f(x, y) = [\ln (x^2 + y^2)]/\sqrt{x^2 + y^2}$'yi $1 \le x^2 + y^2 \le e$ bölgesinde integre edin.

34. Kutupsal integrale dönüşüm $f(x, y) = [\ln (x^2 + y^2)]/(x^2 + y^2)$'yi $1 \le x^2 + y^2 \le e^2$ bölgesinde integre edin.

35. Dairesel olmayan dik silindirin hacmi $r = 1 + \cos\theta$ kardiodinin içinde ve $r = 1$ çemberinin dışındaki bölge, içi dolu bir silindirin tabanıdır. Silindirin tepesi $z = x$ düzlemindedir. Silindirin hacmini bulun.

36. Dairesel olmayan dik silindirin hacmi $r^2 = 2\cos 2\theta$ fiyonguyla çevrili bölge, tepesi $z = \sqrt{2 - r^2}$ küresiyle sınırlı, içi dolu silindirin tabanıdır. Silindirin hacmini bulun.

37. Kutupsal integrallere dönüşüm

a. Genelleştirilmiş $I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ integralini hesaplamanın genel yolu karesini integre etmektir:

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

Son integrali kutupsal koordinatları kullanarak hesaplayın ve ortaya çıkan I denklemini çözün.

b. Aşağıdaki integrali hesaplayın.

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{erf}(x) = \lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,dt$$

38. Bir kutupsal integrale dönüşüm Aşağıdaki integrali hesaplayın.

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}\,dx\,dy$$

39. Varlık $f(x, y) = 1/(1 - x^2 - y^2)$ fonksiyonunu $x^2 + y^2 \le 3/4$ dairesi üzerinde integre edin. $f(x, y)$'nin $x^2 + y^2 \le 1$ dairesi üzerinde integrali var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

40. Kutupsal koordinatlarda alan formülü Kutupsal koordinatlarda iki katlı integrali kullanarak, orijin ile kutupsal $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, eğrisi arasında kalan pervane şekilli bölgenin alanı için

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2\,d\theta$$

formülünü türetin.

41. Bir disk içinde verilen bir noktaya ortalama uzaklık P_0, a yarıçaplı bir çember içinde bir nokta olsun ve h de P_0'dan çemberin merkezine uzaklığı göstersin. Keyfi bir P noktasından P_0'a olan uzaklık d ile gösterilsin. Çemberin çevrelediği bölgede d^2'nin ortalama değerini bulun (*İpucu*: Çemberin merkezini orijine, P_0'ı da x-eksenine yerleştirerek işinizi kolaylaştırın).

42. Alan Kutupsal koordinat düzlemindeki bir bölgenin alanının

$$A = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_{\csc\theta}^{2\sin\theta} r\,dr\,d\theta$$

olduğunu varsayın. Bölgeyi çizin ve alanını bulun.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Koordinat Dönüşümleri

43–46 alıştırmalarında, Kartezyen integralleri kutupsal integrallere dönüştürmek ve kutupsal integrali hesaplamak için bir BCS kullanın. Aşağıdaki adımları gerçekleştirin.

a. xy-düzleminde Kartezyen integrasyon bölgesini çizin.

b. (a) şıkkındaki Kartezyen bölgenin her sınırlayıcı eğrisini Kartezyen denkleminden r ve θ'yı çözerek kutupsal temsiline dönüştürün.

c. (b) şıkkındaki sonuçları kullanarak, $r\theta$-düzlemindeki kutupsal integrasyon bölgesini çizin.

d. İntegrandı Kartezyen koordinatlardan kutupsal koordinatlara dönüştürün. (c) şıkkındaki çiziminizden integrasyon sınırlarını belirleyin ve BCS integrasyon komutunu kullanarak kutupsal integrali hesaplayın.

43. $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 \frac{y}{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

44. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x/2} \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

45. $\displaystyle\int_0^1\int_{-y/3}^{y/3} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx\,dy$

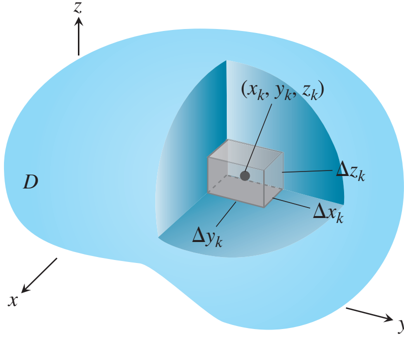
46. $\displaystyle\int_0^1\int_y^{2-y} \sqrt{x + y}\,dx\,dy$

15.4 Kartezyen Koordinatlarda Üç Katlı İntegraller

İki katlı intergallerin, tek katlı integrallerle üstesinden gelebildiklerimizden daha genel konularla ilgilenmemize olanak sağladığı gibi, üç katlı integraller daha da genel problemleri çözmemizi sağlar. Üç katlı integralleri üç boyutlu şekillerin hacimlerini, değişken yoğunluklu katı cisimlerin kütle ve momentlerini ve üç boyutlu bir bölge üzerinde bir fonksiyonun ortalama değerini hesaplamak için kullanırız. Bölüm 16'da göreceğimiz gibi, üç katlı integraller, üç boyutta vektör alanları araştırmaları ve akışkan akışında da ortaya çıkarlar.

Üç Katlı İntegraller

$F(x, y, z)$ uzayda kapalı, sınırlı bir D bölgesinde — örneğin bir top veya bir parça kil tarafından işgal edilen bölge — tanımlanmış bir fonksiyon ise, F'nin D üzerindeki integrali şu



ŞEKİL 15.27 Bir katı cismi ΔV_k hacimli hücrelere bölme.

şekilde tanımlanabilir. D'yi içeren dikdörtgensel kutu gibi bir bölgeyi koordinat düzlemlerine paralel kenarları olan dikdörtgensel hücrelere böleriz (Şekil 15.27). D'nin içindeki hücreleri herhangi bir sıra ile 1'den n'ye kadar numaralandırırız. k. hücrenin boyutları Δx_k, Δy_k, Δz_k ve hacmi $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$'dır. Her hücreden bir (x_k, y_k, z_k) noktası seçer ve

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k \tag{1}$$

toplamını oluştururuz. D'nin, Δx_k, Δy_k, Δz_k ve bölünüşün normu $\|P\|$, Δx_k, Δy_k, Δz_k değerlerinden en büyüğü, hepsi birden sıfıra gidecek şekilde, giderek küçülen hücrelerle bölümlenmelerinde ne olduğu ile ilgileniyoruz. Bölünüşler ve (x_k, y_k, z_k) noktaları nasıl seçilirse seçilsin, tek bir limite ulaşılıyorsa, F fonksiyonu D üzerinde **integrallenebilir** deriz. Önceki gibi, F sürekliyse ve D bölgesi sonlu sayıda düzgün yüzeyin sonlu sayıda düzgün eğri boyunca birleşmesi ile oluşuyorsa F'nin integrallenebilir olduğu gösterilebilir. $\|P\| \to 0$ ve hücrelerin sayısı, n, ∞'a giderken S_n toplamları bir limite yakınsar. Bu limite, ***F*'nin *D* üzerindeki üç katlı integrali** deriz ve

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D F(x, y, z)\, dV \qquad \text{veya} \qquad \lim_{\|P\|\to 0} S_n = \iiint_D F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

yazarız. Sürekli fonksiyonların üzerlerinde integrallenebilir olduğu D bölgeleri, küçük dikdörtgensel hücrelerle yaklaşım yapılabilen bölgelerdir. Uygulamalarda karşılaşılan bölgeler böyle bölgelerdir.

Uzayda Bir Bölgenin Hacmi

F, değeri 1 olan sabit fonksiyon ise, (1) denklemindeki toplamlar

$$S_n = \sum F(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k = \sum 1 \cdot \Delta V_k = \sum \Delta V_k$$

haline indirgenir.

Δx_k, Δy_k ve Δz_k sıfıra yaklaşırken, ΔV_k hücreleri daha küçülür, sayıları artar ve D'nin daha fazlasını doldururlar. Bu nedenle D'nin hacmini

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \iiint_D dV$$

üç katlı integrali olarak tanımlarız.

TANIM **Hacim**

Uzayda kapalı, sınırlı bir D bölgesinin **hacmi**

$$V = \iiint_D dV$$

integraliyle verilir.

Gerçeklenmesini atlamakla birlikte bu tanım daha önceki hacim tanımlarımızla uygunluk içindedir. Biraz sonra göreceğimiz gibi, bu integral eğrisel yüzeylerle sınırlı cisimlerin hacimlerini hesaplamamızı sağlar.

İntegrasyon Sınırlarını Bulmak

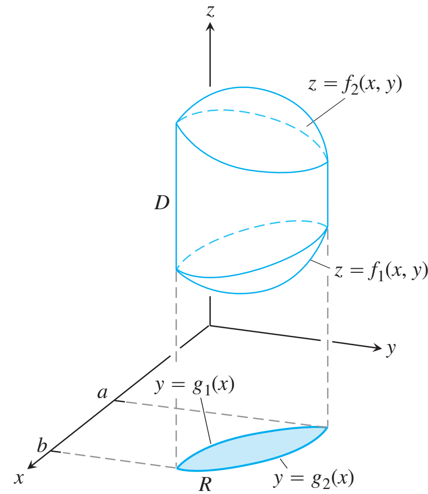
Üç katlı bir integrali, Fubini Teoreminin (Bölüm 15.1) üç-boyutlu bir versiyonunu uygulayarak, ardışık üç integrasyonla hesaplarız. İki katlı integrallerde olduğu gibi, bu ardışık integrallerin integrasyon sınırlarını bulmak için geometrik bir prosedür vardır.

Bir D bölgesi üzerinde

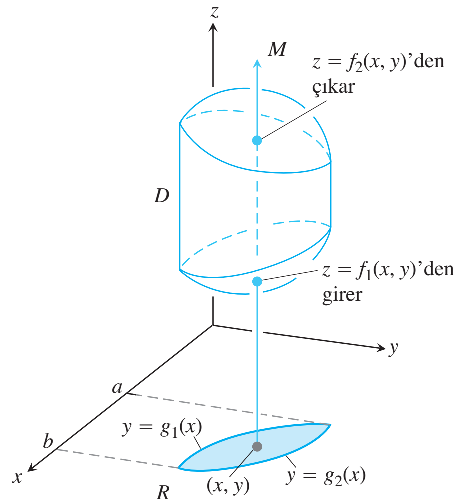
$$\iiint\limits_D F(x, y, z)\, dV$$

integralini hesaplamak için, önce z'ye sonra y'ye ve en sonunda x'e göre integral alın.

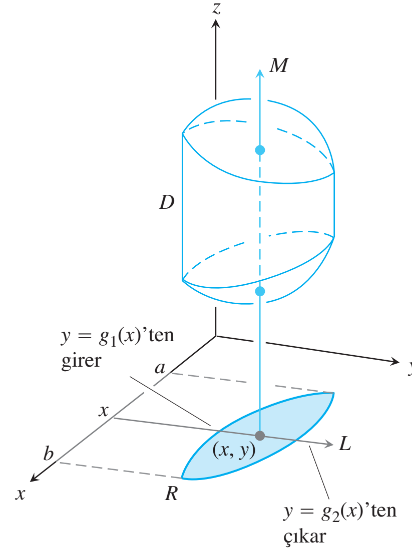
1. *Bir çizim:* D bölgesini xy-düzlemindeki "gölgesi" R (dik iz düşüm) ile birlikte çizin. D'nin alt ve üst sınır yüzeyleri ile R'nin alt ve üst sınır eğrilerini adlandırın.



2. *İntegrasyonun z-sınırlarını bulun:* R'deki tipik bir (x, y) noktasından geçen, z-eksenine paralel bir M doğrusu çizin. z arttıkça, M, D'ye $z = f_1(x, y)$'den girer ve $z = f_2(x, y)$'den çıkar. Bunlar integrasyonun z-sınırlarıdır.



3. *İntegrasyonun y-sınırlarını bulun :* (x, y)'den geçen, y-eksenine paralel bir L doğrusu çizin. y arttıkça, L, R'ye $y = g_1(x)$ den girer ve $y = g_2(x)$'den çıkar. Bunlar integrasyonun y-sınırlarıdır.



4. *İntegrasyonun x-sınırlarını bulun:* R'den geçen, y-eksenine paralel bütün doğruları içeren x-sınırları seçin (yukarıdaki şekilde $x = a$ ve $x = b$). Bunlar integrasyonun x-sınırlarıdır. İntegral

$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

olur. İntegrasyon sırasını değiştirirseniz, benzer prosedürler izleyin. D'nin "gölgesi" ardışık integrasyonun gerçekleştiği son iki değişkenin düzleminde bulunur.

Yukarıdaki prosedür, D bölgesi, üstten ve alttan bir yüzeyle, "gölge" R bölgesi de alt ve üst eğrilerle sınırlı olduğu her durumda uygulanır. Bu prosedür, bazı hallerde bölgeyi basit bölgelere ayırarak prosedürü uygulamak mümkün olsa bile, içinde karmaşık delikler içeren bölgelere uygulanamaz.

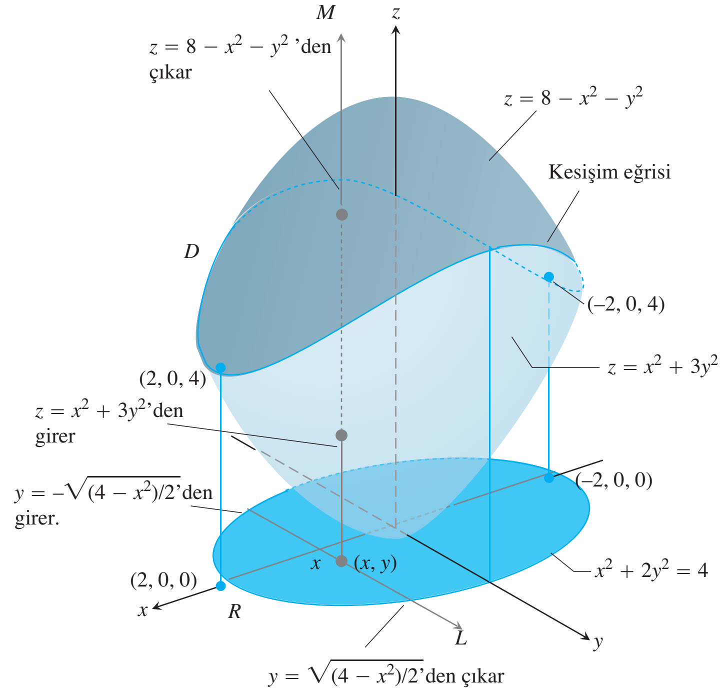
ÖRNEK 1 Bir Hacim Bulmak

$z = x^2 + 3y^2$ ve $z = 8 - x^2 - y^2$ yüzeyleriyle çevrelenen D bölgesinin hacmini bulun.

Çözüm Hacim, $F(x, y, z) = 1$'in D üzerindeki

$$V = \iiint_D dz\, dy\, dx$$

integralidir. İntegrali hesaplamak için integrasyon sınırlarını bulmak üzere önce bölgeyi çizeriz. Yüzeyler (Şekil 15.28) $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2$ veya $x^2 + 2y^2 = 4$, $z > 0$ eliptik silindiri üzerinde kesişirler. D'nin xy-düzlemine izdüşümü olan R bölgesinin sınırı, denklemi aynı olan bir elipstir: $x^2 + 2y^2 = 4$. R'nin "üst" sınırı $y = \sqrt{(4 - x^2)/2}$ eğrisidir. Alt sınır ise $y = -\sqrt{(4 - x^2)/2}$ eğrisidir.



ŞEKİL 15.28 İki paraboloid tarafından çevrelenen bu bölgenin hacmi Örnek 1' de hesaplanmaktadır.

İntegrasyonun z-sınırlarını bulalım. R'nin tipik bir (x, y) noktasından, z-eksenine paralel olarak geçen M doğrusu D'ye $z = x^2 + 3y^2$'den girer ve $z = 8 - x^2 - y^2$'den çıkar.

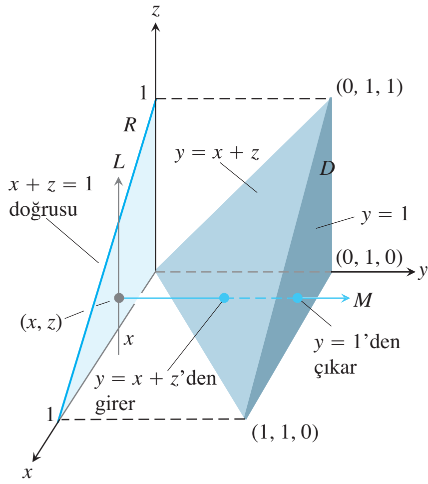
Şimdi de integrasyonun y-sınırlarını bulalım. (x, y)'den, y-eksenine paralel olarak geçen L doğrusu R'ye $y = -\sqrt{(4 - x^2)/2}$'den girer ve $y = \sqrt{(4 - x^2)/2}$.'den çıkar.

Son olarak integrasyonun x-sınırlarını buluruz. L, R'yi tararken, x'in değeri $(-2, 0, 0)$'da $x = -2$'den $(2, 0, 0)$'da $x = 2$'ye kadar değişir. D'nin hacmi

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_D dz\,dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (8 - 2x^2 - 4y^2)\,dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{2}\left[(8 - 2x^2)y - \frac{4}{3}y^3\right]_{y=-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{y=\sqrt{(4-x^2)/2}} dx \\
&= \int_{-2}^{2}\left(2(8 - 2x^2)\sqrt{\frac{4 - x^2}{2}} - \frac{8}{3}\left(\frac{4 - x^2}{2}\right)^{3/2}\right) dx \\
&= \int_{-2}^{2}\left[8\left(\frac{4 - x^2}{2}\right)^{3/2} - \frac{8}{3}\left(\frac{4 - x^2}{2}\right)^{3/2}\right] dx = \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2}(4 - x^2)^{3/2}\,dx \\
&= 8\pi\sqrt{2}. \qquad x = 2\sin u \text{ dönüşümü ile integrasyondan sonra}
\end{aligned}
$$

■

Sıradaki örnekte, farklı bir integrasyon sırasının nasıl kullanıldığını göstermek için D'yi xy-düzlemi yerine xz-düzlemine iz düşürüyoruz.



ŞEKİL 15.29 Dört yüzlü ile sınırlı D bölgesinde tanımlı bir fonksiyonun üç katlı integralini hesaplamak için integrasyon sınırlarını bulmak (Örnek 2).

ÖRNEK 2 İntegrasyon Sınırlarını $dy\,dz\,dx$ Sırasında Bulmak

Köşeleri (0, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0) ve (0, 1, 1)'de olan dört yüzlü ile sınırlı D bölgesinde bir $F(x, y, z)$ fonksiyonunun üç katlı integrali için integrasyon sınırlarını belirleyin.

Çözüm D'yi xz-düzlemindeki "gölgesi" R ile birlikte çizeriz (Şekil 15.29). D'nin üst (sağ taraftaki) sınır yüzeyi $y = 1$ düzlemindedir. Alt (sol taraftaki) sınır yüzey $y = x + z$ düzlemindedir. R'nin üst sınırı $z = 1 - x$ doğrusudur. Alt sınır $z = 0$ doğrusudur.

Önce integrasyonun y-sınırlarını buluruz. R'nin tipik bir (x, z) noktasından y-eksenine paralel olarak geçen doğru D'ye $y = x + z$'den girer ve $y = 1$'den çıkar.

Sonra integrasyonun z-sınırlarını buluruz. (x, z)'den z-eksenine paralel olarak geçen L doğrusu R'ye $z = 0$'dan girer ve $z = 1 - x$'ten çıkar.

Son olarak integrasyonun x-sınırlarını buluruz. L, R'yi tararken, x'in değerleri $x = 0$'dan $x = 1$'e değişir. İntegral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^1 F(x, y, z)\, dy\, dz\, dx \qquad \blacksquare$$

olur.

ÖRNEK 3 Örnek 2'yi $dz\,dy\,dx$ Sırası İle Tekrarlamak

$F(x, y, z)$'yi dört yüzlü ile sınırlı D bölgesinde $dz\,dy\,dx$ sırası ile integre etmek için adımları aşağıdaki gibi düzenleriz.

Önce integrasyonun z-sınırlarını buluruz. xy-düzlemindeki "gölge" nin tipik bir (x, y) noktasından z-eksenine paralel olarak geçen bir doğru D'ye $z = 0$'dan girer ve denklemi $z = y - x$ olan üst yüzeyinden çıkar (Şekil 15.29).

Sonra integrasyonun y-sınırlarını buluruz. xy-düzleminde, $z = 0$, dörtyüzlünün eğik yüzeyi düzlemi $y = x$ doğrusu boyunca keser. (x, y)'den y-eksenine paralel olarak geçen bir doğru xy-düzlemindeki gölge'ye $y = x$'ten girer ve $y = 1$'den çıkar.

Son olarak integrasyonun x-sınırlarını buluruz. Önceki adımdaki y-eksenine paralel doğru gölgeyi tararken, x'in değerleri $x = 0$'dan (1, 1, 0)'da $x = 1$'e değişir. İntegral

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

olur. Örneğin, $F(x, y, z) = 1$ ise

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} dz\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \int_x^1 (y - x)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2 - xy\right]_{y=x}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

bulunur.

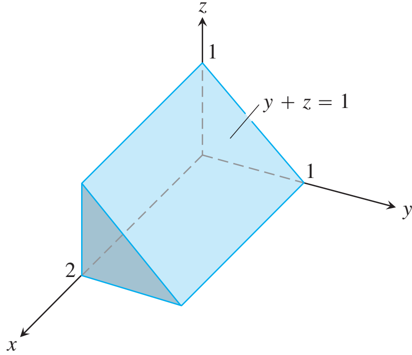
Aynı sonucu $dy\,dz\,dx$ sırasıyla integre ettiğimizde de buluruz,

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^{1} dy\,dz\,dx = \frac{1}{6}.$$

Gördüğümüz gibi, bazen (ama her zaman değil) iki katlı integralleri hesaplamak için ardışık tek katlı integraller iki farklı sırada alınabilir. dx, dy ve dz altı farklı şekilde sıralanabildiğinden, üç katlı integraller için bu sayı altı olabilir. Her sıralama, uzaydaki integrasyon bölgesinin farklı bir tanımlamasını ve farklı integrasyon sınırları verir.

ÖRNEK 4 Farklı İntegrasyon Sıralarını Kullanmak

Aşağıdaki integrallerden her biri Şekil 15.30'da gösterilen katı cismin hacmini verir.



ŞEKİL 15.30 Örnek 4, bu prizmanın hacmi için altı farklı ardışık üç katlı integral verir.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 dx\,dy\,dz$ **(b)** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 dx\,dz\,dy$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z} dy\,dx\,dz$ **(d)** $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-z} dy\,dz\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-y} dz\,dx\,dy$ **(f)** $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-y} dz\,dy\,dx$

(b) ve (c)'deki integralleri hesaplıyoruz.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 dx\,dz\,dy && \text{(b)'deki integral} \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} 2\,dz\,dy \\ &= \int_0^1 \Big[2z\Big]_{z=0}^{z=1-y} dy \\ &= \int_0^1 2(1-y)\,dy \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ve

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z} dy\,dx\,dz && \text{(c)'deki integral} \\ &= \int_0^1 \int_0^2 (1-z)\,dx\,dz \\ &= \int_0^1 \Big[x - zx\Big]_{x=0}^{x=2} dz \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 (2 - 2z)\, dz$$

$$= 1$$

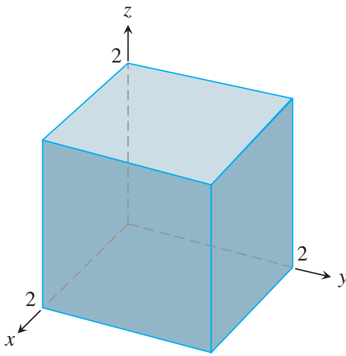
(a), (d), (e) ve (f)'deki integraller de $V = 1$'i verir. ■

Uzayda Bir Fonksiyonun Ortalama Değeri

Bir F fonksiyonunun uzayda bir D bölgesindeki ortalama değeri

$$F\text{'nin } D\text{'deki } \textbf{ortalama değeri} = \frac{1}{D\text{'nin hacmi}} \iiint_D F\, dV \qquad (2)$$

integraliyle hesaplanır. Örneğin, $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ise, F'nin D'deki ortalama değeri, D'deki noktaların orijine olan uzaklıkları ortalamasıdır. $F(x, y, z)$, uzayda bir D bölgesini dolduran cismin (x, y, z) noktasındaki sıcaklığı ise, F'nin D'deki ortalama değeri, cismin ortalama sıcaklığıdır.



ŞEKİL 15.31 Örnek 4'teki integrasyon bölgesi.

ÖRNEK 5 Bir Ortalama Değer Bulmak

$F(x, y, z) = xyz$'nin koordinat düzlemleri ve $x = 2$, $y = 2$ ve $z = 2$ düzlemleriyle sınırlı küp bölge üzerinde ortalama değerini bulun.

Çözüm Kübü, integrasyon sınırlarını gösterecek kadar detayla birlikte çizeriz (Şekil 15.31). Sonra (2) denklemini kullanarak F'nin küp bölge üzerindeki ortalama değerini buluruz.

Kübün hacmi $(2)(2)(2) = 8$'dir. F'nin küp üzerindeki integralinin değeri

$$\int_0^2\int_0^2\int_0^2 xyz\, dx\, dy\, dz = \int_0^2\int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} yz\right]_{x=0}^{x=2} dy\, dz = \int_0^2\int_0^2 2yz\, dy\, dz$$

$$= \int_0^2 \left[y^2 z\right]_{y=0}^{y=2} dz = \int_0^2 4z\, dz = \left[2z^2\right]_0^2 = 8.$$

bulunur.

Bu değerlerle (2) denklemi

$$\begin{matrix} xyz\text{'nin küp üzerindeki} \\ \text{ortalama değeri} \end{matrix} = \frac{1}{\text{hacmi}} \iiint_{\text{küp}} xyz\, dV = \left(\frac{1}{8}\right)(8) = 1$$

verir. İntegrali hesaplarken, dx, dy, dz sırasını seçtik, ama diğer beş olası sıra da aynı işe yarar. ■

Üç Katlı İntegrallerin Özellikleri

Üç katlı integraller tek ve iki katlı integrallerle aynı cebirsel özelliklere sahiptir.

Üç Katlı İntegrallerin Özellikleri

$F = F(x, y, z)$ ve $G = G(x, y, z)$ sürekli ise:

1. *Sabitle Çarpım:* $\displaystyle\iiint_D kF\,dV = k\iiint_D F\,dV$ (herhangi bir k)

2. *Toplam ve Fark:* $\displaystyle\iiint_D (F \pm G)\,dV = \iiint_D F\,dV \pm \iiint_D G\,dV$

3. *Baskınlık:*

   (a) D'de $F \geq 0$ ise, $\displaystyle\iiint_D F\,dV \geq 0$

   (b) D'de $F \geq G$ ise, $\displaystyle\iiint_D F\,dV \geq \iiint_D G\,dV$

4. *Toplanabilirlik :* D, birbiri ile örtüşmeyen D_1 ve D_2 bölgelerinin birleşimi ise

$$\iiint_D F\,dV = \iiint_{D_1} F\,dV + \iiint_{D_2} F\,dV$$

olur.

ALIŞTIRMALAR 15.4

Farklı Tekrarlarla Üç katlı İntegralleri Hesaplamak

1. Dörtyüzlünün hacmini bulmak için $F(x, y, z) = 1$ alarak Örnek 2'deki integrali hesaplayın.

2. **Dikdörtgensel cismin hacmi** Birinci sekizde bir bölgede koordinat düzlemleri, $x = 1$, $y = 2$ ve $z = 3$ düzlemleriyle sınırlı dikdörtgen prizma şeklindeki cismin hacmi için altı farklı ardışık üç katlı integral yazın. İntegrallerden birini hesaplayın.

3. **Dörtyüzlünün hacmi** Birinci sekizde bir bölgeden $6x + 3y + 2z = 6$ düzlemiyle kesilen dört yüzlünün hacmi için altı farklı ardışık üç katlı integral yazın. İntegrallerden birini hesaplayın.

4. **Bir cismin hacmi** Birinci sekizde bir bölgeden $x^2 + z^2 = 4$ silindiri ve $y = 3$ düzlemiyle kesilen bölgenin hacmi için altı farklı ardışık üç katlı integral yazın. İntegrallerden birini hesaplayın.

5. **Paraboloidlerle sınırlanan hacim** D, $z = 8 - x^2 - y^2$ ve $z = x^2 + y^2$ paraboloidleriyle sınırlı bölge olsun. D'nin hacmi için altı farklı ardışık üç katlı integral yazın. İntegrallerden birini hesaplayın.

6. **Paraboloidin içinde bir düzlemin altındaki hacim** D, $z = x^2 + y^2$ paraboloidi ve $z = 2y$ düzlemiyle sınırlı bölge olsun. D'nin hacmini veren, $dz\,dx\,dy$ ve $dz\,dy\,dx$ sıralı ardışık üç katlı integraller yazın. İntegralleri hesaplamayın.

Üç Katlı Ardışık İntegralleri Hesaplamak

7–20 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

7. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)\,dz\,dy\,dx$

8. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{3y}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dx\,dy$

9. $\displaystyle\int_1^e\int_1^e\int_1^e \frac{1}{xyz}\,dx\,dy\,dz$

10. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{3-3x}\int_0^{3-3x-y} dz\,dy\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} y\sin z\,dx\,dy\,dz$

12. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 (x + y + z)\,dy\,dx\,dz$

13. $\displaystyle\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2}} dz\,dy\,dx$

14. $\displaystyle\int_0^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{2x+y} dz\,dx\,dy$

15. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{2-x}\int_0^{2-x-y} dz\,dy\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x^2}\int_3^{4-x^2-y} x\,dz\,dy\,dx$

17. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \cos(u + v + w)\,du\,dv\,dw$ (uvw-uzayı)

18. $\displaystyle\int_1^e\int_1^e\int_1^e \ln r\ln s\ln t\,dt\,dr\,ds$ (rst-uzayı)

19. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{\ln\sec v}\int_{-\infty}^{2t} e^x\,dx\,dt\,dv$ (tvx-uzayı)

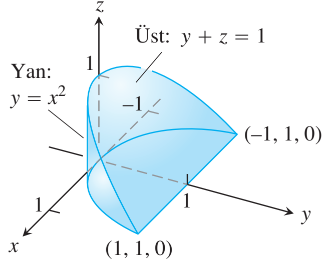
20. $\displaystyle\int_0^7\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-q^2}} \frac{q}{r+1}\,dp\,dq\,dr$ (pqr-uzayı)

Üç Katlı İntegrallerle Hacimler

21. Aşağıda

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} dz\,dy\,dx$$

integralin bölgesi verilmektedir.



İntegrali aşağıdaki sıralarda ardışık bir integral olarak yazın.

a. $dy\,dz\,dx$ **b.** $dy\,dx\,dz$

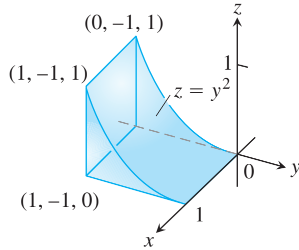
c. $dx\,dy\,dz$ **d.** $dx\,dz\,dy$

e. $dz\,dx\,dy$.

22. Aşağıda

$$\int_{0}^{1}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{y^2} dz\,dy\,dx.$$

integralin bölgesi verilmektedir.



İntegrali aşağıdaki sıralarda ardışık bir integral olarak yazın.

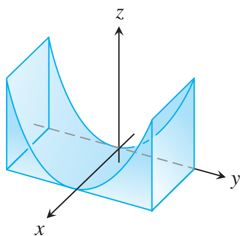
a. $dy\,dz\,dx$ **b.** $dy\,dx\,dz$

c. $dx\,dy\,dz$ **d.** $dx\,dz\,dy$

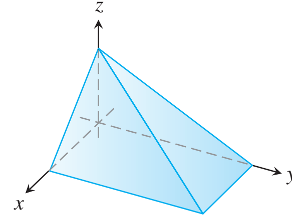
e. $dz\,dx\,dy$.

23–36 alıştırmalarındaki bölgelerin hacmini bulun.

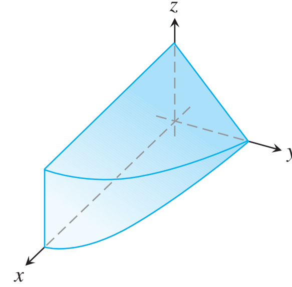
23. $z = y^2$ silindiriyle xy-düzlemi arasında, $x = 0$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$ düzlemleri ile sınırlı bölge.



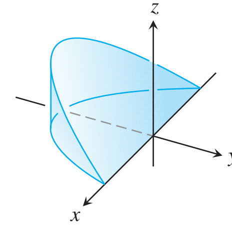
24. Birinci sekizde bir bölgede, koordinat düzlemleri ve $x + z = 1$, $y + 2z = 2$ düzlemleri ile sınırlı bölge



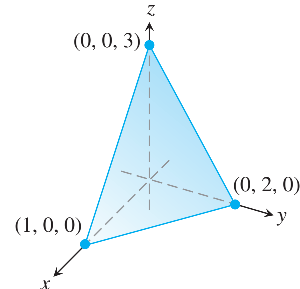
25. Birinci sekizde bir bölgede, koordinat düzlemleri, $y + z = 2$ düzlemi ve $x = 4 - y^2$ silindiri ile sınırlı bölge.



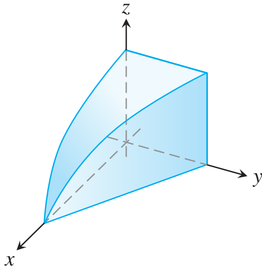
26. $x^2 + y^2 = 1$ silindirinden $z = -y$ ve $z = 0$ düzlemleriyle kesilen bölge.



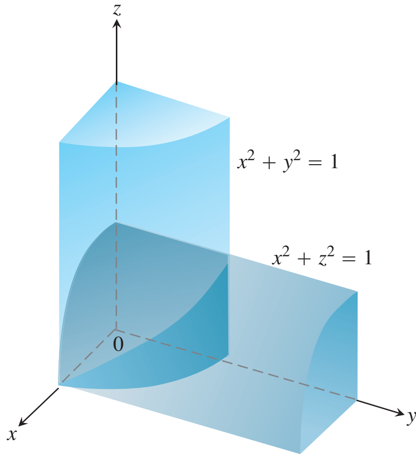
27. Birinci sekizde bir bölgede, koordinat düzlemleri ve (1, 0, 0), (0, 2, 0) ve (0, 0, 3) noktalarından geçen düzlem ile sınırlı dört yüzlü bölge.



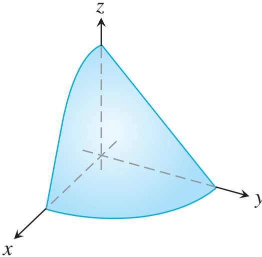
28. Birinci sekizde bir bölgede, koordinat düzlemleri, $y = 1 - x$ düzlemi ve $z = \cos(\pi x/2)$, $0 \le x \le 1$, yüzeyi ile sınırlı bölge.



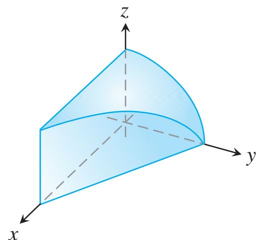
29. $x^2 + y^2 = 1$ ve $x^2 + z^2 = 1$ silindirlerinin içinde ortak olan bölgenin, aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi, sekizde biri.



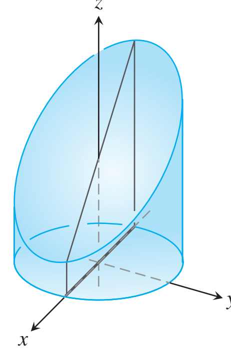
30. Birinci sekizde bir bölgede, koordinat düzlemleri ve $z = 4 - x^2 - y$ yüzeyiyle sınırlı bölge.



31. Birinci sekizde bir bölgede, koordinat düzlemleri, $x + y = 4$ ve $y^2 + 4z^2 = 16$ silindiriyle sınırlı bölge.



32. $x^2 + y^2 = 4$ silindirinden $z = 0$ düzlemi ve $x + z = 3$ düzlemi ile kesilen bölge.



33. Birinci sekizde bir bölgede, $x + y + 2z = 2$ ve $2x + 2y + z = 4$ düzlemleri arasındaki bölge.

34. $z = x$, $x + z = 8$, $z = y$, $y = 8$ ve $z = 0$ düzlemleriyle sınırlı sonlu bölge.

35. $x^2 + 4y^2 \le 4$ eliptik katı silindirden xy-düzlemi ve $z = x + 2$ düzlemiyle kesilen bölge.

36. Arkadan $x = 0$ düzlemi, önden ve yanlardan $x = 1 - y^2$ parabolik silindiri, üstten $z = x^2 + y^2$ paraboloidi ve alttan xy-düzlemiyle sınırlı bölge.

Ortalama Değerler

37–40 alıştırmalarında, $F(x, y, z)$'nin verilen bölgedeki ortalama değerini bulun.

37. Birinci sekizde bir bölgede, koordinat düzlemleri ve $x = 2$, $y = 2$ ve $z = 2$ düzlemleriyle sınırlı bölgede $F(x, y, z) = x^2 + 9$

38. Birinci sekizde bir bölgede koordinat düzlemleri ve $x = 1$ $y = 1$ ve $z = 2$ düzlemleriyle sınırlı bölgede $F(x, y, z) = x + y - z$

39. Birinci sekizde bir bölgede, koordinat düzlemleri ve $x = 1$, $y = 1$ ve $z = 1$ düzlemleriyle sınırlı bölgede $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

40. Birinci sekizde bir bölgede, koordinat düzlemleri ve $x = 2$, $y = 2$ ve $z = 2$ düzlemleriyle sınırlı bögede $F(x, y, z) = xyz$

İntegrasyon Sırasını Değiştirmek

41–44 alıştırmalarındaki integralleri, integrasyon sırasını uygun şekilde değiştirerek hesaplayın.

41. $\displaystyle\int_0^4\int_0^1\int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$

42. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}\,dy\,dx\,dz$

43. $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt[3]{z}}^1\int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x}\sin \pi y^2}{y^2}\,dx\,dy\,dz$

44. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{4-x^2}\int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z}\,dy\,dz\,dx$

Teori ve Örnekler

45. Ardışık integralin üst sınırını bulmak a'yı çözün:

$$\int_0^1 \int_0^{4-a-x^2} \int_a^{4-x^2-y} dz\, dy\, dx = \frac{4}{15}$$

46. Elipsoid Hangi c değerinde $x^2 + (y/2)^2 + (z/c)^2 = 1$ elipsoidinin hacmi 8π'ye eşittir?

47. Bir üç katlı integrali minimize etmek Uzaydaki hangi D bölgesi

$$\iiint_D (4x^2 + 4y^2 + z^2 - 4)\, dV$$

integralinin değerinin minimize eder? Yanıtınızı açıklayın.

48. Bir üç katlı integrali maksimize etmek Uzaydaki hangi D bölgesi

$$\iiint_D (1 - x^2 - y^2 - z^2)\, dV$$

integralinin değerinin maksimize eder? Yanıtınızı açıklayın.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Sayısal Hesaplamalar

49–52 alıştırmalarında, verilen fonksiyonun belirtilen bölgedeki üç katlı integralini hesaplamak için bir BCS kullanın.

49. $x^2 + y^2 = 1$ ile $z = 0$ ve $z = 1$ düzlemlerinin sınırladığı katı silindirde $F(x, y, z) = x^2y^2z$

50. Alttan $z = x^2 + y^2$ paraboloidi ve üstten $z = 1$ düzlemiyle sınırlı bölgede $F(x, y, z) = |xyz|$

51. Alttan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi ve üstten $z = 1$ düzlemiyle sınırlı bölgede $F(x, y, z) = \dfrac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

52. $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ küresinde $F(x, y, z) = x^4 + y^2 + z^2$

15.5 Üç Boyutta Kütle ve Momentler

Bu bölüm Kartezyen koordinatlarda üç boyutlu cisimlerin kütle ve momentlerinin nasıl hesaplanacağını göstermektedir. Formüller iki boyutlu cisimlerinkilere benzer. Küresel ve silindirik koordinatlardaki hesaplamalar için, Bölüm 15.6'ya bakın.

Kütle ve Momentler

$\delta(x, y, z)$, uzayda bir D bölgesini kaplayan bir cismin yoğunluğuysa (birim hacimde kütle), δ'nın D'deki integrali cismin **kütlesini** verir. Nedenini anlamak için, cismi Şekil 15.32'deki gibi n tane kütle elemanlarına böldüğünüzü varsayın. Cismin kütlesi

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \delta(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k = \iiint_D \delta(x, y, z)\, dV$$

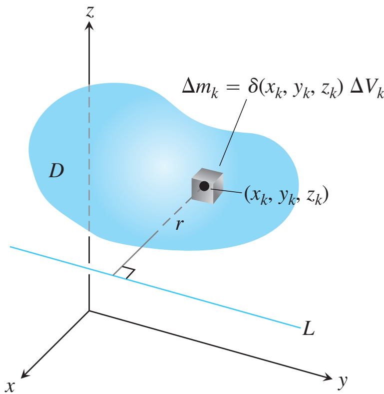
limitidir. Şimdi, eylemsizlik momenti için bir formül türetiyoruz. Eğer $r(x, y, z)$, D'deki bir (x, y, z) noktasından bir L doğrusuna olan uzaklık ise, $\Delta m_k = \delta(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k$ kütlesinin L etrafındaki eylemsizlik momenti (Şekil 15.32'te gösterilmektedir) yaklaşık olarak $\Delta I_k = r^2(x_k, y_k, z_k)\Delta m_k$'dir. Bütün cismin ***L* etrafındaki eylemsizlik momenti**

$$I_L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta I_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} r^2(x_k, y_k, z_k)\, \delta(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k = \iiint_D r^2 \delta\, dV$$

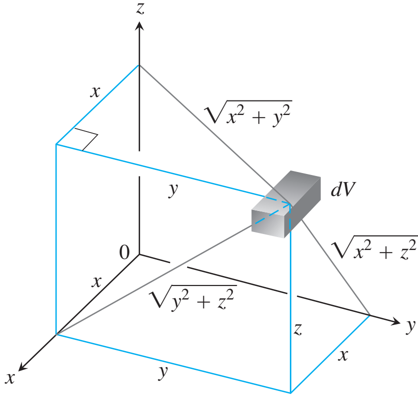
olur. L, x-ekseni ise, $r^2 = y^2 + z^2$ dir (Şekil 15.33) ve

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\, \delta\, dV$$

olur.



ŞEKİL 15.32 Bir cismin kütlesini ve bir doğru etrafındaki eylemsizlik momentini tanımlamak için, önce cismin sonlu sayıda Δm_k kütle elemanına bölündüğünü düşünürüz.



ŞEKİL 15.33 *dV*'den koordinat düzlem ve eksenlerine uzaklıklar.

Aynı şekilde *L*, *y*-ekseni veya *z*-ekseni ise

$$I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\,\delta\,dV \qquad \text{ve} \qquad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\,\delta\,dV.$$

buluruz. Aynı şekilde, **koordinat düzlemlerine göre birinci momentleri** de elde edebiliriz. Örneğin,

$$M_{yz} = \iiint_D x\delta(x, y, z)\,dV$$

integrali *yz*-düzlemine göre birinci momenti verir.

Bölüm 15.2'de düzlemsel bölgeler için incelenen kütle ve moment formüllerine benzer formüller Tablo 15.3' te özetlenmiştir.

TABLO 15.3 Uzayda, katı cisimler için kütle ve moment formülleri.

Kütle: $M = \iiint_D \delta\,dV \qquad (\delta = \delta(x, y, z) = \text{yoğunluk})$

Koordinat düzlemleri etrafında birinci momentler:

$$M_{yz} = \iiint_D x\,\delta\,dV, \qquad M_{xz} = \iiint_D y\,\delta\,dV, \qquad M_{xy} = \iiint_D z\,\delta\,dV$$

Ağırlık merkezi:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

Koordinat eksenleri etrafında eylemsizlik momentleri (ikinci momentler):

$$I_x = \iiint (y^2 + z^2)\,\delta\,dV$$

$$I_y = \iiint (x^2 + z^2)\,\delta\,dV$$

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2)\,\delta\,dV$$

Bir *L* doğrusu etrafında eylemsizlik momenti:

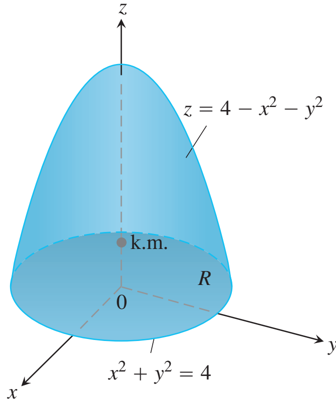
$I_L = \iiint r^2\,\delta\,dV \qquad$ ($r(x, y, z) = (x, y, z)$ noktalarından *L* doğrusuna olan uzaklık)

Bir *L* doğrusu etrafında jirasyon yarıçapı:

$$R_L = \sqrt{I_L/M}$$

ÖRNEK 1 Uzayda Bir Cismin Kütle Merkezini Bulmak

Alttan, $z = 0$ düzleminde R: $x^2 + y^2 \leq 4$ dairesi ve üstten $z = 4 - x^2 - y^2$ paraboloidiyle sınırlı, sabit δ yoğunluklu cismin kütle merkezini bulun (Şekil 15.34).



ŞEKİL 15.34 Bir cismin kütle merkezini bulmak (Örnek 1).

Çözüm Simetriden dolayı, $\bar{x} = \bar{y} = 0$'dır. $\bar{z}$'yi bulmak için, önce M_{xy}'yi hesaplarız:

$$M_{xy} = \iiint_R \int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} z\,\delta\,dz\,dy\,dx = \iint_R \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} \delta\,dy\,dx$$

$$= \frac{\delta}{2}\iint_R (4 - x^2 - y^2)^2\,dy\,dx$$

$$= \frac{\delta}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2)^2 r\,dr\,d\theta \qquad \text{Kutupsal koordinatlar}$$

$$= \frac{\delta}{2}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{6}(4 - r^2)^3\right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \frac{16\delta}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{32\pi\delta}{3}.$$

Benzer bir hesaplama

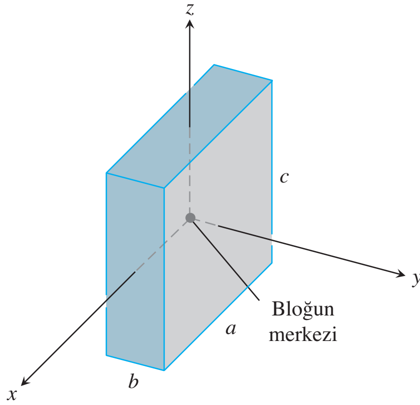
$$M = \iiint_R \int_0^{4-x^2-y^2} \delta\,dz\,dy\,dx = 8\pi\delta.$$

verir. Dolayısıyla, $\bar{z} = (M_{xy}/M) = 4/3$ olur ve kütle merkezi $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 4/3)$ bulunur. ■

Katı bir cismin yoğunluğu sabitken (Örnek 1'deki gibi), kütle merkezine (Bölüm 15.2'deki iki boyutlu cisimlerde olduğu gibi) cismin **merkezi** denir.

ÖRNEK 2 Koordinat Eksenleri Etrafındaki Eylemsizlik Momentini Bulmak

Şekil 15.35'de gösterilen, sabit δ yoğunluklu dikdörtgen şekilli cisim için I_x, I_y ve I_z'yi bulun.



ŞEKİL 15.35 Buradaki blok için I_x, I_y ve I_z'yi bulmak. Orijin bloğun merkezindedir (Örnek 2).

Çözüm Yukarıda verilen I_x formülü

$$I_x = \int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2)\,\delta\,dx\,dy\,dz.$$

verir. $(y^2 + z^2)\delta$'nin x, y ve z'nin bir çift fonksiyonu olduğunu gözlemlersek, integrasyon işinin birazından kurtulabiliriz. Dikdörtgen şekilli cisim, her biri bir bölgede olmak üzere, sekiz simetrik parçadan oluşur. İntegrali bu parçalardan biri üzerinde hesaplayabilir ve toplam değeri bulmak için 8 ile çarpabiliriz:

$$I_x = 8\int_0^{c/2}\int_0^{b/2}\int_0^{a/2} (y^2 + z^2)\,\delta\,dx\,dy\,dz = 4a\delta\int_0^{c/2}\int_0^{b/2} (y^2 + z^2)\,dy\,dz$$

$$= 4a\delta\int_0^{c/2}\left[\frac{y^3}{3} + z^2 y\right]_{y=0}^{y=b/2} dz$$

$$= 4a\delta\int_0^{c/2}\left(\frac{b^3}{24} + \frac{z^2 b}{2}\right) dz$$

$$= 4a\delta\left(\frac{b^3 c}{48} + \frac{c^3 b}{48}\right) = \frac{abc\delta}{12}(b^2 + c^2) = \frac{M}{12}(b^2 + c^2)$$

Aynı şekilde,

$$I_y = \frac{M}{12}(a^2 + c^2) \qquad \text{ve} \qquad I_z = \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$$

olur. ■

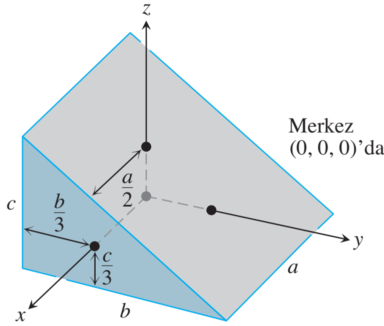
ALIŞTIRMALAR 15.5

Sabit Yoğunluk

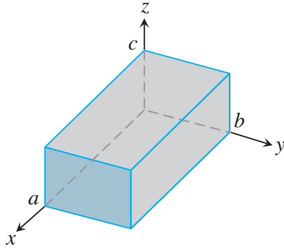
1–12 alıştırmalarındaki cisimlerin hepsinin yoğunluğu sabit ve $\delta = 1$'dir.

1. (*Örnek 1 Tekrar*) Tablo 15.3'teki I_x integralini doğrudan çözerek, Örnek 2'deki kısa yolun aynı sonucu verdiğini gösterin. Örnek 2'deki sonuçları kullanarak dikdörtgen şekilli cismin her koordinat ekseni etrafındaki jirasyon yarıçapını bulun.

2. **Eylemsizlik momenti** Şekilde bulunan koordinat eksenleri, bir takozun merkezinden adlandırılmış kenarlara paralel olarak geçer. $a = b = 6$ ve $c = 4$ ise, I_x, I_y ve I_z'yi bulun.



3. **Eylemsizlik momenti** I_x, I_y ve I_z'yi hesaplayarak, aşağıda gösterilen cismin kenarlarına göre eylemsizlik momentlerini bulun.



4. a. **Kütle merkezi ve eylemsizlik momentleri** Kenarları (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) ve (0, 0, 1)'de olan dört yüzlünün merkezini ve I_x, I_y ve I_z eylemsizlik momentlerini bulun.

   b. **Jirasyon yarıçapı** Dört yüzlünün x-ekseni etrafındaki jirasyon yarıçapını bulun. Bunu merkezden x-eksenine olan uzaklıkla karşılaştırın.

5. **Kütle merkezi ve eylemsizlik momentleri** Sabit yoğunluklu katı bir "oluk" alttan $z = 4y^2$ yüzeyi, üstten $z = 4$ düzlemi ve yanlardan $x = 1$ ve $x = -1$ düzlemleriyle sınırlıdır. Kütle merkezini ve üç eksene göre eylemsizlik momentlerini bulun.

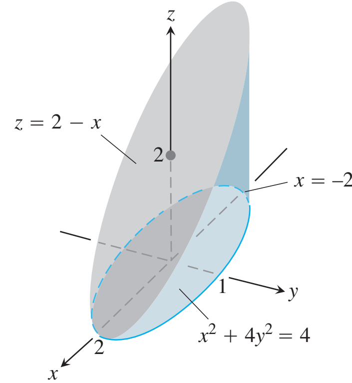
6. **Kütle merkezi** Sabit yoğunluklu bir cisim alttan $z = 0$ düzlemi, yanlardan $x^2 + 4y^2 = 4$ eliptik silindiri ve üstten $z = 2 - x$ düzlemiyle sınırlıdır (şekle bakın).

   a. $\bar{x}$ ve $\bar{y}$'yi bulun.

   b. Son integrasyonu x'e göre yapmak için integral tablosunu kullanarak,

$$M_{xy} = \int_{-2}^{2}\int_{-(1/2)\sqrt{4-x^2}}^{(1/2)\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{2-x} z\,dz\,dy\,dx$$

integralini hesaplayın. Sonra M_{xy}'yi M'ye bölerek, $\bar{z} = 5/4$ olduğunu doğrulayın.



7. a. **Kütle merkezi** Alttan $z = x^2 + y^2$ paraboloidi ve üstten $z = 4$ düzlemiyle sınırlı sabit yoğunluklu cismin kütle merkezini bulun.

   b. Cismi eşit hacimli iki kısma bölen $z = c$ düzlemini bulun. Bu düzlem kütle merkezinden geçmez.

8. **Momentler ve jirasyon yarıçapı** Bir kenarı 2 birim olan bir küp $x = \pm 1$, $z = \pm 1$, $y = 3$ ve $y = 5$ düzlemleriyle sınırlıdır. Kütle merkezini ve koordinat eksenleri etrafındaki eylemsizlik momentleriyle jirasyon yarıçaplarını bulun.

9. **Eylemsizlik momenti ve bir doğruya göre jirasyon yarıçapı** Alıştırma 2'deki gibi bir takoz için $a = 4$, $b = 6$ ve $c = 3$'tür. Takozun tipik bir (x, y, z) noktasından bir L: $z = 0$, $y = 6$ doğrusuna olan uzaklığın karesinin $r^2 = (y - 6)^2 + z^2$ olduğunu kontrol etmek için bir çizim yapın. Sonra takozun L etrafındaki eylemsizlik momentini ve jirasyon yarıçapını bulun.

10. **Eylemsizlik momenti ve bir doğruya göre jirasyon yarıçapı** Alıştırma 2'deki gibi bir takoz için $a = 4$, $b = 6$ ve $c = 3$'tür. Takozun tipik bir (x, y, z) noktasından bir L: $x = 4$, $y = 0$ doğrusuna olan uzaklığın karesinin $r^2 = (x - 4)^2 + y^2$ olduğunu kontrol etmek için bir çizim yapın. Sonra takozun L etrafındaki eylemsizlik momentini ve jirasyon yarıçapını bulun.

11. **Eylemsizlik momenti ve bir doğruya göre jirasyon yarıçapı** Alıştırma 3'teki gibi bir cisim için $a = 4$, $b = 2$ ve $c = 1$'dir. Cismin tipik bir (x, y, z) noktasından bir L: $y = 2$, $z = 0$ doğrusuna olan uzaklığın karesinin $r^2 = (y - 2)^2 + z^2$ olduğunu kontrol etmek için bir çizim yapın. Sonra cismin L etrafındaki eylemsizlik momentini ve jirasyon yarıçapını bulun.

12. Eylemsizlik momenti ve bir doğruya göre jirasyon yarıçapı Alıştırma 3'teki gibi bir cisim için $a = 4$, $b = 2$ ve $c = 1$'dir. Cismin tipik bir (x, y, z) noktasından bir L: $x = 4$, $y = 0$ doğrusuna olan uzaklığın karesinin $r^2 = (x - 4)^2 + y^2$ olduğunu kontrol etmek için bir çizim yapın. Sonra cismin L etrafındaki eylemsizlik momentini ve jirasyon yarıçapını bulun.

Değişken Yoğunluk

13 ve 14 alıştırmalarında, cismin

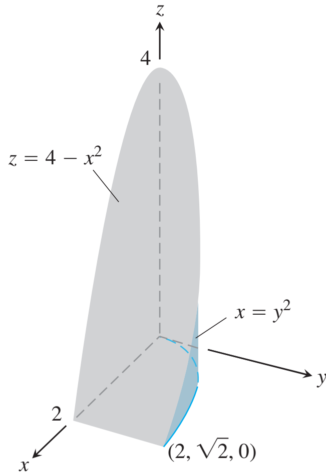
a. hacmini

b. kütle merkezini

bulun.

13. Birinci sekizde bir bölgede koordinat düzlemleri ve $x + y + z = 2$ düzlemiyle sınırlı cisim. Cismin yoğunluğu $\delta(x, y, z) = 2x$'tir.

14. Birinci sekizde bir bölgedeki bir cisim $y = 0$ ve $z = 0$ düzlemleri ile $z = 4 - x^2$ ve $x = y^2$ yüzeyleri tarafından sınırlanmıştır (şekle bakın). Yoğunluk fonksiyonu $\delta(x, y, z) = kxy$'dir.



15 ve 16 alıştırmalarında aşağıdakileri bulun

a. cismin kütlesini

b. kütle merkezini

c. koordinat eksenleri etrafındaki eylemsizlik momentlerini

d. koordinat eksenleri etrafındaki jirasyon yarıçaplarını

15. Birinci sekizde bir bölgedeki bir küp koordinat düzlemleri ve $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ düzlemleriyle sınırlıdır. Kübün yoğunluğu $\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$'dir.

16. Alıştırma 2'deki gibi bir takozun boyutları $a = 2$, $b = 6$ ve $c = 3$'tür. Yoğunluk $\delta(x, y, z) = x + 1$'dir. Yoğunluk sabitse, kütle merkezinin $(0, 0, 0)$ olacağına dikkat edin.

17. Kütle $x + z = 1$, $x - z = -1$, $y = 0$ düzlemleri ve $y = \sqrt{z}$ yüzeyiyle sınırlı cismin kütlesini bulun. Cismin yoğunluğu $\delta(x, y, z) = 2y + 5$'tir.

18. Kütle $z = 16 - 2x^2 - 2y^2$ ve $z = 2x^2 + 2y^2$ parabolik yüzeyleriyle sınırlı cismin hacmini bulun. Cismin yoğunluğu $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$'dir.

İş

19 ve 20 alıştırmalarında, aşağıdakileri hesaplayın.

a. Kapta bulunan sıvıyı xy-düzlemine çıkartmak için (sabit) yerçekimi g tarafından yapılan işi bulun (*İpucu*: Kaptaki sıvıyı küçük ΔV_i hacim elemanlarına bölün ve her eleman üzerinde yerçekiminin yaptığı işi bulun. Toplama ve limite geçiş hesaplanacak üç katlı bir integral verir).

b. Kütle merkezini xy-düzlemine indirmek için yerçekimi tarafından yapılan iş.

19. Kap, birinci sekizde bir bölgede koordinat düzlemleri ve $x = 1$, $y = 1$ ve $z = 1$ düzlemleriyle sınırlı kübik kutudur. Kutuyu dolduran sıvının yoğunluğu $\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$'dir (Alıştırma 15'e bakın).

20. Kap, $y = 0$, $z = 0$, $z = 4 - x^2$ ve $x = y^2$ ile sınırlı bölgenin şeklindedir. Bölgeyi dolduran sıvının yoğunluğu $\delta(x, y, z) = kxy$'dir, k bir sabit (Alıştırma 14'e bakın).

Paralel Eksen Teoremi

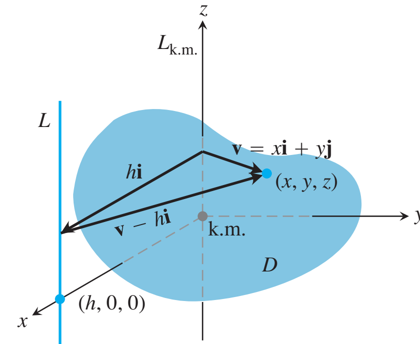
Paralel Eksen Teoremi (Alıştırmalar 15.2) iki boyut gibi, üç boyutta da geçerlidir. $L_{\text{k.m.}}$ m kütleli bir cismin kütle merkezinden geçen doğru ve L'de $L_{\text{k.m.}}$'den h birim uzaklıkta bir doğru olsun. **Paralel Eksen Teoremi** cismin $L_{\text{k.m.}}$ ve L etrafındaki eylemsizlik momentleri $I_{\text{k.m.}}$ ve I_L'nin

$$I_L = I_{\text{k.m.}} + mh^2 \qquad (1)$$

denklemini sağladığını söyler. İki boyutlu durumda olduğu gibi, teorem bir moment ve kütle bilindiğinde diğer momentini hesaplamanın kolay bir yolunu verir.

21. Paralel Eksen Teoreminin ispatı

a. Uzaydaki bir cismin merkezinden geçen herhangi bir düzlem etrafındaki birinci momentin sıfır olduğunu gösterin (*İpucu*: Cismin kütle merkezini orijine koyun ve düzlemi yz-düzlemi olarak alın. Bu durumda, $\bar{x} = M_{yz}/M$ denklemi size ne söyler?).



b. Paralel Eksen Teoremini ispatlamak için, cismin kütle merkezini, $L_{\text{k.m.}}$ doğrusu z-ekseninde ve L doğrusu xy-düzlemine $(h, 0, 0)$'da dik olmak üzere, orijine yerleştirin. D, uzayda cismin kapladığı bölge olsun. Bu durumda, cismin gösterimiyle,

$$I_L = \iiint_D |\mathbf{v} - h\mathbf{i}|^2\, dm$$

olur. Bu integraldeki integrandı açın ve ispatı tamamlayın.

22. Sabit yoğunluklu ve a yarıçaplı bir katı kürenin çapı etrafındaki eylemsizlik momenti, m kürenin kütlesi olmak üzere, $(2/5)ma^2$'dir. Küreye teğet bir doğru etrafındaki eylemsizlik momentini bulun.

23. Alıştırma 3'teki cismin z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momenti $I_z = abc(a^2 + b^2)/3$'tür.

a. (1) denklemini kullanarak cismin, cismin kütle merkezinden z-eksenine paralel geçen doğrunun etrafındaki eylemsizlik momentini ve jirasyon yarıçapını bulun.

b. (1) denklemini ve (a) şıkkındaki sonucu kullanarak, cismin $x = 0$, $y = 2b$ doğrusu etrafındaki eylemsizlik momenti ve jirasyon yarıçapını bulun.

24. $a = b = 6$ ve $c = 4$ ise, alıştırma 2'deki takozun x-ekseni etrafındaki eylemsizlik momenti $I_x = 208$'dir. Takozun $y = 4$, $z = -4/3$ doğrusu (takozun kısa tarafı) etrafındaki eylemsizlik momentini bulun.

Pappus Formülü

Pappus formülü (Alıştırmalar 15.2) iki boyut gibi üç boyutta da geçerlidir. m_1 ve m_2 kütleli B_1 ve B_2 cisimlerinin uzayda üst üste binmeyen bölgeleri kapladıklarını ve $\mathbf{c}_1$ ile $\mathbf{c}_2$'nin orijinden cisimlerin kütle merkezlerine olan vektörler olduğunu varsayın. Bu durumda iki cismin bileşimi $B_1 \cup B_2$'nin kütle merkezi

$$\mathbf{c} = \frac{m_1\mathbf{c}_1 + m_2\mathbf{c}_2}{m_1 + m_2}$$

vektörü ile belirlenir. Daha önce olduğu gibi, bu formüle **Pappus formülü** denir. İki boyutlu halde olduğu gibi n cisim için formül

$$\mathbf{c} = \frac{m_1\mathbf{c}_1 + m_2\mathbf{c}_2 + \cdots + m_n\mathbf{c}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

haline genelleşir.

25. Pappus formülünü türetin (*İpucu*: B_1 ve B_2 yi birinci sekizde bir bölgede üst üste binmeyen bölgeler olarak çizin ve kütle merkezleri $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ ve $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ 'yi belirtin. $B_1 \cup B_2$'nin koordinat düzlemleri etrafındaki momentlerini m_1 ve m_2 kütleleri ile bu merkezlerin koordinatları cinsinden ifade edin).

26. Aşağıdaki şekil sabit $\delta = 1$ yoğunluklu üç tane dikdörtgen şekilli cisimden yapılmış bir cismi göstermektedir. Aşağıdakilerin kütle merkezlerini bulmak için Pappus formülünü kullanın.

a. $A \cup B$ **b.** $A \cup C$

c. $B \cup C$ **d.** $A \cup B \cup C$

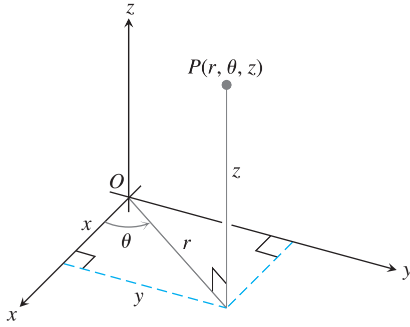
27. **a.** Taban yarıçapı a ve yüksekliği h olan dik bir C konisinin, a yarıçaplı bir S yarım küresinin dairesel tabanı üzerine, iki cismin bileşimini bir dondurma külahına benzeyecek şekilde kurulduğunu varsayın. Koninin kütle merkezi tabandan tepeye olan uzaklığın dörtte biri uzaklığında bulunmaktadır. Yarım kürenin merkezi, tabandan tepeye olan uzaklığın sekizde üçündedir. $C \cup S$ bileşiminin merkezini iki cismin ortak tabanına yerleştirmek için a ile h arasındaki ilişki ne olmalıdır?

b. Şimdiye kadar yapmadıysanız, buna benzer olan bir üçgen ve bir yarım daire sorusunu (Bölüm 15.2, Alıştırma 55) yanıtlayın. Yanıtlar aynı değildir.

28. h yükseklikli ve dört eş kenarlı bir P kare piramidinin tabanı kenarlarının uzunluğu s olan bir C kübü'nün bir yüzü üzerine kurulmuştur. Piramidin merkezi, tabandan tepe noktasına olan uzaklığın dörtte birindedir. $P \cup C$'nin merkezini piramidin tabanına yerleştirmek için h ile s arasındaki ilişki ne olmalıdır? Yanıtınızı Alıştırma 27'nin yanıtıyla karşılaştırın. Ayrıca Bölüm 15.2'deki Alıştırma 56'nın yanıtıyla da karşılaştırın.

15.6 Silindirik ve Küresel Koordinatlarda Üç Katlı İntegraller

Fizik, mühendislik veya geometrideki bir hesaplama, bir silindir, bir koni veya bir küre içeriyorsa, bu bölümde tanıtacağımız silindirik veya küresel koordinatlar kullanarak genellikle işimizi kolaylaştırabiliriz. Bu koordinatlara dönüştürme ve elde edilen üç katlı integrali hesaplama işlemi Bölüm 15.3'te incelenen, düzlemde kutupsal koordinatlara dönüştürmeye benzerdir.



ŞEKİL 15.36 Uzayda bir noktanın silindirik koordinatları r, θ ve z dir.

Silindirik Koordinatlarda İntegrasyon

Üç boyutlu uzay için silindirik koordinatları, xy-düzlemindeki kutupsal koordinatları bilinen z-ekseni ile birleştirerek elde ederiz. Bu, Şekil 15.36'da gösterildiği gibi, uzaydaki her noktaya $(r; \theta, z)$ formunda bir veya daha fazla koordinat üçlüsü karşılık getirir.

TANIM **Silindirik Koordinatlar**

Silindirik koordinatlar $(r; \theta, z)$ sıralı üçlüleri ile uzayda bir P noktasını temsil ederler. Burada,

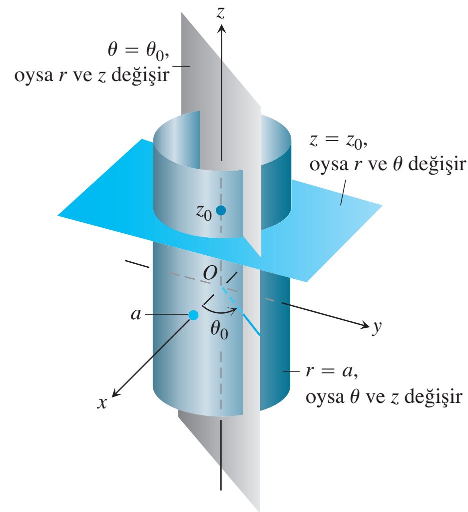
1. r ve θ, P'nin xy-düzlemine dik izdüşümünün kutupsal koordinatlarıdır.
2. z kartezyen dikey koordinattır.

Kartezyen ve kutupsal koordinatlardaki x, y, r ve θ değerleri

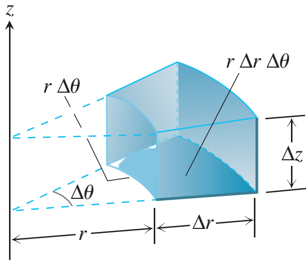
Kartezyen (x, y, z) ve Silindirik (r, θ, z) Koordinatlarını Bağlayan Denklemler

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z,$$
$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = y/x$$

Silindirik koordinatlarda, $r = a$ denklemi sadece xy-düzleminde bir çember değil, z-ekseni etrafında bir tam silindir tanımlar (Şekil 15.37). z-ekseni $r = 0$ ile verilir. $\theta = \theta_0$ denklemi, z-eksenini içeren ve pozitif x-ekseni ile θ_0 açısını yapan düzlemi tanımlar. Ve, aynı kartezyen koordinatlarda olduğu gibi, $z = z_0$ denklemi z-eksenine dik bir düzlem tanımlar.



ŞEKİL 15.37 Silindirik koordinatlarda sabit-koordinat denklemleri silindirler ve düzlemler verirler.



ŞEKİL 15.38 Silindirik koordinatlarda takozun hacmine $\Delta V = \Delta z\, r\, \Delta r\, \Delta\theta$ çarpımı ile yaklaşılır.

Silindirik koordinatlar, eksenleri z-ekseni boyunca uzanan silindirleri ve z-eksenini içeren veya z-eksenine dik olan düzlemleri tanımlamada iyidir. Bu gibi yüzeylerin sabit koordinat değerli denklemleri vardır:

$$r = 4 \qquad \text{Silindir, yarıçap 4, ekseni } z\text{-ekseni}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \qquad z\text{-eksenini içeren düzlem}$$

$$z = 2 \qquad z\text{-eksenine dik düzlem}$$

Silindirik koordinatlarda bir D bölgesi üzerinde bir üç katlı integral hesaplarken, bölgeyi dikdörtgensel kutular yerine, n tane küçük silindirik takoza böleriz. Böylece, k. silindirik takozda r, θ ve z değerleri Δr_k, $\Delta\theta_k$ ve Δz_k kadar değişir. Bütün silindirik takozlar arasında, bu sayıların en büyüğüne bölünüşün normu denir. Üç katlı integrali, bu takozları kullanan Riemann toplamlarının bir limiti olarak tanımlarız. Böyle bir silindirik takozun ΔV_k hacmi, takozun $r\theta$-düzlemindeki tabanının ΔA_k alanı ile Δz yüksekliğinin çarpımı alınarak elde edilir (Şekil 15.38).

Kutupsal koordinatlarda, (r_k, θ_k, z_k) noktası k. takozun merkezi olmak üzere, $\Delta A_k = r_k\, \Delta r_k\, \Delta\theta_k$ olduğunu hesapladık. Böylece, $\Delta V_k = \Delta z_k\, r_k\, \Delta r_k\, \Delta\theta_k$ ve D bölgesi üzerinde f'nin bir Riemann toplamının formu

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k, z_k)\, \Delta z_k\, r_k\, \Delta r_k\, \Delta\theta_k$$

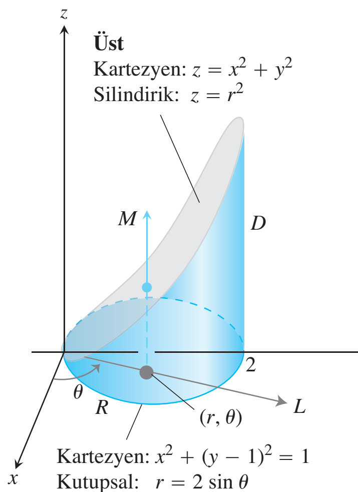
şeklindedir. Bir f fonksiyonunun D üzerindeki üç katlı integrali, normu sıfıra yaklaşan bölünüşler üzerinde Riemann toplamlarının limiti alarak elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D f\, dV = \iiint_D f\, dz\, r\, dr\, d\theta$$

Böylece, silindirik koordinatlarda üç katlı integraller, sıradaki örnekte olduğu gibi, ardışık integraller olarak hesaplanır.

ÖRNEK 1 Silindirik Koordinatlarda İntegrasyon Sınırlarını Bulmak

Bir $f(r, \theta, z)$ fonksiyonunu alttan $z = 0$ düzlemi, yanlardan $x^2 + (y-1)^2 = 1$ silindiri ve üstten $z = x^2 + y^2$ paraboloidiyle sınırlı D bölgesinde silindirik koordinatlarda integre etmek için integrasyon sınırlarını bulun.



ŞEKİL 15.39 Silindirik koordinatlarda bir integral hesaplamak için integrasyon sınırlarını bulmak (Örnek 1).

Çözüm D'nin tabanı, aynı zamanda bölgenin xy-düzlemi üzerindeki izdüşümü olan R'dir. R'nin sınırı $x^2 + (y-1)^2 = 1$'dir. Kutupsal denklemi

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$$
$$r^2 - 2r\sin\theta = 0$$
$$r = 2\sin\theta$$

olur. Bölge, Şekil 15.39'da çizilmiştir.

İntegrasyonun sınırlarını, z'nin sınırları ile başlayarak buluruz. R'deki tipik bir (r, θ) noktasından geçen ve z-eksenine paralel olan bir M doğrusu D'ye $z = 0$'dan girer ve $z = x^2 + y^2 = r^2$'den çıkar.

Sonra integrasyonun r-sınırlarını buluruz. Orijinden gelip (r, θ)'dan geçen bir L ışını R'ye $r = 0$'dan girer ve $r = 2\sin\theta$'dan çıkar.

Son olarak integrasyonun θ-sınırlarını buluruz. L ışını R'yi tararken, pozitif x-ekseniyle yaptığı θ açısı $\theta = 0$'dan $\theta = \pi$'ye gider. İntegral

$$\iiint_D f(r, \theta, z)\, dV = \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\theta} \int_0^{r^2} f(r, \theta, z)\, dz\, r\, dr\, d\theta$$

olarak bulunur. ■

Örnek 1, silindirik koordinatlarda integrasyon sınırlarını bulmanın iyi bir örneğini oluşturur. Prosedür aşağıdaki şekilde özetlenmiştir.

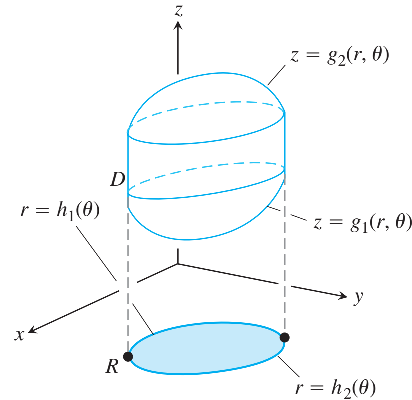
Silindirik Koordinatlarda Nasıl İntegral Alınır

Uzayda bir D bölgesinde, silindirik koordinatlarda önce z'ye, sonra r'ye, en son da θ'ya göre integral alarak

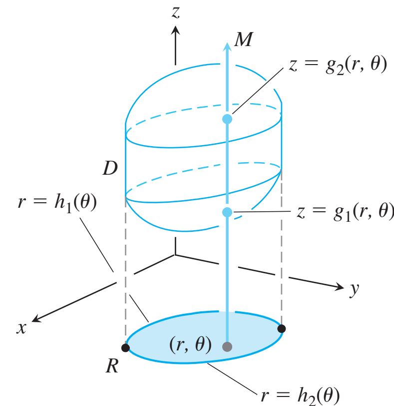
$$\iiint_D f(r, \theta, z)\, dV$$

integralini hesaplamak için, aşağıdaki adımları izleyin.

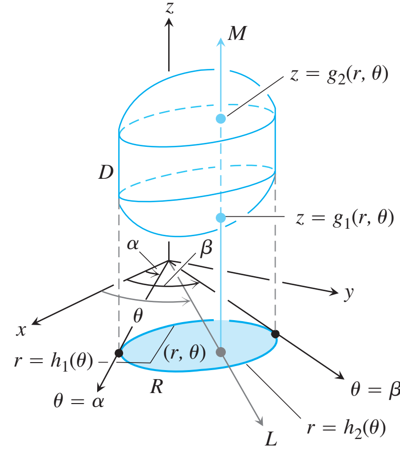
1. *Bir çizim.* D bölgesini, xy-düzlemi üzerine izdüşümü R ile birlikte çizin. D ve R'yi sınırlayan düzlem ve eğrileri adlandırın.



2. *İntegrasyonun z-sınırları.* R'nin tipik bir (r, θ) noktasından geçen ve z-eksenine paralel olan bir M doğrusu çizin. z artarken, M, D'ye $z = g_1(r, \theta)$'da girer ve $z = g_2(r, \theta)$'da çıkar. Bunlar integrasyonun z-sınırlarıdır.



3. *İntegrasyonun r-sınırları*. Orijinden gelerek (r, θ)'dan geçen bir L ışını çizin. Işın, R'ye $r = h_1(\theta)$' dan girer ve $r = h_2(\theta)$'dan çıkar. Bunlar integrasyonun r-sınırlarıdır.



4. *İntegrasyonun θ-sınırları*. L ışını R'ri tararken, poitif x-ekseniyle yaptığı açı $\theta = \alpha$'dan $\theta = \beta$'ya gider. Bunlar integrasyonun θ-sınırlarıdır. İntegral

$$\iiint_D f(r, \theta, z)\, dV = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=h_1(\theta)}^{r=h_2(\theta)} \int_{z=g_1(r,\theta)}^{z=g_2(r,\theta)} f(r, \theta, z)\, dz\, r\, dr\, d\theta.$$

halini alır.

ÖRNEK 2 Bir Ağırlık Merkezi Bulmak

$x^2 + y^2 = 4$ silindiriyle çevrelenen, üstten $z = x^2 + y^2$ paraboloidi ve alttan xy-düzlemiyle sınırlı cismin merkezini ($\delta = 1$) bulun.

Çözüm Üstten $z = r^2$ paraboloidi, alttan $z = 0$ düzlemiyle sınırlı bölgeyi çizeriz (Şekil 15.40). Cismin tabanı, R, xy-düzlemindeki $0 \le r \le 2$ dairesidir.

Cismin $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ merkezi simetri ekseninde, bu soruda z-ekseni, bulunur. Bu $\bar{x} = \bar{y} = 0$ yapar. $\bar{z}$'yi bulmak için, birinci moment M_{xy}'yi M'ye böleriz.

Kütle ve moment integrallerinin integrasyon sınırlarını bulmak için, dört temel adımı izleriz. Başlangıçtaki çizimimizle ilk adımı tamamladık. Kalan adımlar integrasyon sınırlarını verir.

z-sınırları. Tabanda tipik bir (r, θ) noktasından geçen ve z-eksenine paralel olan bir M doğrusu cisme $z = 0$'dan girer ve $z = r^2$'den çıkar.

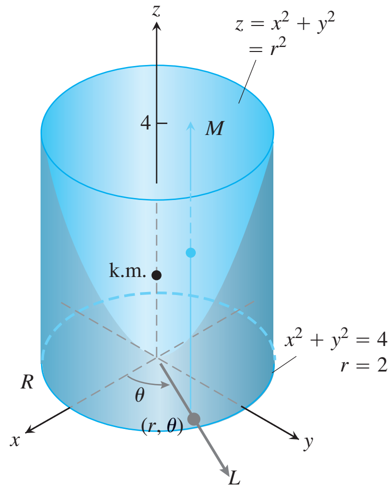
r-sınırları. Orijinden gelerek (r, θ)'dan geçen bir L ışını R'ye $r = 0$'dan girer ve $r = 2$'den çıkar.

θ-sınırları. L ışını, tabanı bir saat kolu gibi tararken, pozitif x-ekseniyle yaptığı θ açısı $\theta = 0$'dan $\theta = 2\pi$'ye gider. M_{xy}'nin değeri

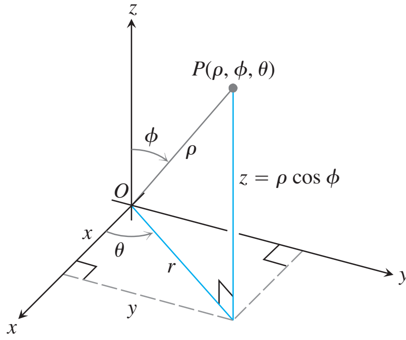
$$M_{xy} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{r^2} z\, dz\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{r^2} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{r^5}{2}\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^6}{12}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{16}{3}\, d\theta = \frac{32\pi}{3}.$$

olarak bulunur.



ŞEKİL 15.40 Örnek 2, bu cismin ağırlık merkezinin nasıl bulunacağını göstermektedir.



ŞEKİL 15.41 Küresel koordinatlar, ρ, ϕ ve θ ve x, y, z ve r ile ilişkileri.

M'nin değeri ise,

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{r^2} dz\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \Big[z\Big]_0^{r^2} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 4\, d\theta = 8\pi$$

olur. Buradan

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{32\pi}{3}\frac{1}{8\pi} = \frac{4}{3}$$

bulunur ve merkez $(0, 0, 4/3)$ olur. Merkezin, cismin dışında olduğuna dikkat edin. ■

Küresel Koordinatlar ve İntegrasyon

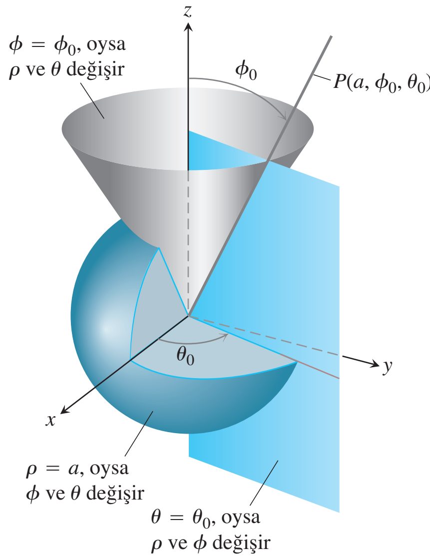
Küresel koordinatlar, uzayda noktaları, Şekil 15.41'de gösterildiği gibi, iki açı ve bir uzunlukla konumlandırır. Birinci koordinat, $\rho = |\overrightarrow{OP}|$, noktanın orijinden uzaklığıdır. r'nin tersine ρ *değişkeni asla negatif olmaz.* İkinci koordinat, ϕ, $\overrightarrow{OP}$'nin pozitif z-ekseni ile yaptığı açıdır. $[0, \pi]$ aralığında kalması gerekmektedir. Üçüncü koordinat, silindirik koordinatlardaki gibi ölçülen θ açısıdır.

TANIM Küresel Koordinatlar

Küresel Koordinatlar uzayda bir P noktasını,

1. ρ, P'den orijine uzaklık.
2. ϕ, $\overrightarrow{OP}$'nin pozitif z-ekseni ile yaptığı açı $(0 \le \phi \le \pi)$
3. θ, silindirik koordinatlardaki açı

olmak üzere, sıralı (ρ, ϕ, θ) üçlüleri ile temsil eder.



ŞEKİL 15.42 Küresel koordinatlarda sabit-koordinat denklemleri, küreler, tek koniler ve yarı-düzlemler verirler.

Dünya haritalarında, θ, Dünya üzerindeki noktanın meridiyeni ile ve ϕ'de noktanın enlemi ile ilgilidir. ρ ise noktanın Dünya yüzeyinden yüksekliği ile ilgilidir.

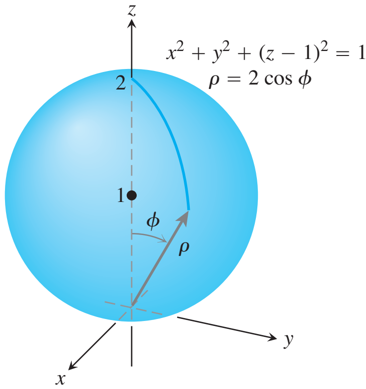
$\rho = a$ denklemi, merkezi orijinde olan a yarıçaplı küreyi tanımlar (Şekil 15.42). $\phi = \phi_0$ denklemi, tepe noktası orijinde bulunan ve ekseni z-ekseninde bulunan bir tek-koni tanımlar. (xy-düzlemini $\phi = \pi/2$ konisi olarak içerecek şekilde yorumumuzu genişletiyoruz.) ϕ_0 açısı $\pi/2$'den büyük ise $\phi = \phi_0$ konisi aşağıya açılır. $\theta = \theta_0$ denklemi, z-ekseninini içeren ve pozitif x-ekseni ile θ_0 açısı yapan yarı düzlemi tanımlar.

Küresel Koordinatları Kartezyen Koordinatlara ve Silindirik Koordinatlara Bağlayan Denklemler

$$r = \rho\sin\phi, \qquad x = r\cos\theta = \rho\sin\phi\cos\theta,$$

$$z = \rho\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta = \rho\sin\phi\sin\theta, \qquad (1)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}.$$



ŞEKİL 15.43 Örnek 3'teki küre.

ÖRNEK 3 Kartezyenden Küresel'e Dönüştürme

$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ küresi için bir küresel koordinat denklemi bulunuz.

Çözüm x, y ve z'yi dönüştürmek için (1) denklemlerini kullanırız:

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

$$\rho^2 \sin^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta + (\rho\cos\phi - 1)^2 = 1 \qquad \text{(1) Denklemleri}$$

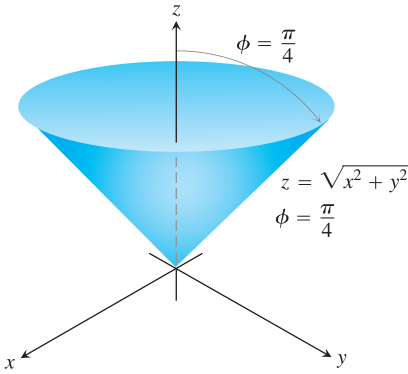
$$\rho^2\sin^2\phi\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} + \rho^2\cos^2\phi - 2\rho\cos\phi + 1 = 1$$

$$\rho^2\underbrace{(\sin^2\phi + \cos^2\phi)}_{1} = 2\rho\cos\phi$$

$$\rho^2 = 2\rho\cos\phi$$

$$\rho = 2\cos\phi$$

Şekil 15.43'e bakın. ■



ŞEKİL 15.44 Örnek 4'teki koni.

ÖRNEK 4 Kartezyenden Küresel'e Dönüştürme

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi için bir küresel koordinat denklemi bulunuz (Şekil 15.44).

Çözüm 1 *Geometri kullanın.* Koni, z-eksenine göre simetriktir ve yz-düzleminin birinci bölgesini $z = y$ doğrusu boyunca keser. Bu nedenle, koni ile pozitif z-ekseni arasındaki açı $\pi/4$ radyandır. Koni, küresel ϕ koordinatı $\pi/4$'e eşit olan noktalardan oluşur dolayısıyla denklemi $\phi = \pi/4$'tür.

Çözüm 2 *Çebir kullanın.* x, y ve z'yi dönüştürmek için (1) denklemlerini kullanırsak aynı sonucu elde ederiz:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rho\cos\phi = \sqrt{\rho^2\sin^2\phi} \qquad \text{Örnek 3}$$

$$\rho\cos\phi = \rho\sin\phi \qquad \rho \ge 0, \sin\phi \ge 0$$

$$\cos\phi = \sin\phi$$

$$\phi = \frac{\pi}{4} \qquad 0 \le \phi \le \pi$$ ■

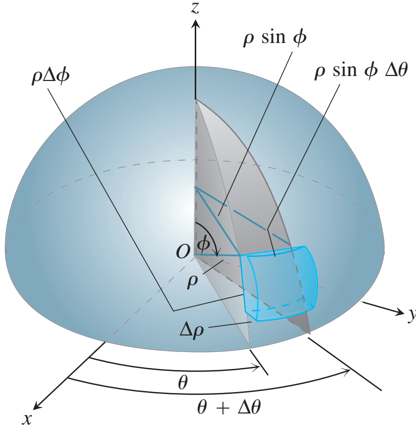
Küresel koordinatlar, merkezleri orijinde olan küreleri, kenarı z-ekseni olan yarıdüzlemleri ve tepe noktaları orijinde, eksenleri z-ekseninde olan konileri tanımlamakta yararlıdır. Bu gibi yüzeylerin sabit koordinat değerli denklemleri vardır:

$$\rho = 4 \qquad \text{Küre, yarıçap 4, merkez orijinde}$$

$$\phi = \frac{\pi}{3} \qquad \text{Orijinden yukarı açılan koni, pozitif } z\text{-ekseniyle } \pi/3 \text{ açısı yapar}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \qquad z\text{-ekseni etrafında dönen yarı düzlem, pozitif } x\text{-ekseniyle } \pi/3 \text{ açısı yapar.}$$

Küresel koordinatlarda, bir D bölgesi üzerinde üç katlı integral hesaplarken, bölgeyi n tane küresel takoza böleriz. Bir $(\rho_k, \phi_k, \theta_k)$ noktasını içeren k. takozun ölçüsü, ρ, θ ve ϕ'deki $\Delta\rho_k$, $\Delta\theta_k$ ve $\Delta\phi_k$ değişimleri ile verilir. Böyle bir takozun, bir kenarı, uzunluğu $\rho_k\Delta\phi_k$ olan dairesel bir yay, diğer kenarı, uzunluğu $\rho_k\sin\phi_k\Delta\theta_k$ olan dairesel bir yay ve



ŞEKİL 15.45 Küresel koordinatlarda

$$dV = d\rho \cdot \rho\, d\phi \cdot \rho \sin\phi\, d\theta = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

halini alır.

kalınlığı $\Delta\rho_k$ dır. Küresel takoz, $\Delta\rho_k$, $\Delta\theta_k$ ve $\Delta\phi_k$ değerlerinin hepsi küçük olduklarında, ölçüleri bunlar olan bir küp'e yaklaşır (Şekil 15.45). Bu takozun ΔV_k hacminin, $(\rho_k, \phi_k, \theta_k)$ noktası takozun içinden seçilen bir nokta olmak üzere, $\Delta V_k = \rho_k^2 \sin\phi_k\, \Delta\rho_k\, \Delta\phi_k\, \Delta\theta_k$ olduğu gösterilebilir.

Bir $F(\rho, \phi, \theta)$ fonksiyonuna karşı gelen Riemann toplamı

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F(\rho_k, \phi_k, \theta_k)\, \rho_k^2 \sin\phi_k\, \Delta\rho_k\, \Delta\phi_k\, \Delta\theta_k$$

olur. Bölünüşün normu sıfıra yaklaşırken ve küresel takoz gittikçe küçülürken, Riemann toplamının sürekli F'ler için bir limiti vardır:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D F(\rho, \phi, \theta)\, dV = \iiint_D F(\rho, \phi, \theta)\, \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

Küresel koordinatlarda,

$$dV = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \text{ dır.}$$

Küresel koordinatlardaki integralleri hesaplamak için, genellikle önce ρ'ya göre integral alırız. İntegrasyon sınırlarını bulma işlemi aşağıda gösterilmektedir. İlgimizi, z-ekseni etrafında dönmeyle elde edilen dönel cisimlerin tanım kümeleri (veya parçaları) ile θ ve ϕ sınırlarının sabit olduğu tanım kümeleri üzerinde integral almakla sınırlayacağız.

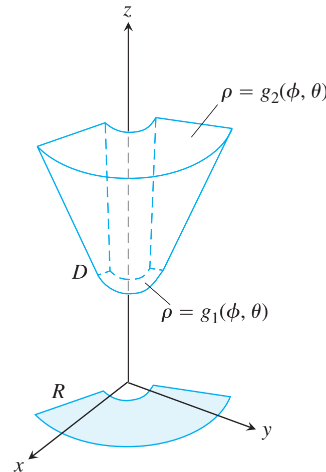
Küresel Koordinatlarda Nasıl İntegral Alınır

Uzayda bir D bölgesinde, küresel koordinatlarda, önce ρ'ya, sonra ϕ'ye, en son olarak da θ'ya göre integral alarak

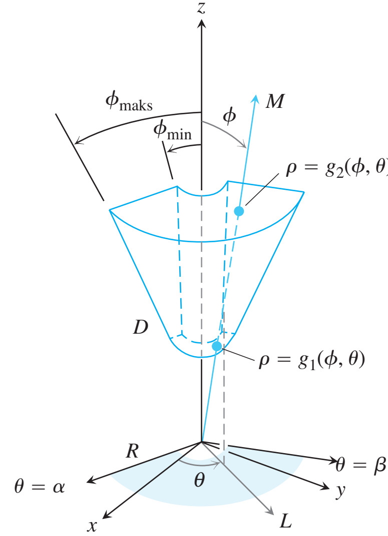
$$\iiint_D f(\rho, \phi, \theta)\, dV$$

integralini hesaplamak için, aşağıdaki adımları izleyin.

1. *Çizim*. D bölgesini, xy-düzlemi üzerine izdüşümü R ile birlikte çizin. D'yi sınırlayan yüzeyleri adlandırın.



2. *İntegrasyonun ρ-sınırlarını bulun*. Orijinden çıkıp D'den geçen ve pozitif z-ekseniyle ϕ açısı yapan bir M ışını çizin. Ayrıca M'nin xy-düzlemi üzerine izdüşümünü çizin (izdüşüme L deyin). L ışını pozitif x-ekseniyle θ açısı yapar. ρ arttıkça, M, D'ye $\rho = g_1(\phi, \theta)$'dan girer ve $\rho = g_2(\phi, \theta)$'dan çıkar. Bunlar integrasyonun ρ-sınırlarıdır.

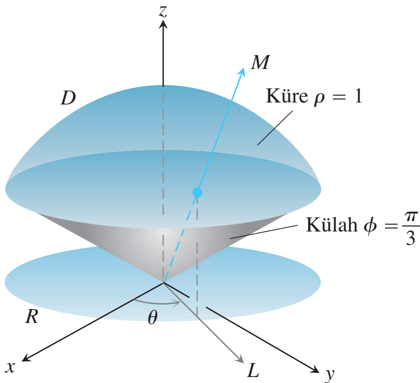


3. *İntegrasyonun ϕ-sınırlarını bulun*. Herhangi bir θ değeri için, M'nin z-ekseniyle yaptığı ϕ açısı $\phi = \phi_{min}$'den $\phi = \phi_{max}$'a gider. Bunlar integrasyonun ϕ-sınırlarıdır.
4. *İntegrasyonun θ - sınırlarını bulun*. L ışını R'yi tararken, θ açısı α'dan β'ya gider. Bunlar integrasyonun θ-sınırlarıdır. İntegral

$$\iiint_D f(\rho, \phi, \theta)\, dV = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{\phi=\phi_{min}}^{\phi=\phi_{max}} \int_{\rho=g_1(\phi,\theta)}^{\rho=g_2(\phi,\theta)} f(\rho, \phi, \theta)\, \rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

ÖRNEK 5 Küresel Koordinatlarda Bir Hacim Bulmak

$\rho \leq 1$ küresinden $\phi = \pi/3$ konisiyle kesilen D "dondurma külahı" bölgesinin hacmini bulun.



ŞEKİL 15.46 Örnek 5'teki dondurma külahı.

Çözüm Hacim $V = \iiint_D \rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$, yani $f(\rho, \phi, \theta) = 1$'in D üzerinde integralidir.

İntegrali hesaplamak üzere integral sınırlarını bulmak için, D'yi ve xy-düzlemine izdüşümü R'yi çizerek başlıyoruz (Şekil 15.46).

İntegrasyonun ρ-sınırları. Orijinden çıkıp D'den geçen ve pozitif z-ekseniyle ϕ açısı yapan bir M ışını çizeriz. Ayrıca, M'nin xy-düzlemi üzerine izdüşümü L'yi, L'nin pozitif x-ekseniyle yaptığı θ açısıyla birlikte çizeriz. M ışını D'ye $\rho = 0$'dan girer ve $\rho = 1$'den çıkar.

İntegrasyonun ϕ-sınırları. $\phi = \pi/3$ konisi, pozitif z-ekseniyle $\pi/3$ açısı yapar. Verilen herhangi bir θ için, ϕ açısı $\phi = 0$'dan $\phi = \pi/3$'e gidebilir.

İntegrasyonun θ-sınırları. L ışını R'yi tararken, θ açısı 0'dan 2π'ye gider. Hacim

$$V = \iiint_D \rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 \rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \sin\phi \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\frac{1}{3}\sin\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}\cos\phi\right]_0^{\pi/3} d\theta = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)d\theta = \frac{1}{6}(2\pi) = \frac{\pi}{3}$$

olarak bulunur. ■

ÖRNEK 6 Bir Eylemsizlik Momenti Bulmak

Sabit $\delta = 1$ yoğunluklu bir cisim Örnek 5'teki D bölgesini kaplamaktadır. Cismin z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentini bulun.

Çözüm Kartezyen koordinatlarda, moment

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2)\, dV$$

olur. Küresel koordinatlarda $x^2 + y^2 = (\rho \sin\phi \cos\theta)^2 + (\rho \sin\phi \sin\theta)^2 = \rho^2 \sin^2\phi$ halini alır. Dolayısıyla,

$$I_z = \iiint (\rho^2 \sin^2\phi)\, \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \iiint \rho^4 \sin^3\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

elde edilir. Örnek 5'teki bölge için,

$$I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 \rho^4 \sin^3\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 \sin^3\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}(1 - \cos^2\phi)\sin\phi \, d\phi \, d\theta = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\left[-\cos\phi + \frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi/3} d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{3}\right)d\theta = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\frac{5}{24}\,d\theta = \frac{1}{24}(2\pi) = \frac{\pi}{12}$$

bulunur.

Koordinat Dönüşüm Formülleri

SİLİNDİRİKTEN KARTEZYENE	KÜRESELDEN KARTEZYENE	KÜRESELDEN SİLİNDİRİĞE
$x = r\cos\theta$	$x = \rho\sin\phi\cos\theta$	$r = \rho\sin\phi$
$y = r\sin\theta$	$y = \rho\sin\phi\sin\theta$	$z = \rho\cos\phi$
$z = z$	$z = \rho\cos\phi$	$\theta = \theta$

Üç katlı integrallerde dV'ye karşılık gelen hacim elemanları:

$$\begin{aligned} dV &= dx\, dy\, dz \\ &= dz\, r\, dr\, d\theta \\ &= \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \end{aligned}$$

Takip eden bölümde, silindirik ve küresel koordinatlarda dV'yi belirlemek için daha genel bir prosedür sunacağız. Sonuç, şüphesiz ki, yine aynı olacaktır.

ALIŞTIRMALAR 15.6

Silindirik Koordinatlarda İntegral Hesaplamak

1–6 alıştırmalarında silindirik koordinat integrallerini hesaplayın.

1. $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{\sqrt{2-r^2}} dz\, r\, dr\, d\theta$

2. $\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{r^2/3}^{\sqrt{18-r^2}} dz\, r\, dr\, d\theta$

3. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta/2\pi}\int_0^{3+24r^2} dz\, r\, dr\, d\theta$

4. $\int_0^{\pi}\int_0^{\theta/\pi}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{3\sqrt{4-r^2}} z\, dz\, r\, dr\, d\theta$

5. $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{1/\sqrt{2-r^2}} 3\, dz\, r\, dr\, d\theta$

6. $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}(r^2\sin^2\theta + z^2)\, dz\, r\, dr\, d\theta$

Silindirik Koordinatlarda İntegrasyon Sırasını Değiştirmek

Şimdiye kadar gördüğümüz integraller silindirik koordinatlar için tercih edilen bir integrasyon sırası olduğunu söyler, ama başka sıralar da işe yarar ve bazen hesaplanması daha kolaydır. 7–10 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

7. $\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{z/3} r^3\, dr\, dz\, d\theta$

8. $\int_{-1}^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} 4r\, dr\, d\theta\, dz$

9. $\int_0^1\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{2\pi}(r^2\cos^2\theta + z^2)\, r\, d\theta\, dr\, dz$

10. $\int_0^2\int_{r-2}^{\sqrt{4-r^2}}\int_0^{2\pi}(r\sin\theta + 1)\, r\, d\theta\, dz\, dr$

11. D, alttan $z = 0$ düzlemi, üstten $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresi ve yanlardan $x^2 + y^2 = 1$ silindiriyle sınırlı bölge olsun. Silindirik koordinatlarda D'nin hacmini, aşağıdaki integrasyon sırasında, veren üç katlı integralleri kurun.

a. $dz\, dr\, d\theta$

b. $dr\, dz\, d\theta$

c. $d\theta\, dz\, dr$

12. D, alttan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi, üstten $z = 2 - x^2 - y^2$ paraboloidiyle sınırlı bölge olsun. Silindirik koordinatlarda D'nin hacmini, aşağıdaki integrasyon sırasında, veren üç katlı integralleri kurun.

a. $dz\, dr\, d\theta$

b. $dr\, dz\, d\theta$

c. $d\theta\, dz\, dr$

13. Alttan $z = 0$ düzlemi, yandan $r = \cos\theta$ silindiri ve üstten $z = 3r^2$ paraboloidiyle sınırlanan bölgede

$$\iiint f(r, \theta, z)\, dz\, r\, dr\, d\theta$$

integralini ardışık integraller olarak hesaplamak için gereken integrasyon sınırlarını bulun.

14.

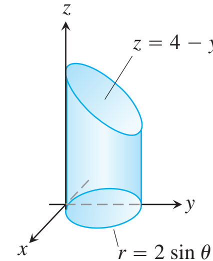
$$\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^x (x^2 + y^2)\, dz\, dx\, dy$$

integralini silindirik koordinatlarda eşdeğer bir integrale dönüştürün ve sonucu hesaplayın.

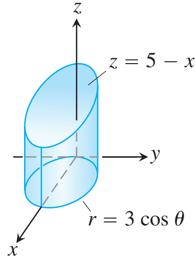
Silindirik Koordinatlarda Ardışık İntegraller Bulmak

15–20 alıştırmalarında, $\iiint_D f(r, \theta, z)\, dz\, r\, dr\, d\theta$'yı verilen D bölgesinde hesaplamak için ardışık integraller kurun.

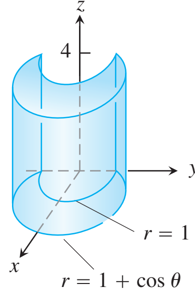
15. D bölgesi, tabanı xy-düzlemindeki $r = 2\sin\theta$ çemberi olan ve tepesi $z = 4 - y$ düzleminde bulunan dik dairesel silindirdir.



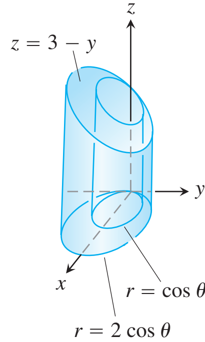
16. D bölgesi, tabanı $r = 3\cos\theta$ çemberi olan ve tepesi $z = 5 - x$ düzleminde bulunan dik dairesel silindirdir.



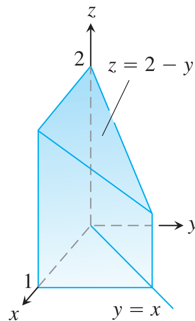
17. D bölgesi, tabanı xy-düzlemindeki $r = 1 + \cos\theta$ kardiodinin içinde ve $r = 1$ çemberinin dışında kalan bölge olan ve tepesi $z = 4$ düzleminde bulunan dik silindirdir.



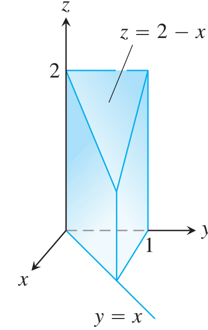
18. D bölgesi, tabanı $r = \cos\theta$ ve $r = 2\cos\theta$ çemberleri arasında kalan bölge olan ve tepesi $z = 3 - y$ düzleminde bulunan dik dairesel silindirdir.



19. D bölgesi, tabanı xy-düzleminde x-ekseni, $y = x$ ve $x = 1$ doğrularıyla sınırlı üçgen olan ve tepesi $z = 2 - y$ düzleminde bulunan prizmadır.



20. D bölgesi, tabanı xy-düzleminde y-ekseni, $y = x$ ve $y = 1$ doğrularıyla sınırlı üçgen olan ve tepesi $z = 2 - x$ düzleminde bulunan prizmadır.



Küresel Koordinatlarda İntegral Hesaplamak

21–26 alıştırmalarındaki küresel koordinat integrallerini hesaplayın.

21. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

22. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2} (\rho\cos\phi)\, \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

23. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{(1-\cos\phi)/2} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

24. $\displaystyle\int_0^{3\pi/2}\int_0^{\pi}\int_0^{1} 5\rho^3 \sin^3\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

25. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\phi}^{2} 3\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

26. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\phi} (\rho\cos\phi)\, \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

Küresel Koordinatlarda İntegrasyon Sırasını Değiştirmek

Önceki integraller, küresel koordinatlar için tercih edilen bir integrasyon sırası olduğunu söyler, ama başka sıralar da işe yarar ve bazen hesaplanması daha kolaydır. 27–30 alıştırmalarındaki integralleri hesaplayın.

27. $\displaystyle\int_0^{2}\int_{-\pi}^{0}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^3 \sin 2\phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho$

28. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_{\csc\phi}^{2\csc\phi}\int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\phi \, d\theta \, d\rho \, d\phi$

29. $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4} 12\rho \sin^3\phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho$

30. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\csc\phi}^{2} 5\rho^4 \sin^3\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

31. D bölgesi, Alıştırma 11'deki bölge olsun. Küresel koordinatlarda D'nin hacmini, aşağıdaki integrasyon sırasında, veren üç katlı integralleri kurun.

a. $d\rho \, d\phi \, d\theta$ **b.** $d\phi \, d\rho \, d\theta$

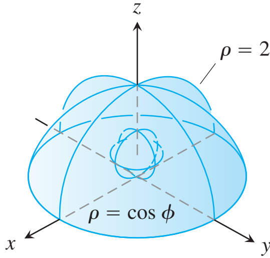
32. D, alttan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi ve üstten $z = 1$ düzlemiyle sınırlı bölge olsun. Küresel koordinatlarda D'nin hacmini, aşağıdaki integrasyon sırasında, veren üç katlı integralleri kurun.

a. $d\rho\ d\phi\ d\theta$ **b.** $d\phi\ d\rho\ d\theta$

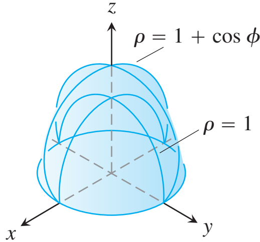
Küresel Koordinatlarda Ardışık İntegraller Bulmak

33–38 alıştırmalarında, **(a)** verilen cismin hacmini, küresel koordinatlarda hesaplayan integralin sınırlarını bulun ve **(b)** sonra integrali hesaplayın.

33. $\rho = \cos\phi$ küresi ile $\rho = 2$, $z \geq 0$ yarım küresi arasındaki cisim.



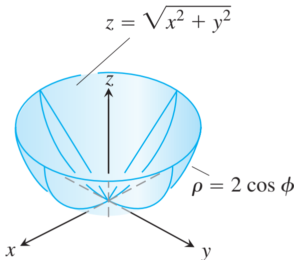
34. Alttan $\rho = 1$, $z \geq 0$ yarım küresi ve üstten $\rho = 1 + \cos\phi$ dönel kardiodiyle sınırlı cisim.



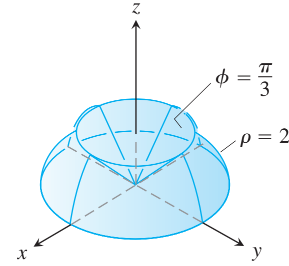
35. $\rho = 1 - \cos\phi$ dönel kardiodi ile çevrelenen cisim.

36. Alıştırma 35'teki cisimden xy-düzlemiyle kesilen üst kısım.

37. Alttan $\rho = 2\cos\phi$ küresi ve üstten konisiyle $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sınırlı cisim.



38. Alttan xy-düzlemi, yanlardan $\rho = 2$ küresi ve üstten $\phi = \pi/3$ konisiyle sınırlı cisim.



Kartezyen, Silindirik ve Küresel Koordinatlar

39. $\rho = 2$ küresinin hacmi için **(a)** Kartezyen, **(b)** silindirik ve **(c)** küresel koordinatlarda üç katlı integraller kurun.

40. D, birinci sekizde bir bölgede alttan $\phi = \pi/4$ konisi ve üstten $\rho = 3$ küresi ile sınırlı bölge olsun. D'nin hacmini (a) silindirik, **(b)** küresel koordinatlarda ardışık üç katlı bir integral olarak ifade edin. Sonra **(c)** V'yı bulun.

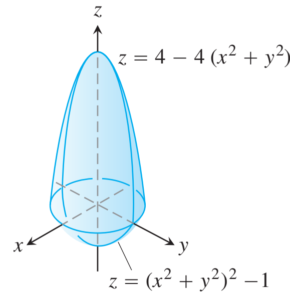
41. D, 2 birim yarıçaplı katı bir toptan, kürenin merkezinden 1 birim uzaklıktaki bir düzlemle kesilen küçük kapak olsun. D'nin hacmini **(a)** küresel, **(b)** silindirik ve **(c)** kartezyen koordinatlarda ardışık üç katlı bir integral olarak ifade edin. Sonra **(d)** hacmi bu üç katlı integrallerden birini hesaplayarak bulun.

42. Katı $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$, yarım küresinin I_z eylemsizlik momentini **(a)** silindirik ve **(b)** küresel koordinatlarda ardışık üç katlı bir integral olarak ifade edin. Sonra **(c)** I_z'yi bulun.

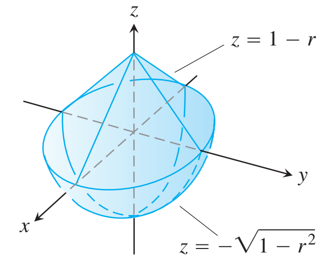
Hacimler

43–48 alıştırmalarındaki cisimlerin hacimlerini bulun.

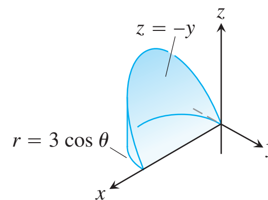
43.



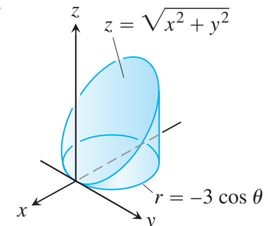
44.



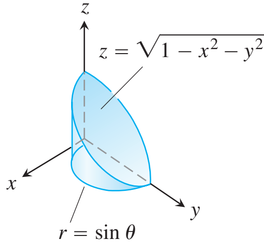
45.



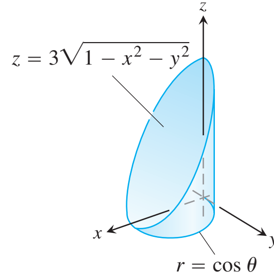
46.



47.



48.



49. Küre ve koni $\rho \le a$ küresinin $\phi = \pi/3$ ve $\phi = 2\pi/3$ konileri arasında kalan kısmının hacmini bulun.

50. Küre ve yarı-düzlemler $\rho \le a$ küresinden birinci sekizde bir bölgedeki $\theta = 0$ ve $\theta = \pi/6$ yarı-düzlemleriyle kesilen parçanın hacmini bulun.

51. Küre ve düzlem $\rho \le 2$ küresinden $z = 1$ düzlemiyle kesilen küçük parçanın hacmini bulun.

52. Küre ve düzlemler $z = 1$ ve $z = 2$ düzlemleri arasında, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisiyle çevrili bölgenin hacmini bulun.

53. Silindir ve paraboloid Alttan $z = 0$ düzlemi, yanlardan $x^2 + y^2 = 1$ silindiri ve üstten $z = x^2 + y^2$ paraboloidiyle sınırlı bölgenin hacmini bulun.

54. Silindir ve paraboloidler Alttan $z = x^2 + y^2$ paraboloidi, yanlardan $x^2 + y^2 = 1$ silindiri ve üstten $z = x^2 + y^2 + 1$ paraboloidiyle sınırlı bölgenin hacmini bulun.

55. Silindir ve koniler Kalın duvarlı $1 \le x^2 + y^2 \le 2$ silindirinden $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ konileriyle kesilen cismin hacmini bulun.

56. Küre ve silindir $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ küresinin içinde ve $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin dışında kalan bölgenin hacmini bulun.

57. Silindir ve düzlemler $x^2 + y^2 = 4$ silindiri, $z = 0$ ve $y + z = 4$ düzlemleriyle çevrili bölgenin hacmini bulun.

58. Silindir ve düzlemler $x^2 + y^2 = 4$ silindiri, $z = 0$ ve $x + y + z = 4$ düzlemleriyle çevrili bölgenin hacmini bulun.

59. Paraboloidlerle sınırlı bölge Üstten $z = 5 - x^2 - y^2$ paraboloidi ve alttan $z = 4x^2 + 4y^2$ paraboloidiyle çevrili bölgenin hacmini bulun.

60. Paraboloid ve silindir Üstten $z = 9 - x^2 - y^2$ paraboloidi, alttan xy-düzlemiyle sınırlanan ve $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin dışında kalan bölgenin hacmini bulun.

61. Silindir ve küre $x^2 + y^2 \le 1$ silindirinden $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresiyle kesilen bölgenin hacmini bulun.

62. Küre ve paraboloid Üstten $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ küresi ve alttan $z = x^2 + y^2$ paraboloidiyle sınırlı bölgenin hacmini bulun.

Ortalama Değerler

63. $f(r, \theta, z) = r$ fonksiyonunun $z = -1$ ve $z = 1$ düzlemleri arasında $r = 1$ silindiriyle sınırlı bölgede ortalama değerini bulun.

64. $f(r, \theta, z) = r$ fonksiyonunun $r^2 + z^2 = 1$ ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresidir.) küresiyle sınırlı bölgede ortalama değerini bulun.

65. $f(\rho, \phi, \theta) = \rho$ fonksiyonunun $\rho \le 1$ topundaki ortalama değerini bulun.

66. $f(\rho, \phi, \theta) = \rho\cos\phi$ fonksiyonunun $\rho \le 1$, $0 \le \phi \le \pi/2$ topundaki ortalama değerini bulun.

Kütle, Moment ve Merkezler

67. Kütle merkezi Sabit yoğunluklu bir cisim alttan $z = 0$ düzlemi, üstten $z = r$, $r \ge 0$ konisi ve yanlardan $r = 1$ silindiriyle sınırlıdır. Kütle merkezini bulun.

68. Merkez Birinci sekizde bir bölgede üstten $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi, alttan $z = 0$ düzlemi ve yanlardan $x^2 + y^2 = 4$ silindiri ile $x = 0$ ve $y = 0$ düzlemleriyle sınırlı bölgenin merkezini bulun.

69. Merkez Alıştırma 38'deki cismin merkezini bulun.

70. Merkez Üstten $\rho = a$ küresi ve alttan $\phi = \pi/4$ konisiyle sınırlı bölgenin merkezini bulun.

71. Merkez Üstten $z = \sqrt{r}$ yüzeyi, yanlardan $r = 4$ silindiri ve alttan xy-düzlemiyle sınırlı bölgenin merkezini bulun.

72. Merkez $r^2 + z^2 \le 1$ topundan $\theta = -\pi/3$, $r \ge 0$ ve $\theta = \pi/3$, $r \ge 0$ yarım düzlemleriyle kesilen bölgenin merkezini bulun.

73. Eylemsizlik ve jirasyon yarıçapı İçten $r = 1$ silindiri, dıştan $r = 2$ silindiri, alttan ve üstten $z = 0$ ve $z = 4$ düzlemleriyle sınırlı kalın duvarlı dik dairesel silindirin z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momenti ve jirasyon yarıçapını bulun ($\delta = 1$ alın).

74. Dairesel silindirin eylemsizlik momentleri 1 yarıçaplı ve 2 yükseklikli bir silindirin **(a)** silindirin eksenine göre, **(b)** merkezden geçen ve silindirin eksenine dik olan bir doğru etrafındaki eylemsizlik momentini bulun ($\delta = 1$ alın).

75. Dolu koninin eylemsizlik momenti 1 yarıçaplı ve 1 yükseklikli bir koninin tepe noktasından geçen ve tabana paralel olan bir eksene göre eylemsizlik momentini bulun ($\delta = 1$ alın).

76. Dolu kürenin eylemsizlik momenti a yarıçaplı bir kürenin bir çapı etrafındaki eylemsizlik momentini bulun ($\delta = 1$ alın).

77. Dolu koninin eylemsizlik momenti a yarıçaplı ve h yükseklikli bir koninin ekseni etrafındaki eylemsizlik momentini bulun. (*İpucu*: Koninin tepesini orijine ve eksenini z-eksenine yerleştirin).

78. Değişken yoğunluk Bir cisim üstten $z = r^2$ paraboloidi, alttan $z = 0$ düzlemi ve yanlardan $r = 1$ silindiriyle sınırlıdır.

Yoğunluğu,

a. $\delta(r, \theta, z) = z$

b. $\delta(r, \theta, z) = r$

ise, kütle merkezini ve z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momenti ve jirasyon yarıçapını bulun.

79. Değişken yoğunluk Bir cisim alttan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi ve üstten $z = 1$ düzlemiyle sınırlıdır. Yoğunluğu

a. $\delta(r, \theta, z) = z$

b. $\delta(r, \theta, z) = z^2$

ise, z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentini ve jirasyon yarıçapını bulun.

80. Değişken yoğunluk Bir top $\rho = a$ küresiyle sınırlıdır. Yoğunluğu

a. $\delta(\rho, \phi, \theta) = \rho^2$

b. $\delta(\rho, \phi, \theta) = r = \rho \sin \phi$

ise, z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momenti ve jirasyon yarıçapını bulun.

81. Dolu yarı-elipsoidin merkezi Dönel bir $(r^2/a^2) + (z^2/h^2) \leq 1$, $z \geq 0$ yarı-elipsoidinin merkezinin, z-ekseninde tabandan tavana olan uzunluğun sekizde üçü uzaklığında olduğunu gösterin. Özel durum $h = a$ bir yarım küre verir. Yani bir yarım kürenin merkezi tabandan tavana olan uzunluğun sekizde üçü uzaklığındadır.

82. Dolu koninin merkezi Bir koninin merkezinin, tabandan tepeye olan uzunluğun dörtte birinde olduğunu gösterin (Genelde, bir koninin veya bir piramidin merkezi tabandan tepeye olan uzaklığın dörtte birindedir).

83. Değişken yoğunluk Dik dairesel dolu bir silindir $r = a$ silindiri ile $z = 0$ ve $z = h$, $h > 0$ düzlemleri arasındadır. Yoğunluğu $\delta(r, \theta, z) = z + 1$ ise, kütle merkezini ve z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momenti ve jirasyon yarıçapını bulun.

84. Gezegenin atmosferinin kütlesi R yarıçaplı küresel bir gezegenin yoğunluğu, h gezegenin yüzeyinden yükseklik, μ_0 deniz seviyesindeki yoğunluk ve c pozitif bir sabit olmak üzere, $\mu = \mu_0 e^{-ch}$ ile verilen bir atmosferi vardır. Gezegenin atmosferinin kütlesini bulun.

85. Bir gezegenin merkezinin yoğunluğu Bir gezegen R yarıçaplı bir küre şeklinde ve, yoğunluk dağılımı merkezine yaklaşıldıkça artmak ve küresel simetrik olmak üzere, toplam kütlesi M'dir Gezegenin kenarında (yüzeyinde) yoğunluk sıfır olarak alınıyorsa, merkezdeki yoğunluk nedir?

Teori ve Örnekler

86. Küresel koordinatlarda dik dairesel silindirler $x^2 + y^2 = a^2$ silindiri için $\rho = f(\phi)$ formunda bir denklem bulun.

87. Silindirik koordinatlarda dikey düzlemler

a. x-eksenine dik düzlemlerin denklemlerinin $r = a \sec \theta$ formunda olduğunu gösterin.

b. y-eksenine dik düzlemlerin denklemlerinin $r = b \csc \theta$ formunda olduğunu gösterin.

88. (*Alıştırma 87'nin devamı*) $ax + by = c$, $c \neq 0$ düzlemi için silindirik koordinatlarda $r = f(\theta)$ formunda bir denklem bulun.

89. Simetri Silindirik koordinatlarda $r = f(z)$ formunda bir denklemi var olan bir yüzeyin ne gibi simetrileri vardır. Cevabını açıklayın.

90. Simetri Küresel koordinatlarda $\rho = f(\phi)$ formunda bir denklemi var olan bir yüzeyin ne gibi simetrileri vardır. Cevabınızı açıklayın.

15.7 Çok Katlı İntegrallerde Değişken Dönüşümü

Bu bölüm çok katlı integrallerin değişken dönüşümüyle nasıl hesaplanacağını göstermektedir. Tek katlı integrasyonda olduğu gibi, değişken dönüşümünün amacı karmaşık integralleri hesaplanması kolay integrallerle değiştirmektir. Değişken dönüşümü, integrandı, integrasyon sınırlarını veya ikisini de basitleştirerek, bunu gerçekleştirir.

İki Katlı İntegrallerde Değişken Dönüşümü

Bölüm 15.3'teki kutupsal koodinat dönüşümleri, iki katlı integraller için daha genel bir değişken dönüşümü yönteminin bir özel halidir. Yöntem, değişkenlerdeki değişimi bölgelerin dönüşümü olarak resmeder.

uv-düzlemindeki bir G bölgesinin xy-düzlemindeki bir R bölgesine, Şekil 15.47'de önerildiği gibi,

$$x = g(u, v), \quad y = h(u, v)$$

denklemleriyle bire-bir olarak dönüştürüldüğünü varsayalım. R'ye G'nin dönüşüm altındaki **görüntüsü**, G'ye de R'nin **ön görüntüsü** deriz. R'de tanımlı herhangi bir $f(x, y)$

fonksiyonu, G'de tanımlı $f(g(u, v)), h(u, v))$ fonksiyonu olarak düşünülebilir. $f(x, y)$'nin R üzerindeki integralinin, $f(g(u, v)), h(u, v))$'nin G'deki integrali ile nasıl bir ilişkisi vardır?

Yanıt şudur: g, h ve f'nin sürekli kısmi türevleri varsa ve $J(u, v)$ (biraz sonra açıklanacak) sadece izole noktalarda sıfırsa, tabii eğer varsa,

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_G f(g(u, v), h(u, v))\,|J(u, v)|\, du\, dv \tag{1}$$

olur.

TARİHSEL BİYOGRAFİ

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851)

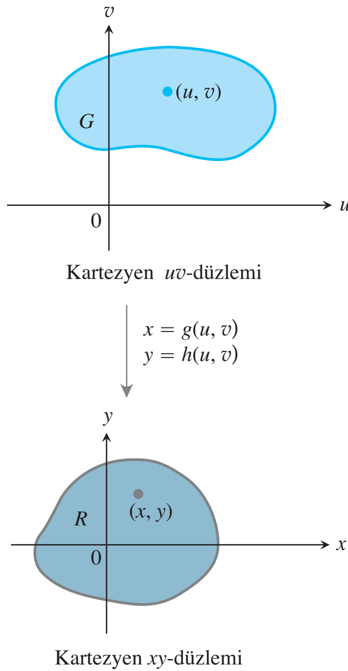
(1) denkleminde mutlak değeri görülen $J(u, v)$ çarpanı, adını Alman matematikçi Carl Jacobi'den alan, koordinat dönüşümün *Jakobiyeni*dir. Jakobiyen, G'deki bir noktanın civarının, G bölgesi R'ye dönüştürülürken, ne kadar genişlediğini veya büzüldüğünü ölçer.

TANIM Jakobiyen

$x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ koordinat dönüşümünün **Jakobiyen determinantı** veya **Jakobiyeni**

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \tag{2}$$

olarak tanımlanır.



ŞEKİL 15.47 $x = g(u, v)$ ve $y = h(u, v)$ denklemleri xy-düzleminin bir R bölgesindeki bir integrali uv-düzleminin bir G bölgesindeki bir integrale dönüştürmemizi sağlar.

Jakobiyen ayrıca, (2) denklemindeki determinantın x ve y'nin kısmi türevlerinden nasıl oluşturulduğunu hatırlamak amacıyla

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

olarak da gösterilir. (1) denkleminin türetilişi karmaşıktır ve daha ileri analiz derslerinin konusudur. Türetilişi burada göstermeyeceğiz.

Kutupsal koordinatlar için, u ve v yerine r ve θ kullanırız. $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ ile, Jakobiyen

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

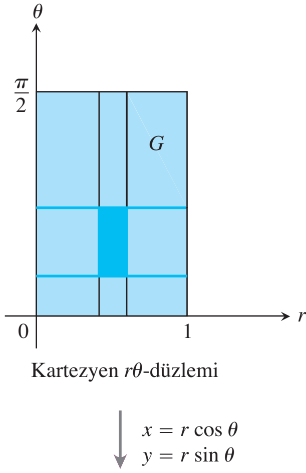
olur. Dolayısıyla, (1) denklemi

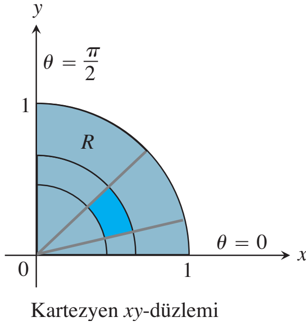
$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|r|\, dr\, d\theta$$

$$= \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta \qquad r \geq 0 \text{ ise} \tag{3}$$

halini alır ki, bu da Bölüm 15.3'te bulunan denklemdir.

Şekil 15.48, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ denklemlerinin G: $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ dikdörtgenini xy-düzleminin birinci dörtte bir bölgesinde $x^2 + y^2 = 1$ ile sınırlı R çeyrek çemberine nasıl dönüştürdüğünü gösterir.





ŞEKİL 15.48 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ denklemleri G'yi R'ye dönüştürür.

(3) denkleminin sağ tarafındaki integralin, $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$'nın kutupsal koordinat düzleminde bir bölgede integrali olmadığına dikkat edin. $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ve r'nin çarpımının, *Kartezyen* $r\theta$-düzleminde bir G bölgesindeki integralidir.

Aşağıda başka bir değişken dönüşümünün örneği vardır.

ÖRNEK 1 İntegrasyon İçin Bir Dönüşüm Uygulamak

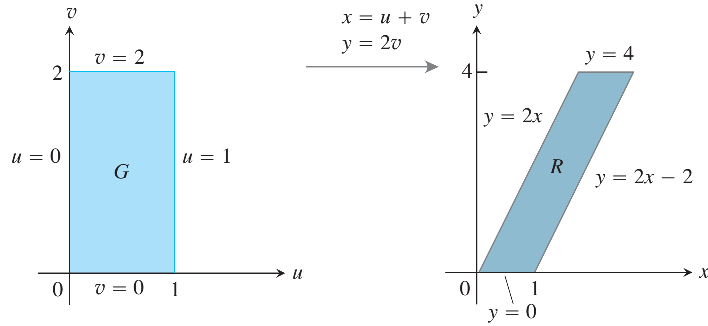
$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x-y}{2}\,dx\,dy$$

integralini

$$u = \frac{2x-y}{2}, \qquad v = \frac{y}{2} \tag{4}$$

dönüşümünü uygulayarak ve uv-düzleminde uygun bir bölgede integre ederek hesaplayın.

Çözüm xy-düzlemindeki R integrasyon bölgesini çizer ve sınırlarını belirleriz (Şekil 15.49).



ŞEKİL 15.49 $x = u + v$ ve $y = 2v$ denklemleri G'yi R'ye dönüştürür. Dönüşümü $u = (2x - y)/2$ ve $v = y/2$ denklemleriyle tersine çevirmek R'yi G'ye dönüştürür (Örnek 1).

(1) denklemini uygulamak için, karşılık gelen uv-bölgesi G'yi ve dönüşümün Jakobiyenini bulmamız gerekir. Bunları bulmak için, (4) denklemlerinden x ve y'yi u ve v cinsinden çözeriz. Kısa bir hesaplama

$$x = u + v \qquad y = 2v \tag{5}$$

verir. Bu ifadeleri R'nin sınırlarının denklemlerinde yerine koyarak G'nin sınırlarını buluruz (Şekil 15.49).

R'nin sınırlarının xy-denklemleri	**G'nin sınırlarının karşılık gelen uv-denklemleri**	**Basitleştirimiş uv-denklemleri**
$x = y/2$	$u + v = 2v/2 = v$	$u = 0$
$x = (y/2) + 1$	$u + v = (2v/2) + 1 = v + 1$	$u = 1$
$y = 0$	$2v = 0$	$v = 0$
$y = 4$	$2v = 4$	$v = 2$

Dönüşümün Jakobiyeni (yine (5) denklemlerinden)

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u + v) & \frac{\partial}{\partial v}(u + v) \\ \frac{\partial}{\partial u}(2v) & \frac{\partial}{\partial v}(2v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

bulunur. Artık (1) denklemini uygulamak için her şeye sahibiz:

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x - y}{2}\, dx\, dy = \int_{v=0}^{v=2} \int_{u=0}^{u=1} u\,|J(u, v)|\, du\, dv$$

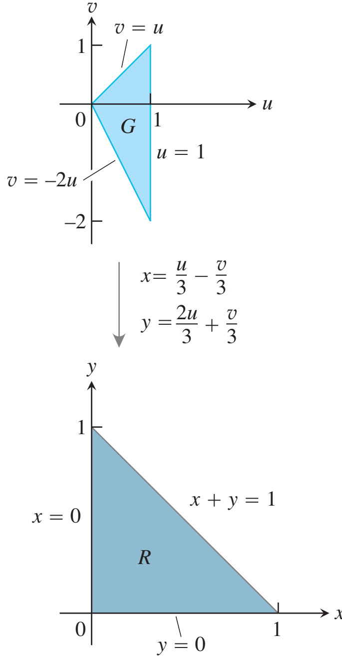
$$= \int_0^2 \int_0^1 (u)(2)\, du\, dv = \int_0^2 \Big[u^2\Big]_0^1 dv = \int_0^2 dv = 2$$

■

ÖRNEK 2 İntegrasyon İçin Bir Dönüşüm Uygulamak

Aşağıdaki integrali hesaplayın.

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x + y}\,(y - 2x)^2\, dy\, dx$$



ŞEKİL 15.50 $x = (u/3) - (v/3)$ ve $y = (2u/3) + (v/3)$ denklemleri G'yi R'ye dönüştürür. Dönüşümü $u = x + y$ ve $v = y - 2x$ denklemleriyle tersine çevirmek, R'yi G'ye dönüştürür (Örnek 2).

Çözüm xy-düzlemindeki integrasyon bölgesi R'yi çizer ve sınırları belirleriz (Şekil 15.50). İntegrand, $u = x + y$ ve $v = y - 2x$ dönüşümünü önerir. Biraz cebir, x ve y'yi u ve v cinsinden verir:

$$x = \frac{u}{3} - \frac{v}{3}, \qquad y = \frac{2u}{3} + \frac{v}{3} \tag{6}$$

(6) denklemlerinden uv-bölgesi'nin sınırlarını bulabiliriz (Şekil 15.50).

R'nin sınırlarının xy-denklemleri	G'nin sınırlarının karşılık gelen uv-denklemleri	Basitleştirimiş uv-denklemleri
$x + y = 1$	$\left(\frac{u}{3} - \frac{v}{3}\right) + \left(\frac{2u}{3} + \frac{v}{3}\right) = 1$	$u = 1$
$x = 0$	$\frac{u}{3} - \frac{v}{3} = 0$	$v = u$
$y = 0$	$\frac{2u}{3} + \frac{v}{3} = 0$	$v = -2u$

(6) denklemindeki dönüşümün Jakobiyeni

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

olarak bulunur.

(1) denklemini uygulayarak, integrali hesaplarız:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\,dy\,dx = \int_{u=0}^{u=1} \int_{v=-2u}^{v=u} u^{1/2} v^2 |J(u,v)|\,dv\,du$$

$$= \int_0^1 \int_{-2u}^{u} u^{1/2} v^2 \left(\frac{1}{3}\right) dv\,du = \frac{1}{3}\int_0^1 u^{1/2} \left[\frac{1}{3} v^3\right]_{v=-2u}^{v=u} du$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^1 u^{1/2}(u^3 + 8u^3)\,du = \int_0^1 u^{7/2}\,du = \frac{2}{9}u^{9/2}\Big]_0^1 = \frac{2}{9}$$

■

Üç Katlı İntegrallerde Değişken Dönüşümü

Bölüm 15.6'daki silindirik ve küresel koordinat dönüşümleri, üç katlı integrallerdeki değişkenlerin değişimlerini, üç boyutlu bölgelerin dönüşümleri olarak resimleyen bir dönüşüm yönteminin özel durumlarıdır. Yöntem, şimdi iki yerine üç boyutta çalışmamızın dışında, iki katlı integrallerdeki yöntem gibidir.

uvw-uzayındaki bir G bölgesinin *xyz*-uzayındaki bir D bölgesine, Şekil 15.51'de önerildiği gibi,

$$x = g(u, v, w), \qquad y = h(u, v, w), \qquad z = k(u, v, w)$$

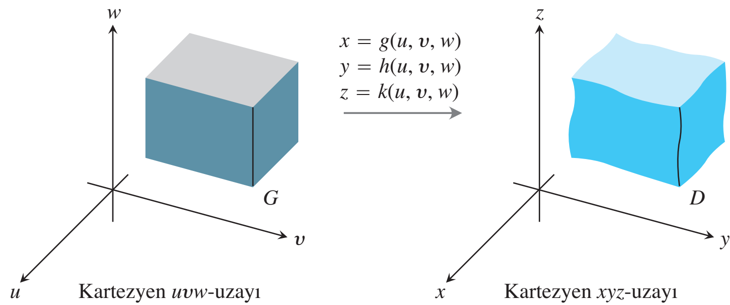
formundaki diferansiyellenebilir denklemlerle bire-bir olarak dönüştürüldüğünü varsayın. Bu durumda, D üzerinde tanımlı herhangi bir $F(x, y, z)$ fonksiyonu G üzerinde tanımlı bir

$$F(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) = H(u, v, w)$$

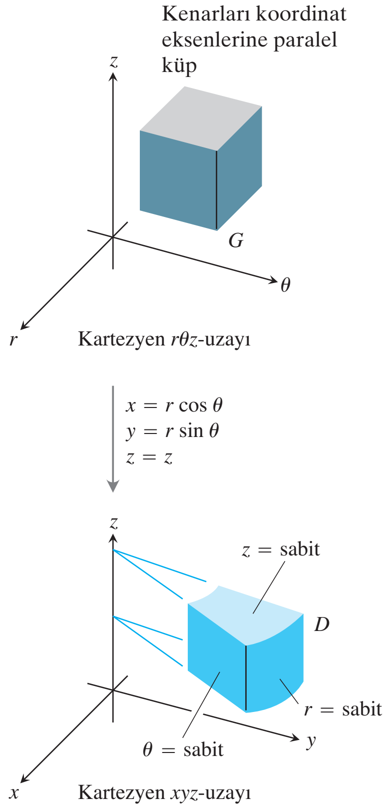
fonksiyonu olarak düşünülebilir. g, h ve k'nin birinci mertebe kısmi türevleri var ve sürekli iseler, $F(x, y, z)$'nin D üzerindeki integrali $H(u, v, w)$'nun G üzerindeki integraline

$$\iiint_D F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G H(u, v, w)|J(u, v, w)|\,du\,dv\,dw \qquad (7)$$

denklemiyle bağlıdır.



ŞEKİL 15.51 $x = g(u, v, w)$, $y = h(u, v, w)$ ve $z = k(u, v, w)$ denklemleri Kartezyen *xyz*-uzayının bir D bölgesindeki bir integrali Kartezyen *uvw*-uzayının bir G bölgesindeki bir integrale dönüştürmemizi sağlar.



ŞEKİL 15.52 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ve $z = z$ denklemleri G küpünü D silindirik takozuna dönüştürür.

Bu denklemde mutlak değeri görülen $J(u, v, w)$ çarpanı

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$$

Jakobiyen determinantıdır. Bu determinant, (u, v, w)'dan (x, y, z) koordinatlarına dönüşüm tarafından, G'deki bir nokta yakınındaki hacmin ne kadar genişlediğini veya büzüldüğünü ölçer. İki boyutlu durumda olduğu gibi, (7) denklemindeki değişken-dönüşümü-formülünün türetilişi karmaşıktır ve burada bunun üzerinde durmayacağız.

Silindirik koordinatlar için, u, v ve w'nun yerini r, θ ve z alır. Kartezyen $r\theta z$-uzayından Kartezyen xyz-uzayına dönüşüm

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z$$

denklemleriyle verilir (Şekil 15.52). Dönüşümün Jakobiyeni

$$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

olur. (7) denkleminin buna karşılık gelen versiyonu

$$\iiint_D F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_G H(r, \theta, z)\,|r|\, dr\, d\theta\, dz$$

şeklindedir. $r \geq 0$ olduğunda, mutlak değer işaretlerini kaldırabiliriz.

Küresel koordinatlar için, u, v, w'nun yerini ρ, ϕ ve θ alır. Kartezyen $\rho\phi\theta$-uzayından Kartezyen xyz-uzayına dönüşüm

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \qquad z = \rho\cos\phi$$

denklemleriyle verilir (Şekil 15.53). Dönüşümün Jakobiyeni

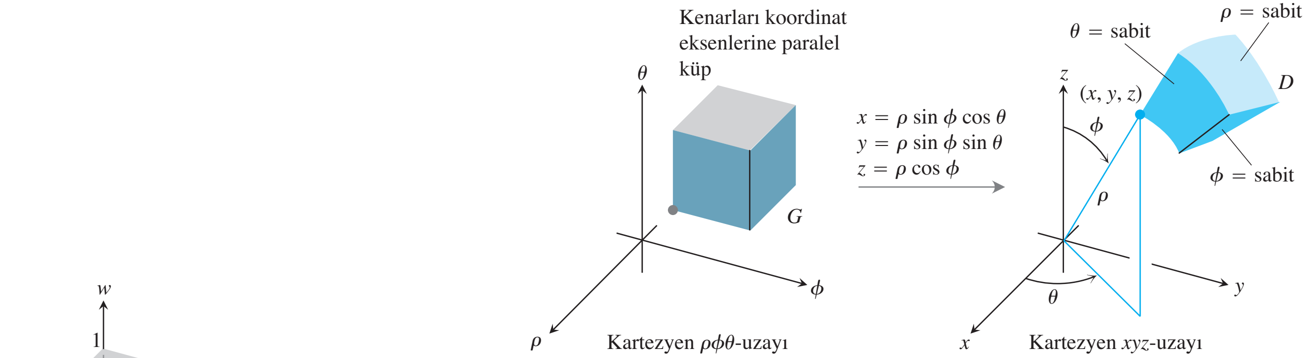
$$J(\rho, \phi, \theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2\sin\phi$$

olur (Alıştırma 17).

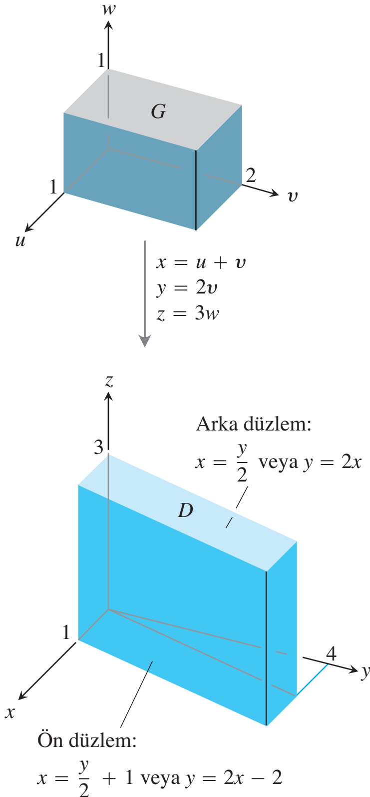
(7) denkleminin buna karşılık gelen versiyonu

$$\iiint_D F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_G H(\rho, \phi, \theta)\,|p^2 \sin\phi|\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

halini alır. $0 \le \phi \le \pi$ için $\sin\phi$ asla negatif olmadığından, mutlak değer işaretlerini kaldırabiliriz. Bunun, Bölüm 15.6'da elde ettiğimiz sonucun aynısı olduğuna dikkat edin.



ŞEKİL 15.53 $x = \rho \sin\phi \cos\theta$, $y = \rho \sin\phi \sin\theta$ ve $z = \rho\cos\phi$ denklemleri G küpünü D küresel takozuna dönüştürür.



ŞEKİL 15.54 $x = u + v$, $y = 2v$ ve $z = 3w$ denklemleri G'yi D'ye dönüştürür. Dönüşümü $u = (2x - y)/2$, $v = y/2$ ve $w = z/3$ denklemleriyle tersine çevirmek D'yi G'ye dönüştürür (Örnek 3).

Aşağıda başka bir değişken dönüşümü örneği vardır. Bu örnekteki integrali, doğrudan hesaplayabilir olmamıza rağmen, dönüşüm yöntemini basit bir (ve açıkçası sezgisel olarak) kurgu içinde açıklamak için seçtik.

ÖRNEK 3 İntegrasyon İçin Bir Dönüşüm Uygulamak

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \left(\frac{2x - y}{2} + \frac{z}{3}\right) dx\, dy\, dz$$

integralini

$$u = (2x - y)/2, \qquad v = y/2, \qquad w = z/3 \tag{8}$$

dönüşümünü uygulayarak ve uvw-uzayında uygun bir bölgede integral alarak hesaplayın.

Çözüm xyz-uzayında D integrasyon bölgesini çizer ve sınırlarını belirleriz. (Şekil 15.54). Bu durumda, sınır yüzeyler düzlemlerdir.

(7) Denklemini uygulamak için, karşılık gelen uvw-bölgesi G'yi ve dönüşümün Jakobiyenini bulmamız gerekir. Bunları bulmak için, (8) denklemlerinden x, y ve z'yi u, v ve w cinsinden çözeriz. Biraz işlemle

$$x = u + v, \qquad y = 2v, \qquad z = 3w \tag{9}$$

buluruz. Sonra bu ifadeleri D'nin sınır denklemlerinde yerine koyarak G'nin sınırlarını buluruz:

***D*'nin sınırlarının *xyz*-denklemleri**	***G*'nin sınırlarının karşılık gelen *uvw*-denklemleri**	**Basitleştirilmiş *uvw*-denklemleri**
$x = y/2$	$u + v = 2v/2 = v$	$u = 0$
$x = (y/2) + 1$	$u + v = (2v/2) + 1 = v + 1$	$u = 1$
$y = 0$	$2v = 0$	$v = 0$
$y = 4$	$2v = 4$	$v = 2$
$z = 0$	$3w = 0$	$w = 0$
$z = 3$	$3w = 3$	$w = 1$

Dönüşümün Jakobiyeni, yine (9) denklemlerinden,

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

olarak bulunur. Artık elimizde (7) denklemini uygulamak için her şey vardır:

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \left(\frac{2x - y}{2} + \frac{z}{3} \right) dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u + w)|J(u, v, w)|\, du\, dv\, dw$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u + w)(6)\, du\, dv\, dw = 6\int_0^1 \int_0^2 \left[\frac{u^2}{2} + uw \right]_0^1 dv\, dw$$

$$= 6\int_0^1 \int_0^2 \left(\frac{1}{2} + w \right) dv\, dw = 6\int_0^1 \left[\frac{v}{2} + vw \right]_0^2 dw = 6\int_0^1 (1 + 2w)\, dw$$

$$= 6\left[w + w^2 \right]_0^1 = 6(2) = 12.$$ ■

Bu bölümün amacı, koordinat dönüşümlerinin içerdiği fikirlerle sizleri tanıştırmaktı. Dönüşümler, Jakobiyen ve çok değişkenli dönüşümlerin esaslı bir incelemesi bir lineer cebir dersinden sonra ileri analizde daha iyi verilmektedir.

ALIŞTIRMALAR 15.7

İki Değişken İçin Jakobiyenler ve Dönüştürülmüş Bilgeler Bulmak

1. a.

$$u = x - y, \qquad v = 2x + y$$

sisteminden x ve y'yi u ve v cinsinden çözün. Sonra $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ Jakobiyeninin değerini bulun.

b. xy-düzleminde köşeleri (0, 0), (1, 1) ve (1, –2)'de bulunan üçgen bölgenin $u = x - y$, $v = 2x + y$ dönüşümü altındaki görüntüsünü bulun. uv-düzleminde dönüştürülmüş bölgeyi çizin.

2. a.

$$u = x + 2y, \qquad v = x - y$$

sisteminden x ve y'yi u ve v cinsinden çözün. Sonra $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ Jakobiyeninin değerini bulun.

b. xy-düzleminde $y = 0$, $y = x$ ve $x + 2y = 2$ doğrularıyla sınırlı üçgen bölgenin $u = x + 2y$, $v = x - y$ dönüşümü altındaki görüntüsünü bulun. uv-düzleminde dönüştürülmüş bölgeyi çizin.

3. a.

$$u = 3x + 2y, \qquad v = x + 4y$$

sisteminden x ve y'yi u ve v cinsinden çözün. Sonra $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ Jakobiyeninin değerini bulun.

b. xy-düzleminde x-ekseni, y-ekseni ve $x + y = 1$ doğrusuyla sınırlı üçgen bölgenin $u = 3x + 2y$, $v = x + 4y$ dönüşümü altındaki görüntüsünü bulun. uv-düzleminde dönüştürülmüş bölgeyi çizin.

4. a.

$$u = 2x - 3y, \qquad v = -x + y$$

sisteminden x ve y'yi u ve v cinsinden çözün. Sonra $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ Jakobiyeninin değerini bulun.

b. xy-düzleminde sınırları $x = -3$, $x = 0$, $y = x$ ve $y = x + 1$ olan R paralelkenarının $u = 2x - 3y$, $v = -x + y$ dönüşümü altındaki görüntüsünü bulun. uv-düzleminde dönüştürülmüş bölgeyi çizin.

İki Katlı İntegraller hesaplamak İçin Dönüşüm Uygulamak

5. Örnek 1'deki

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x - y}{2}\, dx\, dy$$

integralini doğrudan x ve y'ye göre integre ederek değerinin 2 olduğunu doğrulayın.

6. Birinci dörtte bir bölgede $y = -2x + 4$, $y = -2x + 7$, $y = x - 2$ ve $y = x + 1$ doğrularıyla sınırlı R bölgesinde

$$\iint_R (2x^2 - xy - y^2)\, dx\, dy$$

integralini hesaplamak için Örnek 1'deki dönüşümü kullanın.

7. Birinci dörtte bir bölgede $y = -(3/2)x + 1$, $y = -(3/2)x + 3$, $y = -(1/4)x$ ve $y = (1/4)x + 1$ doğrularıyla sınırlı R bölgesinde

$$\iint_R (3x^2 + 14xy + 8y^2)\, dx\, dy$$

integralini hesaplamak için Örnek 3'teki dönüşümü kullanın.

8. Alıştırma 4'teki dönüşüm ve paralelkenarı kullanarak

$$\iint_R 2(x - y)\, dx\, dy$$

integralini hesaplayın.

9. R, xy-düzleminin birinci dörtte bir bölgesinde $xy = 1$, $xy = 9$ hiperbolleri ve $y = x$, $y = 4x$ doğrularıyla sınırlı bölge olsun. $u > 0$ ve $v > 0$ ile $x = u/v$, $y = uv$ dönüşümünü kullanarak

$$\iint_R \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) dx\, dy$$

integralini uv-düzleminde uygun bir G bölgesinde yeniden yazın. Sonra G üzerinde uv-integralini hesaplayın.

10. a. $x = u$, $y = uv$ dönüşümünün Jakobiyenini bulun ve uv-düzlemindeki G: $1 \le u \le 2$, $1 \le uv \le 2$ bölgesini çizin.

b. Sonra

$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{y}{x}\, dy\, dx$$

integralini G'de bir integrale dönüştürmek için (1) denklemini kullanın ve iki integrali de hesaplayın.

11. Eliptik bir levhanın kutupsal eylemsizlik momenti Sabit yoğunluklu ince bir levha xy-düzleminde $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > 0$, $b > 0$ elipsiyle sınırlı bölgeyi kaplamaktadır. Plakanın orijin etrafındaki birinci momentini bulun (*İpucu:* $x = ar \cos\theta$, $y = br \sin\theta$ dönüşümünü kullanın).

12. Bir elipsin alanı $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ elipsinin alanı, πab, $f(x, y) = 1$ fonksiyonu xy-düzleminde elipsle sınırlı bölgede integre edilerek bulunabilir. İntegrali doğrudan hesaplamak trigonometrik bir değişken dönüşümü gerektirir. İntegrali hesaplamanın daha kolay bir yolu $x = au$, $y = bv$ dönüşümünü kullanmak ve dönüştürülmüş integrali uv-düzleminde G: $u^2 + v^2 \le 1$ dairesi üzerinde hesaplamaktır. Alanı bu yolla bulun.

13. Örnek 2'deki dönüşümü kullanarak,

$$\int_0^{2/3} \int_y^{2-2y} (x + 2y)e^{(y-x)}\, dx\, dy$$

integralini, önce uv-düzleminde bir G bölgesi üzerinde bir integral olarak yazın ve hesaplayın.

14. $x = u + (1/2)v$, $y = v$ dönüşümünü kullanarak,

$$\int_0^2 \int_{y/2}^{(y+4)/2} y^3(2x - y)e^{(2x-y)^2}\, dx\, dy$$

integralini, önce uv-düzleminde bir G bölgesi üzerinde bir integral olarak yazın ve hesaplayın.

Jakobiyen Determinantları Bulmak

15. Verilen dönüşümlerin $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ Jakobiyenini bulun.

a. $x = u \cos v$, $\quad y = u \sin v$

b. $x = u \sin v$, $\quad y = u \cos v$.

16. Verilen dönüşümlerin $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ Jakobyenini bulun.

a. $x = u \cos v$, $\quad y = u \sin v$, $\quad z = w$

b. $x = 2u - 1$, $\quad y = 3v - 4$, $\quad z = (1/2)(w - 4)$.

17. Uygun determinantı hesaplayarak Kartezyen $\rho\phi\theta$-uzayından Kartezyen xyz-uzayına dönüşümün Jakobiyeninin $\rho^2 \sin\phi$ olduğunu gösterin.

18. Tek katlı integrallerde değişken dönüşümü Tek katlı belirli integrallerde değişken dönüşümleri bölgelerin dönüşümü olarak nasıl görülebilir? Böyle bir durumda Jakobiyen nedir? Bir örnekle canlandırın.

Üç Katlı İntegraller Hesaplamak İçin Dönüşüm Uygulamak

19. Örnek 3'teki integrali x, y ve z'ye göre integre ederek hesaplayın.

20. Bir Elipsoidin Hacmi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

elipsoidinin hacmini bulun (*İpucu:* $x = au$, $y = bv$ ve $z = cw$ alın. Sonra uvw-uzayında uygun bir bölgenin hacmini bulun).

21.

$$\iiint |xyz|\, dx\, dy\, dz$$

integralini

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$$

elipsoidi üzerinde integre edin (*İpucu*: $x = au$, $y = bv$ ve $z = cw$ alın. Sonra uvw-uzayında uygun bir bölgede integre edin).

22. D, xyz-uzayında

$$1 \le x \le 2, \quad 0 \le xy \le 2, \quad 0 \le z \le 1$$

eşitsizlikleriyle tanımlı bölge olsun.

$$\iiint_D (x^2y + 3xyz)\, dx\, dy\, dz$$

integralini

$$u = x, \quad v = xy, \quad w = 3z$$

dönüşümlerini uygulayıp, uvw-uzayında bir G bölgesinde integre ederek hesaplayın.

23. İçi dolu bir yarı-elipsoidin merkezi İçi dolu bir yarı-elipsoidin kütle merkezinin simetri ekseni üzerinde, tabandan üste doğru yolun üç bölü sekizinde olduğu sonucunun doğruluğunu varsayarak, uygun integralleri dönüştürerek, $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \le 1$, $z \ge 0$ elipsoidinin kütle merkezinin z-ekseni üzerinde, tabandan tepeye olan yolun üç bölü sekizinde olduğunu gösterin (Bunu, integralleri hesaplamadan da yapabilirsiniz).

24. Silindirik kabuklar Bölüm 6.2'de kabuk yöntemini kullanarak bir dönel cismin hacminin nasıl bulunacağını öğrendik; Yani, $y = f(x)$ eğrisi ve a'dan b'ye kadar x-ekseni arasındaki bölge $(0 < a < b)$ y-ekseni etrafında döndürülürse, elde edilen katı cismin hacmi $\int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$ dir. Hacimleri, üç katlı integraller kullanarak bulmanın aynı sonucu verdiğini ispatlayın (*İpucu*: y ve z'nin rollerini değiştirerek silindirik koordinatları kullanın).

Bölüm 15 Bölüm Tekrar Soruları

1. İki değişkenli bir fonksiyonun, koordinat düzleminde sınırlı bir bölge üzerinde iki katlı integralini tanımlayın.
2. İki katlı integraller ardışık integraller olarak nasıl hesaplanır? İntegrasyon sırası önemli midir? İntegrasyon sınırları nasıl belirlenir? Örnek verin.
3. Alanları, ortalama değerleri, kütleleri, momentleri, kütle merkezlerini ve jirasyon yarıçaplarını hesaplamak için iki katlı integraller nasıl kullanılır? Örnekler verin.
4. Kartezyen koordinatlarda iki katlı bir integrali kutupsal koordinatlarda iki katlı bir integrale nasıl dönüştürürsünüz? Bunu yapmak neden gerekebilir? Bir örnek verin.
5. Bir $f(x, y, z)$ fonksiyonunun, uzayda sınırlı bir bölgede üç katlı integralini tanımlayın.
6. Kartezyen koordinatlarda üç katlı integraller nasıl hesaplanır? İntegrasyon sınırları nasıl belirlenir? Bir örnek verin.
7. Kartezyen koordinatlarda üç katlı integraller hacimleri, ortalama değerleri, momentleri, kütle merkezlerini ve jirasyon yarıçaplarını hesaplamakta nasıl kullanılır? Örnekler verin.
8. Silindirik ve küresel koordinatlarda üç katlı integraller nasıl tanımlanır? Neden Kartezyen koordinatlarda çalışmak yerine bu koordinat sistemlerinden birini seçmek isteyesiniz?
9. Silindirik ve küresel koordinatlarda üç katlı integraller nasıl hesaplanır? İntegrasyon sınırları nasıl bulunur? Örnek verin.
10. İki katlı integrallerde değişken dönüşümleri, nasıl iki boyutlu bölgelerin dönüşümü olarak görülebilir. Örnek bir hesaplama verin.
11. Üç katlı integrallerde değişken dönüşümleri, nasıl üç boyutlu bölgelerin dönüşümü olarak görülebilir. Örnek bir hesaplama verin.

Bölüm 15 Problemler

Düzlemsel İntegrasyon Bölgeleri

1–4 problemlerinde, integrasyon bölgesini çizin ve iki katlı integrali hesaplayın.

1. $\int_1^{10}\int_0^{1/y} ye^{xy}\,dx\,dy$

2. $\int_0^1\int_0^{x^3} e^{y/x}\,dy\,dx$

3. $\int_0^{3/2}\int_{-\sqrt{9-4t^2}}^{\sqrt{9-4t^2}} t\,ds\,dt$

4. $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} xy\,dx\,dy$

İntegrasyon Sırasını Değiştirmek

5–8 problemlerinde, integrasyon bölgesini çizin ve integrasyon sırası, verilenin tersi olan eşdeğer bir integral yazın. Sonra iki integrali de hesaplayın.

5. $\int_0^4\int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2} dx\,dy$

6. $\int_0^1\int_{x^2}^{x} \sqrt{x}\,dy\,dx$

7. $\int_0^{3/2}\int_{-\sqrt{9-4y^2}}^{\sqrt{9-4y^2}} y\,dx\,dy$

8. $\int_0^2\int_0^{4-x^2} 2x\,dy\,dx$

İki Katlı İntegralleri Hesaplamak

9–12 problemlerindeki integralleri hesaplayın.

9. $\int_0^1\int_{2y}^2 4\cos(x^2)\,dx\,dy$

10. $\int_0^2\int_{y/2}^1 e^{x^2}\,dx\,dy$

11. $\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\,dx}{y^4+1}$

12. $\int_0^1\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \frac{2\pi\sin\pi x^2}{x^2}\,dx\,dy$

Alan ve Hacimler

13. Doğru ve parabol arasındaki alan xy-düzleminde $y = 2x + 4$ doğrusu ve $y = 4 - x^2$ parabolü ile sınırlı bölgenin alanını bulun.

14. Doğrular ve parabol ile sınırlı alan xy-düzleminde sağdan $y = x^2$ parabolü, soldan $x + y = 2$ doğrusu ve üstten $y = 4$ doğrusuyla sınırlı "üçgensel" bölgenin alanını bulun.

15. Bir paraboloidin altındaki bölgenin hacmi xy-düzleminde $y = x$, $x = 0$ ve $x + y = 2$ doğrularıyla çevrili üçgenin üzerinde ve $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin altında kalan hacmi bulun.

16. Bir parabolik silindirin altındaki bölgenin hacmi xy-düzleminde $y = 6 - x^2$ parabolü ve $y = x$ doğrusuyla çevrili bölgenin üzerinde ve $z = x^2$ parabolik silindirinin altında kalan hacmi bulun.

Ortalama Değerler

$f(x, y) = xy$'nin Problem 17 ve 18'de verilen bölgelerdeki ortalama değerini bulun.

17. Birinci bölgede $x = 1$, $y = 1$ doğrularıyla sınırlı kare.

18. Birinci bir bölgede $x^2 + y^2 \le 1$ çeyrek dairesi.

Kütleler ve Momentler

19. Merkez xy-düzleminde $x = 2$, $y = 2$ doğruları ve $xy = 2$ hiperbolü ile sınırlı "üçgensel" bölgenin merkezini bulun.

20. Merkez xy-düzleminde $x + y^2 - 2y = 0$ parabolü ve $x + 2y = 0$ doğrusu arasında kalan bölgenin merkezini bulun.

21. Kutupsal moment y-ekseni ve xy-düzleminde $y = 2x$ ve $y = 4$ doğrularıyla sınırlı sabit $\delta = 3$ yoğunluklu ince bir üçgen levhanın orijin etrafındaki kutupsal eylemsizlik momentini bulun.

22. Kutupsal moment Aşağıdaki doğrularla sınırlı sabit $\delta = 1$ yoğunluklu dikdörtgen levhanın merkezi etrafındaki kutupsal eylemsizlik momentini bulun.

a. xy-düzleminde $x = \pm 2$, $y = \pm 1$

b. xy-düzleminde $x = \pm a$, $y = \pm b$

(*İpucu:* I_x'i bulun. Sonra I_x formülünden I_y'yi bulun ve ikisini toplayarak I_0'ı bulun).

23. Eylemsizlik momenti ve jirasyon yarıçapı xy-düzleminde köşeleri (0, 0), (3, 0) ve (3, 2)'de olan üçgen bölgeyi kaplayan sabit δ yoğunluklu plakanın x-ekseni etrafındaki eylemsizlik momenti ile jirasyon yarıçapını bulun.

24. Değişken yoğunluklu plaka Yoğunluğu $\delta(x, y) = x + 1$ ise, xy-düzleminde $y = x$ doğrusu ve $y = x^2$ parabolüyle sınırlanan ince bir plakanın kütle merkezini ve koordinat eksenleri etrafındaki eylemsizlik momentleri ile jirasyon yarıçaplarını bulun.

25. Değişken yoğunluklu plaka Yoğunluğu $\delta(x, y) = x^2 + y^2 + 1/3$ ise, xy-düzleminde $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ doğrularıyla sınırlı ince kare plakanın kütlesini ve koordinat eksenleri etrafındaki birinci momentlerini bulun.

26. Aynı eylemsizlik momentli ve jirasyon yarıçaplı üçgenler Tabanı x-ekseni üzerindeki [0, b] aralığında bulunan ve tepe noktası x-ekseninin üst tarafında $y = h$ doğrusu üzerinde olan sabit δ yoğunluklu ince üçgen plakanın x-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentini ve jirasyon yarıçapını bulun. Göreceğiniz gibi, bu tepe noktasının nerede olduğu önemli değildir. Bu çeşit bütün üçgenlerin eylemsizlik momentleri ve jirasyon yarıçapları aynıdır.

Kutupsal Koordinatlar

27 ve 28 problemlerindeki integralleri kutupsal koordinatlara dönüştürerek hesaplayın.

27. $\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2\,dy\,dx}{(1+x^2+y^2)^2}$

28. $\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)\,dx\,dy$

29. Merkez Kutupsal koordinat düzleminde $0 \le r \le 3$, $-\pi/3 \le \theta \le \pi/3$ eşitsizlikleriyle tanımlanan bölgenin merkezini bulun.

30. Merkez Birinci dörtte bir bölgede, $\theta = 0$ ve $\theta = \pi/2$ ışınları ile $r = 1$ ve $r = 3$ çemberleri arasında kalan bölgenin merkezini bulun.

31. a. Merkez Kutupsal koordinat düzleminde $r = 1 + \cos\theta$ kardioidinin içinde ve $r = 1$ çemberinin dışında kalan bölgenin merkezini bulun.

b. Bölgeyi çizin ve merkezi çiziminizde gösterin.

32. a. Merkez Kutupsal koordinat düzleminde $0 \le r \le a$, $-\alpha \le \theta \le \alpha$ $(0 \le \alpha \le \pi)$ eşitsizlikleriyle tanımlanan bölgenin merkezini bulun. $\alpha \to \pi^-$ için merkez nasıl hareket eder?

b. $\alpha = 5\pi/6$ için bölgeyi çizin ve merkezi çiziminizde belirtin.

33. Lemniskat üzerinde integrasyon $f(x, y) = 1/(1 + x^2 + y^2)^2$ fonksiyonunu $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$ lemniskatının bir döngüsü üzerinde integre edin.

34. $f(x, y) = 1/(1 + x^2 + y^2)^2$'yi aşağıdaki bölgelerde integre edin.

a. Üçgensel bölge köşeleri (0, 0), (1, 0), $(1, \sqrt{3})$'te olan üçgen

b. Birinci bölge xy-düzleminin birinci dörtte bir bölgesi

Kartezyen Koordinatlarda Üç Katlı İntegraller

35–38 problemlerindeki integralleri hesaplayın.

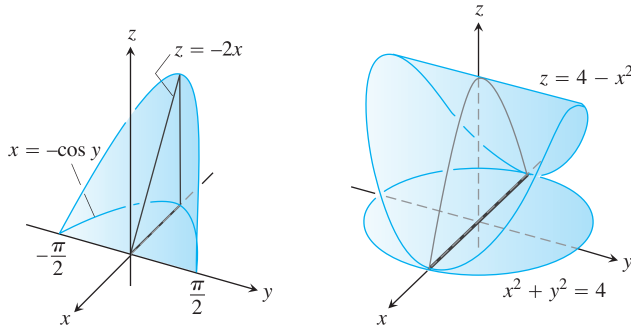
35. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x + y + z)\, dx\, dy\, dz$

36. $\displaystyle\int_{\ln 6}^{\ln 7}\int_0^{\ln 2}\int_{\ln 4}^{\ln 5} e^{(x+y+z)}\, dz\, dy\, dx$

37. $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{x^2}\int_0^{x+y} (2x - y - z)\, dz\, dy\, dx$

38. $\displaystyle\int_1^{e}\int_1^{x}\int_0^{z} \frac{2y}{z^3}\, dy\, dz\, dx$

39. Hacim Yanlardan $x = -\cos y$, $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ silindiri, üstten $z = -2x$ düzlemi ve alttan xy-düzlemiyle sınırlı takoz şekilli bölgenin hacmini bulun.



40. Hacim Üstten $z = 4 - x^2$ silindiri, yanlardan $x^2 + y^2 = 4$ silindiri ve alttan xy-düzlemiyle sınırlı cismin hacmini bulun.

41. Ortalama değer $f(x, y, z) = 30xz\sqrt{x^2 + y}$'nin birinci sekizde bir bölgede koordinat düzlemleri ve $x = 1$, $y = 3$, $z = 1$ düzlemleriyle sınırlı bölgede ortalama değerini bulun.

42. Ortalama değer ρ'nun $\rho \le a$ (küresel koordinatlar) küresi üzerindeki ortalama değerini bulun.

Silindirik ve Küresel Koordinatlar

43. Silindirikten kartezyen koordinatlara

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_r^{\sqrt{4-r^2}} 3\, dz\, r\, dr\, d\theta, \qquad r \ge 0$$

integralini **(a)** integrasyon sırası $dz\, dx\, dy$ olmak üzere Kartezyen koordinatlara ve **(b)** küresel koordinatlara dönüştürün. Sonra **(c)** integrallerden birini hesaplayın.

44. Kartezyenden silindirik koordinatlara **(a)** Silindirik koordinatlara dönüştürün. Sonra **(b)** integrali hesaplayın.

$$\int_0^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-(x^2+y^2)}^{(x^2+y^2)} 21xy^2\, dz\, dy\, dx$$

45. Kartezyenden küresel koordinatlara **(a)** Küresel koordinatlara dönüştürün. Sonra **(b)** integrali hesaplayın.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dz\, dy\, dx$$

46. Kartezyen, silindirik ve küresel koordinatlar $f(x, y, z) = 6 + 4y$'nin birinci sekizde bir bölgede $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi, $x^2 + y^2 = 1$ silindiri ve koordinat düzlemleriyle sınırlı bölgedeki integrali için **(a)** Kartezyen koordinatlarda, **(b)** silindirik koordinatlarda, **(c)** küresel koordinatlarda üç katlı ardışık birer integral yazın. Sonra **(d)** f'nin integralini bu üç katlı integrallerden birini hesaplayarak bulun.

47. Silindirikten kartezyen koordinatlara Kartezyen koordinatlarda,

$$\int_0^{\pi/2}\int_1^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-r^2}} r^3(\sin\theta\cos\theta)z^2\, dz\, dr\, d\theta.$$

integraline eşdeğer bir integral yazın. İntegrasyon sırasını önce z, sonra y, sonra da x olacak şekilde düzenleyin.

48. Kartezyenden silindirik koordinatlara Bir cismin hacmi aşağıdaki gibidir:

$$\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx.$$

a. Sınırını oluşturan yüzeylerin denklemlerini vererek cismi tanımlayın.

b. İntegrali silindirik koordinatlara dönüştürün, ama integrali hesaplamayın.

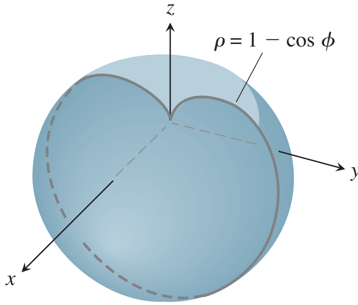
49. Küresele karşı silindirik koordinatlar Küresel şekiller içeren üç katlı integraller, uygun hesaplama için her zaman küresel koordinatları gerektirmez. Bazı hesaplamalar silindirik koordinatlarda daha kolay yapılabilir. Örnek olarak, üstten $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ küresi

ve alttan $z = 2$ düzlemi ile sınırlı bölgenin hacmini **(a)** silindirik koordinatlar, **(b)** küresel koordinatlar kullanarak hesaplayın.

50. Küresel koordinatlarda I_z bulmak Üstten $\rho = 2$ küresi ve alttan $\phi = \pi/3$ konisi (küresel koordinatlar) ile sınırlı sabit $\delta = 1$ yoğunluklu cismin z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentini bulun.

51. "Kalın" bir kürenin eylemsizlik momentini bulmak a ve b yarıçaplı ($a < b$) iki eşmerkezli küre ile sınırlı sabit δ yoğunluklu bir cismin bir çap etrafındaki eylemsizlik momentini bulun.

52. Bir elmanın eylemsizlik momenti Küresel koordinatlarda $\rho = 1 - \cos\phi$ yüzeyi ile çevrili $\delta = 1$ yoğunluklu katı cismin z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentini bulun. Cisim, aşağıdaki şekilde renkli eğrinin z-ekseni etrafında döndürülmesi ile elde edilir.



Değişken Dönüşümleri

53. $u = x - y$ ve $v = y$ ise,

$$\int_0^\infty \int_0^x e^{-sx} f(x - y, y)\, dy\, dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u, v)\, du\, dv$$

olduğunu gösterin.

54.

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\, dx\, dy = 1$$

olmasını sağlamak için a, b ve c arasında nasıl bir ilişki olmalıdır? (*İpucu*: $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = ac - b^2$ olmak üzere $s = ax + \beta y$ ve $t = \gamma x + \delta y$ olsun. Bu durumda, $ax^2 + 2bxy + cy^2 = s^2 + t^2$ olur.)

Bölüm 15 Ek ve İleri Alıştırmalar

Hacimler

1. Kum tepesi: İki ve üç katlı integraller Bir kum tepesinin tabanı xy-düzleminde $x^2 + y = 6$ parabolü ve $y = x$ doğrusuyla sınırlı bölgeyi kaplamaktadır. (x, y) noktasının üzerindeki kumun yüksekliği x^2'dir. Kumun hacmini **(a)** iki katlı bir integral, **(b)** üç katlı bir integral olarak ifade edin. Sonra **(c)** hacmi bulun.

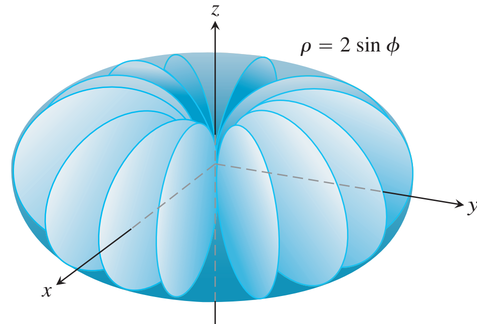
2. Yarım küre şeklilli kap içindeki su 5 cm yarıçaplı yarım küre şekilli bir kap tepesine 3 cm kalana kadar suyla doldurulmuştur. Kaptaki suyun hacmini bulun.

3. İki düzlem arasında silindirik katı bölge $x^2 + y^2 \le 1$ katı (içi dolu) silindirinin $z = 0$ ve $x + y + z = 2$ düzlemleri arasında kalan kısmının hacmini bulun.

4. Küre ve paraboloid Üstten $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ küresi ve alttan $z = x^2 + y^2$ paraboloidiyle sınırlı bölgenin hacmini bulun.

5. İki paraboloid Üstten $z = 3 - x^2 - y^2$ paraboloidi ve alttan $z = 2x^2 + 2y^2$ paraboloidi ile sınırlı bölgenin hacmini bulun.

6. Küresel koordinatlar Küresel koordinatlarda $\rho = 2\sin\phi$ yüzeyi ile çevrili bölgenin hacmini bulun (Şekle bakın).



7. Kürede delik Bir katı (içi dolu) küreye dairesel silindirik bir delik delinmiştir. Deliğin ekseni kürenin bir çapıdır. Kalan cismin hacmi

$$V = 2\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} r\, dr\, dz\, d\theta$$

dir.

a. Deliğin ve kürenin yarıçaplarını bulun.

b. İntegrali hesaplayın.

8. Küre ve silindir $r^2 + z^2 \le 9$ küresinden $r = 3\sin\theta$ silindiriyle kesilen malzemenin hacmini bulun.

9. İki paraboloid $z = x^2 + y^2$ ve $z = (x^2 + y^2 + 1)/2$ yüzeyleriyle çevrili bölgenin hacmini bulun.

10. Silindir ve yüzey $z = xy$ Birinci sekizde bir bölgede $r = 1$ ve $r = 2$ silindirleri arasında bulunan ve alttan xy-düzlemi, üstten $z = xy$ yüzeyi ile sınırlı bölgenin hacmini bulun.

İntegrasyon Sırasını Değiştirmek

11. Aşağıdaki integrali hesaplayın

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx$$

(*İpucu:* İki katlı bir integral oluşturmak için

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy}\, dy$$

bağıntısını kullanın ve integrasyon sırasını değiştirerek integrali hesaplayın.)

12. a. Kutupsal koordinatlar Kutupsal koordinatlara geçerek, $a > 0$ ve $0 < \beta < \pi/2$ olmak üzere

$$\int_0^{a \sin\beta} \int_{y \cot\beta}^{\sqrt{a^2 - y^2}} \ln(x^2 + y^2)\, dx\, dy = a^2\beta\left(\ln a - \frac{1}{2}\right)$$

olduğunu gösterin.

b. Kartezyen integralin integrasyon sırasını değiştirerek yeniden yazın.

13. İki katlı bir integrali tek kata indirgemek İntegrasyon sırasını değiştirerek, aşağıdaki iki katlı integralin tek katlı bir integrale indirgenebileceğini gösterin:

$$\int_0^x \int_0^u e^{m(x-t)} f(t)\, dt\, du = \int_0^x (x - t)e^{m(x-t)} f(t)\, dt$$

Aynı şekilde,

$$\int_0^x \int_0^v \int_0^u e^{m(x-t)} f(t)\, dt\, du\, dv = \int_0^x \frac{(x - t)^2}{2} e^{m(x-t)} f(t)\, dt$$

olduğu gösterilebilir.

14. İki katlı bir integrali sabit sınırlar elde etmek üzere dönüştürmek Bazen, sınırları değişken olan çok katlı bir integral, sınırları sabit olan bir integrale dönüştürülebilir. İntegrasyon sırasını değiştirerek, aşağıdaki bağıntıyı gösterin.

$$\int_0^1 f(x)\left(\int_0^x g(x - y)f(y)\, dy\right) dx$$
$$= \int_0^1 f(y)\left(\int_y^1 g(x - y)f(x)\, dx\right) dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^1 g(|x - y|)f(x)f(y)\, dx\, dy.$$

Kütle ve Momentler

15. Kutupsal eylemsizlik momentini minimize etmek Sabit yoğunluklu ince bir plaka xy-düzleminin birinci dörtte bir bölgesinde, köşeleri $(0, 0)$, $(a, 0)$ ve $(a, 1/a)$'da olan üçgen bir bölgeyi kaplamaktadır. Hangi a değeri plakanın orijin etrafındaki kutupsal eylemsizlik momentini minimize eder?

16. Üçgensel bir plakanın kutupsal eylemsizlik momenti y-ekseni ve xy-düzleminde $y = 2x$ ve $y = 4$ doğrularıyla sınırlı, sabit $\delta = 3$ yoğunluklu ince üçgen bir plakanın orijin etrafındaki kutupsal eylemsizlik momentini bulun.

17. Bir volanın denge ağırlığının kütlesi ve kutupsal eylemsizlik momenti Sabit $\delta = 1$ yoğunluklu bir volanın denge ağırlığı a yarıçaplı bir daireden, merkezden b kadar uzaktaki ($b < a$) bir kirişle kesilen küçük parça şeklindedir. Denge ağırlığının kütlesini ve volanın merkezi etrafındaki kutupsal eylemsizlik momentini bulun.

18. Bir bumerangın merkezi xy-düzleminde $y^2 = -4(x - 1)$ ve $y^2 = -2(x - 2)$ parabolleri arasındaki bumerang şekilli bölgenin merkezini bulun.

Teori ve Uygulamalar

19. a ve b pozitif sayılar ve

$$\max(b^2x^2, a^2y^2) = \begin{cases} b^2x^2 & b^2x^2 \geq a^2y^2 \text{ ise} \\ a^2y^2 & b^2x^2 < a^2y^2 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\int_0^a \int_0^b e^{\max(b^2x^2,\, a^2y^2)}\, dy\, dx,$$

integralini hesaplayın.

20. $x_0 \leq x \leq x_1$, $y_0 \leq y \leq y_1$ dikdörtgeni üzerinde

$$\iint \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy$$

integralinin sonucunun

$$F(x_1, y_1) - F(x_0, y_1) - F(x_1, y_0) + F(x_0, y_0)$$

olduğunu gösterin.

21. $f(x, y)$'nin x'in bir fonksiyonu ile y'nin bir fonksiyonun çarpımı $f(x, y) = F(x)G(y)$ şeklinde yazılabileceğini varsayın. Bu durumda f'nin R: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ dikdörtgeni üzerindeki integrali de

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \left(\int_a^b F(x)\, dx\right)\left(\int_c^d G(y)\, dy\right) \quad (1)$$

formülüyle bir çarpım olarak hesaplanabilir. Mantık yürütme şu şekildedir:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \left(\int_a^b F(x)G(y)\, dx\right) dy \quad \text{(i)}$$
$$= \int_c^d \left(G(y)\int_a^b F(x)\, dx\right) dy \quad \text{(ii)}$$
$$= \int_c^d \left(\int_a^b F(x)\, dx\right) G(y)\, dy \quad \text{(iii)}$$
$$= \left(\int_a^b F(x)\, dx\right)\int_c^d G(y)\, dy\,. \quad \text{(iv)}$$

a. (i)-(v) adımlarının nedenlerini açıklayın.

Geçerli olduğunda, (1) denklemi zamandan tasarruf sağlar. Aşağıdaki integralleri hesaplamak için (1) denklemini kullanın.

b. $\int_0^{\ln 2}\int_0^{\pi/2} e^x \cos y\,dy\,dx$ **c.** $\int_1^2\int_{-1}^1 \frac{x}{y^2}\,dx\,dy$

22. $D_{\mathbf{u}}f$, $f(x, y) = (x^2 + y^2)/2$'nin $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ birim vektörü yönündeki doğrultu türevi olsun.

a. Ortalama değer bulmak $D_{\mathbf{u}}f$'nin birinci dörtte bir bölgeden $x + y = 1$ doğrusuyla kesilmiş üçgen bölgedeki ortalama değerini bulun.

b. Ortalama değer ve merkez Genelde $D_{\mathbf{u}}f$'nin xy-düzlemindeki ortalama değerinin $D_{\mathbf{u}}f$'nin bölgenin merkezindeki değeri olduğunu gösterin.

23. $\Gamma(1/2)$'nin değeri

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt,$$

gamma fonksiyonu, faktoriyel fonksiyonunu negatif olmayan tamsayılardan diğer reel değerlere genişletir. Diferansiyel denklemler teorisinde özel yeri olan bir sayı

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{(1/2)-1} e^{-t}\,dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt \qquad (2)$$

sayısıdır.

a. Bölüm 15.3'teki Alıştırma 37'yi yapmadıysanız, yaparak

$$I = \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

olduğunu gösterin.

b. (2) denkleminde $y = \sqrt{t}$'yi alarak $\Gamma(1/2) = 2I = \sqrt{\pi}$ olduğunu gösterin.

24. Dairesel plaka üzerinde toplam elektriksel yük R metre yarıçaplı dairesel bir plaka üzerindeki elektrik yükü dağılımı $\sigma(r, \theta) = kr\,(1 - \sin\theta)$ coulomb/m^2'dir (k bir sabit). σ'yu plaka üzerinde integre ederek toplam yük Q'yu bulun.

25. Parabolik bir yağmur sarnıcı Bir çanak $z = 0$'dan $z = 10$ inçe kadar $z = x^2 + y^2$'nin grafiği şeklindedir. Çanağı kalibre edip, bir yağmur sarnıcı şekline dönüştürmek istiyorsunuz. Hangi yükseklikler 1 inç ve 3 inç yağmura karşılık gelir?

26. Bir çanak antendeki su Parabolik bir çanak anten 2 m genişliğinde ve 1/2 m derinliğindedir. Simetri ekseni dikeyden 30 derece eğiktir.

a. Kartezyen koordinatlarda çanak antenin tutacağı su miktarını veren üç katlı bir integral kurun, ama çözmeyin (*İpucu*: Koordinat sisteminizi çanak antenin "standart konumunda" ve su seviyesinin eğik olacağı şekilde yerleştirin.) (*Dikkat*: İntegrasyon sınırları "hoş" değildir).

b. Çanak antenin içinde su bulundurmayacağı en küçük eğim nedir?

27. Sonsuz bir yarım silindir D, tek yüzü orijinden 1 birim yüksekte ve ekseni (0, 0, 1)'den ∞'a kadar giden ışın olan yarım silindirin içi olsun. Silindirik koordinatlar kullanarak

$$\iiint_D z(r^2 + z^2)^{-5/2}\,dV$$

integralini hesaplayın.

28. Hiperhacim $\int_a^b 1\,dx$'in sayı doğrusu üzerindeki $[a, b]$ aralığının uzunluğu (tek boyutlu uzay), $\iint_R 1\,dA$'nın xy-düzlemindeki R bölgesinin alanı (iki boyutlu uzay) ve $\iiint_D 1\,dV$'nin üç boyutlu uzaydaki D bölgesinin hacmi (xyz-uzayı) olduğunu öğrendik. Devam edebilirdik: Q, 4-boyutlu uzayda bir bölgeyse ($xyzw$-uzayı), $\iiiint_Q 1\,dV$ Q'nun "hiperhacmi" olur. Genelleştirme yeteneklerinizi ve 4 boyutlu uzayda bir Kartezyen koordinat sistemi kullanarak 3-boyutlu $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ küresi içindeki hiperhacmi bulun.

Bölüm 15 Teknoloji Uygulama Projeleri

Mathematica / Maple Module

Şansınızı Deneyin : Üç Boyutta, Sayısal İntegrasyon İçin Monte Carlo Yöntemini deneyin

Üç boyutta, sayısal integrasyon için Monte Carlo yöntemini kullanın.

Mathematica / Maple Module

Ortalamalar ve Momentler, Yeni Çizim Yöntemleri Keşfetmek, Kısım II

Katlı integrallere ek olarak, geometrik simetriler kullanan bir formda momentler yöntemini kullanın

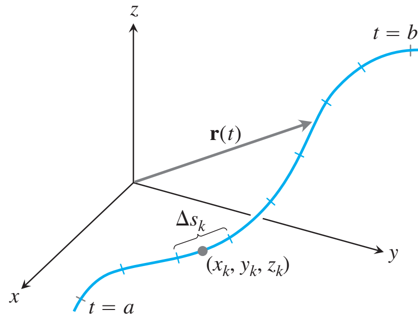
Bölüm

16 VEKTÖR ALANLARINDA İNTEGRASYON

GİRİŞ Bu bölüm vektör alanlarında integrasyonla ilgilenir. Buradaki, mühendislerin ve fizikçilerin, akışkanın akışını, su altı iletim kablolarının tasarımını, yıldızlardaki ısı akışını ve bir uyduyu yörüngeye yerleştirmeyi açıklamada kullandıkları matematiktir. Özel olarak, bir kuvvet alanının, bir cismi alan içindeki bir yol boyunca hareket ettirmekle yapmış olduğu işi bulmakta kullanılan eğrisel integralleri tanımlıyoruz. Ayrıca, yüzey integrallerini tanımlıyoruz, böylece bir yüzeyden geçen akışkanın akış oranını bulabiliriz. Bu yeni integralleri hesaplamayı, öğrenmiş olduğumuz tek katlı, iki katlı ve üç katlı integrallere bağlayarak basitleştirmek için yol boyunca, *korunmalı* kuvvet alanları ve Green Teoremi gibi anahtar fikirler ve sonuçlar geliştiriyoruz.

16.1 Eğrisel İntegraller

Bölüm 5'te, bir fonksiyonunun x-ekseninde sonlu bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerindeki belirli integralini tanımladık. Belirli integralleri, ince bir çubuğun kütlesini veya x-ekseni doğrultusunda değişken bir kuvvetin yaptığı işi bulmak için kullandık. Şimdi, düzlemde veya uzayda bir eğri üzerinde bulunan ince çubukların veya tellerin kütlelerini hesaplamak veya böyle bir eğri boyunca etkiyen değişken bir kuvvetin yaptığı işi bulmak isteyebiliriz. Bu hesaplamalar için, x-ekseninde bir doğru parçası üzerinde integralden daha genel bir "*eğrisel*" integral kavramına ihtiyaç duyarız. Aslında, düzlemde veya uzayda bir C eğrisi üzerinde integral almamız gerekir. Daha genel olan bu integrallere "*eğrisel integraller*" denir. Tanımlarımızı uzay eğrileri için yapıyoruz. xy-düzlemindeki eğriler, uzay eğrilerinin z-koordinatı özdeş olarak sıfır olan bir özel durumudur.



ŞEKİL 16.1 $t = a$'dan $t = b$'ye kadar küçük yaylara bölünmüş $\mathbf{r}(t)$ eğrisi. Tipik bir alt yayın uzunluğu Δs_k'dir.

$f(x, y, z)$ reel-değerli bir fonksiyon olsun ve f'nin tanım bölgesi içinde kalan bir $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$ eğrisi üzerinde f'yi integre etmek istiyelim. f'nin eğri üzerindeki değerleri $f(g(t), h(t), k(t))$ bileşke fonksiyonu ile verilir. Bu bileşkeyi $t = a$'dan $t = b$'ye kadar yay uzunluğuna göre integre edeceğiz. Başlamak için, önce eğriyi sonlu n sayıda alt yaylara böleriz (Şekil 16.1). Tipik alt yayın uzunluğu Δs_k'dir. Her alt yayda bir (x_k, y_k, z_k) noktası seçer ve

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta s_k$$

toplamını oluştururuz. f sürekliyse ve g, h ve k fonksiyonlarının birinci mertebe türevleri sürekli ise, n arttıkça ve Δs_k uzunlukları sıfıra yaklaştıkça, bu toplamlar bir limite ulaşırlar. Bu limite ***f*'nin eğri boyunca *a*'dan *b*'ye kadar eğrisel integrali** deriz. Eğri tek bir harfle, örneğin C ile, gösteriliyorsa, integralin gösterimi

$$\int_C f(x, y, z)\,ds \qquad \text{“}f\text{'nin } C \text{ üzerindeki integrali”} \tag{1}$$

şeklinde olur.

$\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ için düzgünse ($\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ sürekli ve hiçbir zaman $\mathbf{0}$ değil),

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{v}(\tau)|\, d\tau$$

$t_0 = a$ ile, Bölüm 13.3'teki (3) denklemi

denklemini kullanarak, (1) denklemindeki ds'yi $ds = |\mathbf{v}(t)|dt$ olarak ifade edebiliriz. İleri analizden bir teorem bu durumda f'nin C üzerindeki integralini

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t))|\mathbf{v}(t)|\, dt$$

olarak hesaplayabileceğimizi söyler. Bu son eşitliğin sağ tarafındaki integralin, Bölüm 5'te tanımladığımız ve t parametresine göre integre ettiğimiz gibi, sıradan (tek katlı) belirli bir integral olduğuna dikkat edin. Bu formül, parametrizasyon düzgün olduğu sürece, hangi parametrizasyonu kullandığımızdan bağımsız olarak, sol taraftaki eğrisel integrali doğru olarak hesaplayacaktır.

Bir Eğrisel İntegral Nasıl Hesaplanır

Sürekli bir $f(x, y, z)$ fonksiyonunu bir C eğrisi üzerinde integre etmek için:

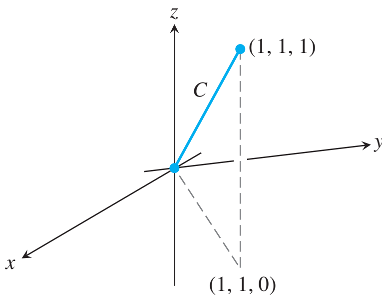
1. C'nin düzgün bir parametrizasyonunu bulun:

$$\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}, \qquad a \leq t \leq b$$

2. İntegrali aşağıdaki gibi hesaplayın:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t))|\mathbf{v}(t)|\, dt \qquad (2)$$

f'nin değeri sabit ve 1 ise, f'nin C üzerindeki integrali C'nin uzunluğunu verir.



ŞEKİL 16.2 Örnek 1'deki integrasyonun yolu.

ÖRNEK 1 Bir Eğrisel İntegral Hesaplamak

$f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$'yi orijinle (1, 1, 1) noktasını birleştiren c doğru parçası boyunca integre edin (Şekil 16.2).

Çözüm Düşünebileceğimiz en basit parametrizasyonu seçeriz:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Bileşenlerin birinci mertebe türevleri süreklidir ve $|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ hiçbir zaman sıfır olmaz, dolayısıyla parametrizasyon düzgündür. f'nin C üzerindeki integrali

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_0^1 f(t, t, t)\left(\sqrt{3}\right) dt \qquad \text{(2) denklemi}$$

$$= \int_0^1 (t - 3t^2 + t)\sqrt{3}\, dt$$

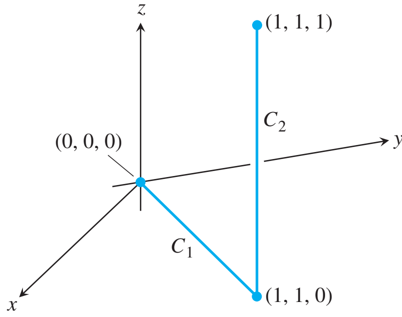
$$= \sqrt{3}\int_0^1 (2t - 3t^2)\, dt = \sqrt{3}\left[t^2 - t^3\right]_0^1 = 0$$

bulunur.

Toplanabilirlik

Eğrisel integrallerin, bir C eğrisi sonlu sayıda $C_1, C_2, \ldots, C_n$ eğrilerinin arka arkaya eklenmesi ile oluşmuşsa, bir fonksiyonun C üzerindeki integralinin eğriyi oluşturan eğriler üzerindeki integrallerinin toplamına eşit olması gibi yararlı bir özelliği vardır:

$$\int_C f\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds + \cdots + \int_{C_n} f\,ds. \tag{3}$$



ŞEKİL 16.3 Örnek 2'deki integrasyonun yolu.

ÖRNEK 2 Birleştirilmiş İki Yol İçin Eğrisel İntegral

Şekil 16.3, orijinden (1, 1, 1)'e giden başka bir yolu, C_1 ve C_2 doğrularının birleşimini göstermektedir. $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$'yi $C_1 \cup C_2$ üzerinde integre edin.

Çözüm C_1 ve C_2 için, hız vektörlerinin boylarını da kontrol ederek, düşünebileceğimiz en basit parametrizasyonu seçeriz:

$$C_1: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1; \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$C_2: \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1; \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

Bu parametrizasyonlarla,

$$\begin{aligned}
\int_{C_1 \cup C_2} f(x, y, z)\,ds &= \int_{C_1} f(x, y, z)\,ds + \int_{C_2} f(x, y, z)\,ds && \text{(3) denklemi} \\
&= \int_0^1 f(t, t, 0)\sqrt{2}\,dt + \int_0^1 f(1, 1, t)(1)\,dt && \text{(2) denklemi} \\
&= \int_0^1 (t - 3t^2 + 0)\sqrt{2}\,dt + \int_0^1 (1 - 3 + t)(1)\,dt \\
&= \sqrt{2}\left[\frac{t^2}{2} - t^3\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - 2t\right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

buluruz.

Örnek 1 ve 2'deki integrasyonlarla ilgili üç şeye dikkat edin. Birincisi, uygun eğrinin bileşenleri f'nin formülüne yerleştirilir yerleştirilmez, integrasyon t'ye göre normal bir integrasyon halini alır. İkincisi, f'nin $C_1 \cup C_2$ üzerindeki integrali, f'nin yolun her kesimi üzerindeki integrali alınıp, sonuçların toplanması ile elde edilir. Üçüncüsü, f'nin C ve $C_1 \cup C_2$ üzerinden integrallerinin değerleri farklıdır. Çoğu fonksiyon için, iki noktayı birleştiren bir eğri üzerindeki integral, yol değiştirilirse değişir. Ancak, bazı fonksiyonlar için değer, Bölüm 16.3'te göreceğimiz gibi, aynı kalır.

Kütle ve Moment Hesaplamaları

Sarmal yaylara ve tellere uzayda düzgün eğriler boyunca dağılmış kütleler olarak bakacağız. Dağılım sürekli bir $\delta(x, y, z)$ yoğunluk fonksiyonuyla (birim uzunluk başına kütle) tanımlanmaktadır. Yayın veya telin kütlesi, kütle merkezi ve momentleri Tablo 16.1'de verilen formüllerle hesaplanır. Formüller ince çubuklara da uygulanabilir.

TABLO 16.1 Uzayda düzgün bir C eğrisi üzerinde bulunan sarmal yaylar, ince çubuklar ve tellerin kütle ve moment formülleri

Kütle: $M = \int_C \delta(x, y, z)\, ds \qquad (\delta = \delta(x, y, z) = \text{yoğunluk})$

Koordinat düzlemleri etrafındaki birinci momentler:

$$M_{yz} = \int_C x\, \delta\, ds, \qquad M_{xz} = \int_C y\, \delta\, ds, \qquad M_{xy} = \int_C z\, \delta\, ds$$

Kütle merkezinin koordinatları:

$$\bar{x} = M_{yz}/M, \qquad \bar{y} = M_{xz}/M, \qquad \bar{z} = M_{xy}/M$$

Eksenler ve diğer doğrular etrafındaki eylemsizlik momentleri:

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\, \delta\, ds, \qquad I_y = \int_C (x^2 + z^2)\, \delta\, ds$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\, \delta\, ds, \qquad I_L = \int_C r^2\, \delta\, ds$$

$r(x, y, z) = (x, y, z)$ noktasından L doğrusuna olan uzaklık

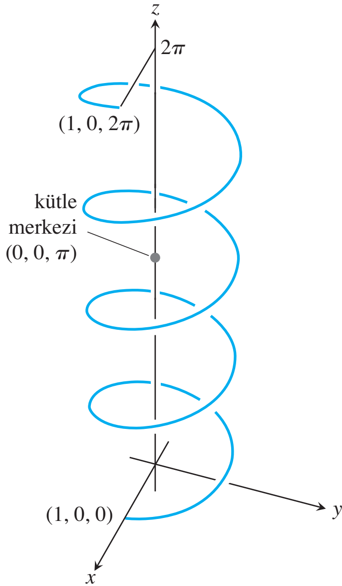
Bir L doğrusu etrafında jirasyon yarıçapı: $R_L = \sqrt{I_L/M}$

ÖRNEK 3 Kütle, Kütle Merkezi, Eylemsizlik Momenti, Jirasyon Yarıçapı Bulmak

Bir yay

$$\mathbf{r}(t) = (\cos 4t)\mathbf{i} + (\sin 4t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

helisi üzerinde bulunmaktadır. Yayın yoğunluğu sabittir, $\delta = 1$. Yayın kütlesini, kütle merkezini ve z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momenti ile jirasyon yarıçapını bulun.



ŞEKİL 16.4 Örnek 3'teki helis şeklinde yay.

Çözüm Yayı çizeriz (Şekil 16.4). Bulunan simetriler yüzünden, kütle merkezi z-ekseni üzerinde $(0, 0, \pi)$ noktasında bulunur.

Kalan hesaplamalar için, önce $|\mathbf{v}(t)|$'yi buluruz:

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(-4 \sin 4t)^2 + (4 \cos 4t)^2 + 1} = \sqrt{17}.$$

Sonra, (2) denklemini kullanarak Tablo 16.1'deki formülleri hesaplarız:

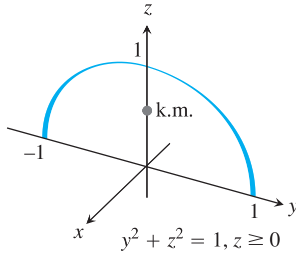
$$M = \int_{\text{Helis}} \delta\, ds = \int_0^{2\pi} (1)\sqrt{17}\, dt = 2\pi\sqrt{17}$$

$$I_z = \int_{\text{Helis}} (x^2 + y^2)\delta\, ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 4t + \sin^2 4t)(1)\sqrt{17}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{17}\, dt = 2\pi\sqrt{17}$$

$$R_z = \sqrt{I_z/M} = \sqrt{2\pi\sqrt{17}/(2\pi\sqrt{17})} = 1$$

z-ekseni etrafındaki jirasyon yarıçapının helisin etrafında döndüğü silindirin yarıçapı olduğuna dikkat edin. ■



ŞEKİL 16.5 Örnek 4, değişken yoğunluklu dairesel bir yayın kütle merkezinin nasıl bulunacağını gösterir.

ÖRNEK 4 Bir Yayın Kütle Merkezini Bulmak

Alt tarafı üst tarafından daha yoğun olan ince bir metal yay yz-düzleminde $y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, yarım çemberinin üzerinde bulunmaktadır (Şekil 16.5). Yay üzerindeki (x, y, z) noktasında yoğunluk $\delta(x, y, z) = 2 - z$ ise, yayın kütle merkezini bulun.

Çözüm Yay, kütlesi z-eksenine göre simetrik dağılmış şekilde yz-düzleminde bulunduğu için $\bar{x} = 0$ ve $\bar{y} = 0$ olduğunu biliyoruz. $\bar{z}$'yi bulmak için, çemberi

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}, \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

olarak parametreleriz. Bu parametreleme ile

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

bulunur. Bu durumda, Tablo 16.1'deki formüller

$$M = \int_C \delta\, ds = \int_C (2 - z)\, ds = \int_0^{\pi} (2 - \sin t)(1)\, dt = 2\pi - 2$$

$$M_{xy} = \int_C z\delta\, ds = \int_C z(2 - z)\, ds = \int_0^{\pi} (\sin t)(2 - \sin t)\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (2 \sin t - \sin^2 t)\, dt = \frac{8 - \pi}{2}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{8 - \pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi - 2} = \frac{8 - \pi}{4\pi - 4} \approx 0.57$$

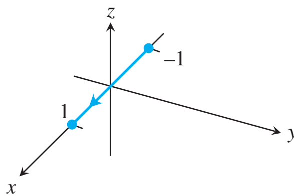
verir. Yüzde bir hassaslıkla, $\bar{z}$ kütle merkezi (0, 0, 0.57)'dedir. ■

ALIŞTIRMALAR 16.1

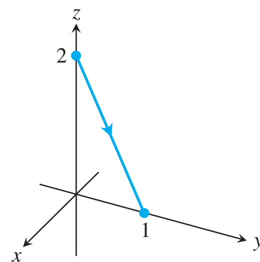
Vektör Denklemlerin Grafikleri

1–8 alıştırmalarındaki vektör denklemleri (a)-(h)'deki grafiklerle eşleştirin.

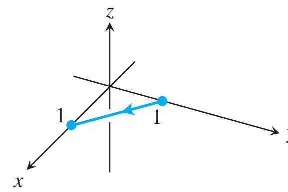
a.



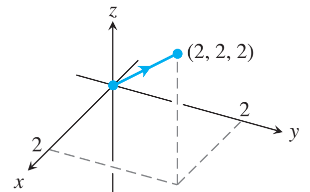
b.



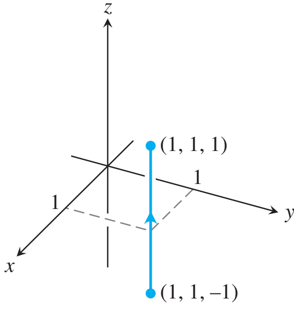
c.



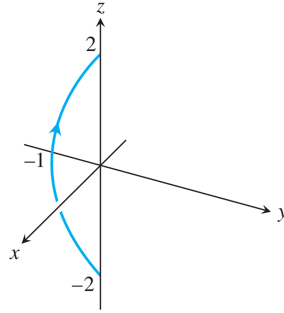
d.



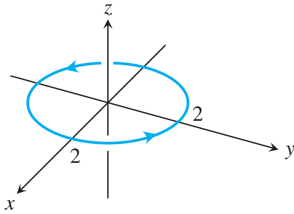
e.



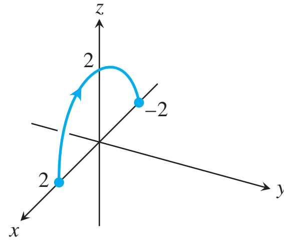
f.



g.



h.



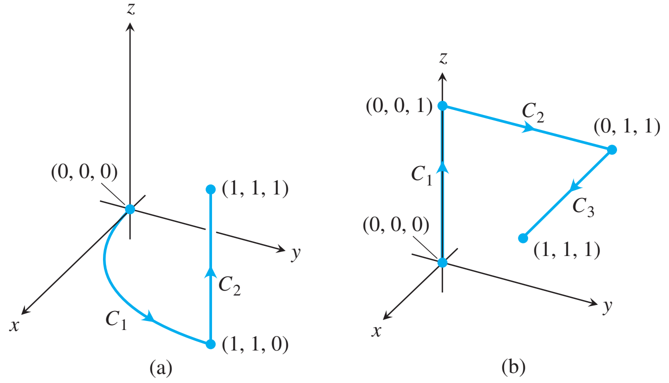
1. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$
2. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad -1 \le t \le 1$
3. $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$
4. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}, \quad -1 \le t \le 1$
5. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2$
6. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + (2 - 2t)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$
7. $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad -1 \le t \le 1$
8. $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

Uzay Eğrileri Üzerinde Eğrisel İntegraller Hesaplamak

9. C, (0, 1, 0)'dan (1, 0, 0)'a giden $x = t,\ y = (1 - t),\ z = 0$ doğru parçası olmak üzere, $\int_C (x + y)\, ds$'yi hesaplayın.
10. C, (0, 1, 1)'den (1, 0, 1)'e giden $x = t,\ y = (1 - t),\ z = 1$ doğru parçası olmak üzere, $\int_C (x - y + z - 2)\, ds$'yi hesaplayın.
11. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2 - 2t)\mathbf{k},\ 0 \le t \le 1$, eğrisi üzerinde $\int_C (xy + y + z)\, ds$'yi hesaplayın.
12. $\mathbf{r}(t) = (4\cos t)\mathbf{i} + (4\sin t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k},\ -2\pi \le t \le 2\pi$, eğrisi üzerinde $\int_C \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$'yi hesaplayın.
13. $f(x, y, z) = x + y + z$'nin (1, 2, 3)'ten (0, –1, 1)'e giden doğru parçası üzerindeki eğrisel integralini bulun.
14. $f(x, y, z) = \sqrt{3}/(x^2 + y^2 + z^2)$'nin $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $1 \le t \le \infty$, eğrisi üzerindeki eğrisel integralini bulun.
15. $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$'yi (0,0,0)'dan (1,1,1)'e (Şekil 16.6a)

$$C_1:\quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$$
$$C_2:\quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$$

ile verilen yol üzerinde integre edin.



ŞEKİL 16.6 15 ve 16 alıştırmalarındaki integrasyon yolları.

16. $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$'yi (0,0,0)'dan (1,1,1)'e (Şekil 16.6b)

$$C_1:\quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$$
$$C_2:\quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$$
$$C_3:\quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$$

ile verilen yol üzerinde integre edin.

17. $f(x, y, z) = (x + y + z)/(x^2 + y^2 + z^2)$'yi $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 < a \le t \le b$, eğrisi üzerinde integre edin.
18. $f(x, y, z) = -\sqrt{x^2 + z^2}$'yi

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{j} + (a\sin t)\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

çemberi üzerinde integre edin.

Düzlem Eğrileri Üzerinde Eğrisel İntegraller

19–22 alıştırmalarında f'yi verilen eğri üzerinde integre edin.

19. $f(x, y) = x^3/y, \quad C:\ y = x^2/2, \quad 0 \le x \le 2$
20. $f(x, y) = (x + y^2)/\sqrt{1 + x^2}$, C: $(1, 1^2/2)$'den (0, 0)'a kadar $y = x^2/2$
21. $f(x, y) = x + y$, C: Birinci dörtte bir bölgede (2, 0)'dan (0, 2)'ye kadar $x^2 + y^2 = 4$
22. $f(x, y) = x^2 - y$, C: Birinci dörtte bir bölgede (0, 2)'den $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$'ye kadar $x^2 + y^2 = 4$

Kütle ve Momentler

23. **Bir telin kütlesi** Yoğunluğu $\delta = (3/2)t$ ise, $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$ eğrisi üzerinde bulunan bir telin kütlesini bulun.
24. **Eğrisel bir telin kütle merkezi** $\delta(x, y, z) = 15\sqrt{y + 2}$ yoğunluklu bir tel $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $-1 \le t \le 1$, eğrisinin üzerindedir. Kütle merkezini bulun. Sonra eğriyi ve kütle merkezini birlikte çizin.
25. **Değişken yoğunluklu bir telin kütle merkezi** Yoğunluğu **(a)** $\delta = 3t$ ve **(b)** $\delta = 1$ ise, $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + \sqrt{2}t\mathbf{j} + (4 - t^2)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$, eğrisinin üzerindeki ince bir telin kütlesini bulun.

26. Değişken yoğunluklu bir telin kütle merkezi Yoğunluğu $\delta = 3\sqrt{5+t}$ ise, $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (2/3)t^{3/2}\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$, eğrisinin üzerindeki ince bir telin kütle merkezini bulun.

27. Bir tel kasnağın eylemsizlik momenti ve jirasyon yarıçapı Sabit δ yoğunluklu dairesel telden bir kasnak xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = a^2$ çemberinin üzerindedir. Kasnağın z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momenti ve jirasyon yarıçapını bulun.

28. İnce bir çubuğun eylemsizliği ve jirasyon yarıçapı Sabit yoğunluklu ince bir çubuk yz-düzlemindeki $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + (2-2t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$, doğru parçasının üzerindedir. Çubuğun üç koordinat ekseni etrafındaki eylemsizlik momentleri ve jirasyon yarıçaplarını bulun.

29. Sabit yoğunluklu iki yay Sabit δ yoğunluklu bir yay aşağıdaki helisin üzerindedir.

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

a. I_z ve R_z'yi bulun.

b. Elinizde (a)'daki telin iki katı uzunluğunda ve helis üzerinde $0 \le t \le 4\pi$ aralığında bulunan sabit δ yoğunluğunda başka bir yay olduğunu varsayın. I_z ve R_z'nin uzun yay için de kısa yayınkilerle aynı olmasını mı beklersiniz, yoksa farklı mı olmalıdırlar? Tahminlerinizi, uzun yay için I_z ve R_z'yi hesaplayarak kontrol edin.

30. Sabit yoğunluklu bir tel Sabit $\delta = 1$ yoğunluklu bir tel

$$\mathbf{r}(t) = (t\cos t)\mathbf{i} + (t\sin t)\mathbf{j} + \left(2\sqrt{2}/3\right)t^{3/2}\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

eğrisi üzerindedir. $\bar{z}$, I_z ve R_z'yi bulun.

31. Örnek 4'teki yay Örnek 4'teki yay için I_x ve R_x'i bulun.

32. Değişken yoğunluk ile kütle merkezi, eylemsizlik momentleri ve jirasyon yarıçapları Yoğunluğu $\delta = 1/(t+1)$ ise,

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2,$$

eğrisi üzerinde bulunan ince bir telin kütle merkezini ve koordinat eksenleri etrafındaki eylemsizlik momentleri ile jirasyon yarıçaplarını bulun.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Eğrisel İntegralleri Sayısal Olarak Hesaplamak

33–36 alıştırmalarında, eğrisel integralleri aşağıdaki adımları gerçekleştirerek hesaplamak için bir BCS kullanın.

a. $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$ yolu için $ds = |\mathbf{v}(t)|\,dt$'yi bulun.

b. $f(g(t), h(t), k(t))|\mathbf{v}(t)|$ integrandını t parametresinin bir fonksiyonu olarak ifade edin.

c. Metindeki (2) denklemini kullanarak $\int_C f\,ds$'yi hesaplayın.

33. $f(x, y, z) = \sqrt{1 + 30x^2 + 10y}$; $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$

34. $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^3 + 5y^3}$; $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^2\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$

35. $f(x, y, z) = x\sqrt{y} - 3z^2$; $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

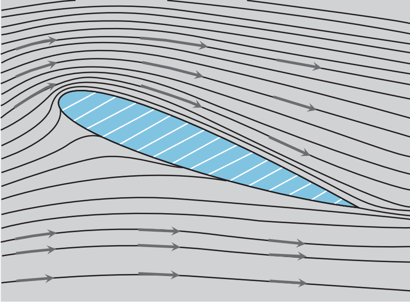
36. $f(x, y, z) = \left(1 + \frac{9}{4}z^{1/3}\right)^{1/4}$; $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j} + t^{5/2}\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

16.2 Vektör Alanları, İş, Dolaşım ve Akı

Vektörlerle temsil edilen fiziksel olayları incelerken, kapalı aralıklar üzerindeki integraller yerine vektör alanlarından geçen yollar üzerinde integraller alırız. Böyle integralleri, bir cismi bir yol boyunca değişken bir kuvvete karşı hareket ettirmek (dünyanın yerçekimi alanına karşı uzaya gönderilen bir araç) için yapılan işi bulmak veya bir cismi alan içinden geçen bir yol boyunca hareket ettirmek için vektör alanının yaptığı işi (bir parçacığın hızını arttırmak için bir hızlandırıcının yaptığı iş) bulmak için kullanırız. Ayrıca, akışkanların eğriler boyunca ve eğrilerden geçerken akış oranlarını bulmak için de eğrisel integralleri kullanırız.

Vektör Alanları

Düzlemde veya uzayda bir bölgenin, hava veya su gibi hareket eden bir akışkan ile donatıldığını varsayın. Akışkanın çok fazla sayıda partikülden oluştuğunu ve herhangi bir



ŞEKİL 16.7 Bir rüzgar tünelindeki bir hava boşluğunun çevresindeki bir akışın hız vektörleri. Akış çizgileri kerosen dumanıyla görünür hale getirilmiştir.

anda bir partikülün hızının **v** olduğunu düşünün. Bazı partiküllerin hızlarının değişik konumlarda bir resmini aynı anda çekersek, bu hızların konumdan konuma değiştiğini görmeyi bekleyebiliriz. Akışkanın her noktasına bağlanan bir hız vektörü düşünebiliriz. Böyle bir akışkan akışı bir *vektör alanını* örnekler. Örneğin, Şekil 16.7, bir rüzgar tünelindeki bir hava boşluğunun çevresinde akan havanın her noktasına bir hız vektörü bağlanarak elde edilen bir hız vektör alanını göstermektedir. Şekil 16.8, daralan bir kanalda hareket eden suyun akış çizgileri boyunca hız vektörlerinden oluşan başka bir vektör alanını göstermektedir. Akışkan akışları ile ilişkilendirilen vektör alanlarına ek olarak yerçekimi (Şekil 16.9), manyetik kuvvet alanları, elektrik alanları ve hatta pür matematiksel alanlar vardır.

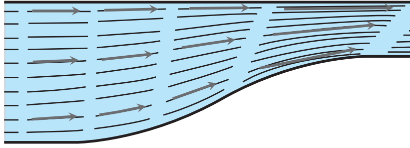
Genel olarak, düzlemde veya uzayda bir bölge üzerindeki bir **vektör alanı**, bölgedeki her noktaya bir vektör atayan bir fonksiyondur. Üç-boyutlu vektörlerden oluşan bir vektör alanın formülü

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

şeklinde olabilir. **Bileşen fonksiyonları** M, N ve P sürekli ise alan **sürekli**, M, N ve P türetilebilir ise **türetilebilir** v.b. dir. İki-boyutlu vektörlerden oluşan bir alanının

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

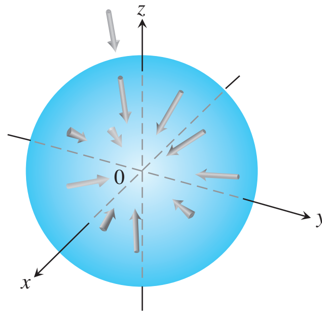
şeklinde bir formülü olabilir.



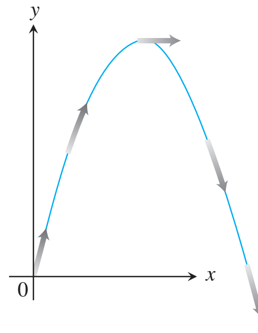
ŞEKİL 16.8 Daralan bir kanaldaki akış çizgileri. Kanal daraldıkça su hızlanır ve hız vektörlerinin uzunluğu artar.

Bir merminin hareket düzlemindeki yörüngesinin her noktasına, merminin hız vektörünü eklersek, yörünge boyunca tanımlı iki-boyutlu bir alanımız olur. Bir skaler fonksiyonun gradiyent vektörünü fonksiyonun bir seviye yüzeyinin her noktasına eklersek, yüzey üzerinde üç-boyutlu bir alanımız olur. Akan bir akışkanın her noktasına bir hız vektörü atarsak, uzayda bir bölgede tanımlanmış üç-boyutlu bir alanımız olur. Bunlar ve başka alanlar Şekil 16.10-16.15'te gösterilmektedir. Çizimlerin bazıları alanların formüllerini de vermektedir.

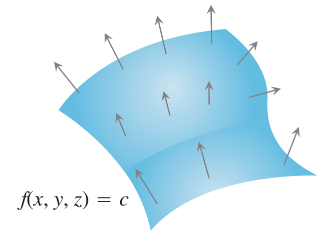
Formülleri var olan alanları çizmek için, tanım kümesi noktalarından bir seçki aldık ve bunlara ilişik vektörleri çizdik. Vektörleri temsil eden okların, vektör alanlarının hesaplandığı noktalarda başları ile değil, uçları ile çizildiğine dikkat edin.



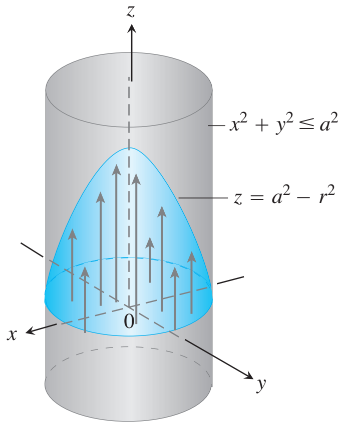
ŞEKİL 16.9 Bir yerçekimi alanında, alanın kaynaklandığı kütle merkezini gösteren vektörler



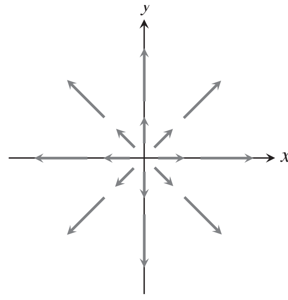
ŞEKİL 16.10 Bir mermi hareketinin $\mathbf{v}(t)$ hız vektörleri yol boyunca bir vektör alanı oluşturur.



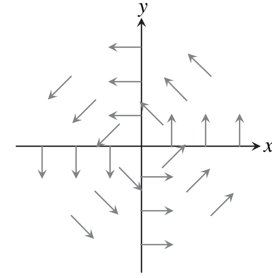
ŞEKİL 16.11 Bir $f(x, y, z) = c$ yüzeyi üzerindeki Δf gradiyent vektörleri alanı.



ŞEKİL 16.12 Uzun bir silindirik borudaki akışkan akışı. Silindirin içinde, tabanları xy-düzleminde bulunan $\mathbf{v} = (a^2 - r^2)\mathbf{k}$ vektörlerinin uçları $z = a^2 - r^2$ paraboloidi üzerindedir.



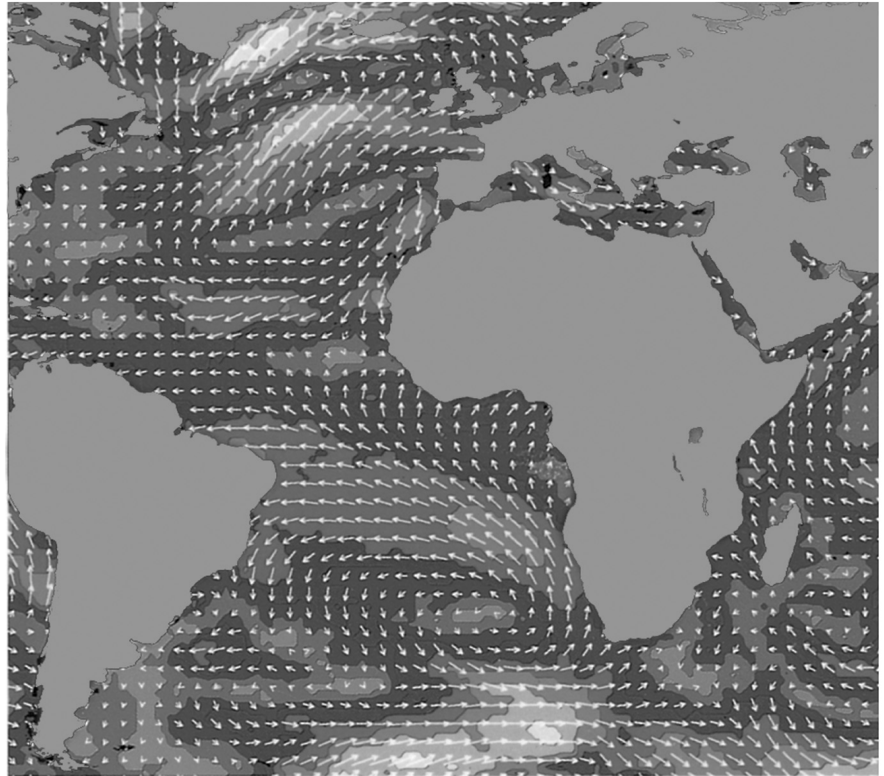
ŞEKİL 16.13 Düzlemdeki noktaların konum vektörlerinin radyal alanı $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Bir okun, **F**'nin hesaplandığı yerde, başıyla değil, ucuyla çizildiğine dikkat edin.

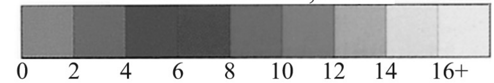


ŞEKİL 16.14 Düzlemde

$$\mathbf{F} = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)^{1/2}$$

birim vektörlerinin dairesel veya "spin" alanı. Alan orijinde tanımlı değildir.





ŞEKİL 16.15 NASA'nın *Seasat*'ı dünya okyanuslarının üzerinden 350.000 rüzgar ölçümü almak için bir radar kullanmıştır. Oklar rüzgar yönünü gösterir; uzunlukları ve renkli bölgeler hızı belirtir. Greenland'ın güneyindeki fırtınaya dikkat edin.

Bu, gezegenlerin ve mermilerin konum vektörlerini okları uçları orijinde ve başları gezegenin ve merminin bulunduğu yerde olacak şekilde çizişimizden farklıdır.

Gradiyent Alanlar

TANIM Gradiyent Alanlar

Diferansiyellenebilir bir $f(x, y, z)$ fonksiyonunun **gradiyent alanı**

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

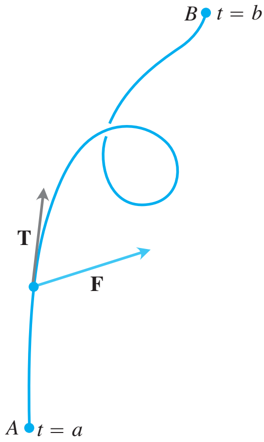
gradiyent vektörlerinin alanıdır.

ÖRNEK 1 Bir Gradiyent Alanı Bulmak

$f(x, y, z) = xyz$'nin gradiyent alanını bulun.

Çözüm f'nin gradiyent alanı $\mathbf{F} = \nabla f = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + yx\mathbf{k}$'dir ■

Bölüm 16.3'te göreceğimiz gibi, gradiyent alanlarının mühendislikte, matematikte ve fizikte özel bir önemi vardır.



ŞEKİL 16.16 Bir **F** kuvvetinin yaptığı iş, A'dan B'ye düzgün bir eğri üzerinde $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$ skaler bileşeninin eğrisel integralidir.

Bir Kuvvetin Bir Uzay Eğrisi Üzerinde Yaptığı İş

$\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ vektör alanının uzayda bir bölge boyunca bir kuvveti temsil ettiğini (yerçekimi kuvveti veya bir çeşit elektromanyetik kuvvet olabilir) ve

$$\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}, \qquad a \leq t \leq b$$

eğrisinin bu bölgede düzgün bir eğri olduğunu varsayın. Bu durumda **F**'nin eğrinin birim teğet vektörü yönündeki skaler bileşeni $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$'nin eğri üzerindeki integraline **F**'nin eğri üzerinde a'dan b'ye kadar yaptığı iş denir (Şekil 16.16).

TANIM Bir Düzgün Eğri Üzerinde İş

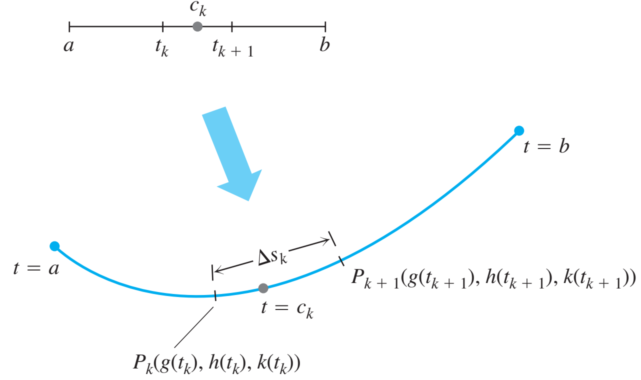
Bir $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ kuvvetinin düzgün bir $\mathbf{r}(t)$ eğrisi üzerinde $t = a$'dan $t = b$'ye kadar yaptığı iş

$$W = \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\, ds \qquad (1)$$

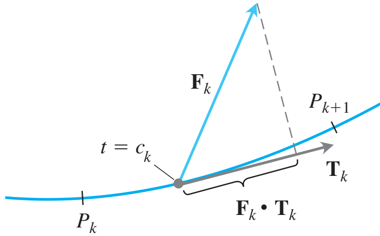
dir.

(1) denklemini, Bölüm 6'da $F(x)$ büyüklüğünde sürekli bir kuvvetin x-ekseni üzerindeki bir aralıkta yaptığı işi veren $W = \int_a^b F(x)\,dx$ formülünü türetmek için kullandığımız mantık yürütmeyle türeteceğiz. Eğriyi kısa parçalara böler, her eğri parçası üzerindeki işe yaklaşımda bulunmak için, işin (sabit-kuvvet) × (uzaklık) formülünü kullanır, bütün eğri üzerindeki işe yaklaşımda bulunmak için sonuçları toplar ve parçalar kısalırken ve sayıları

artarken işi yaklaşım toplamlarının limiti olarak hesaplarız. Limit integralin ne olacağını tam olarak bulmak için, $[a, b]$ parametre aralığını her zamanki gibi böler ve her $[t_k, t_k + 1]$ alt aralığında bir c_k noktası seçeriz. $[a, b]$'nin bölünüşü, $\mathbf{r}(t_k)$ konum vektörünün t_k'deki ucu P_k ve P_kP_{k+1} eğri parçasının uzunluğu Δs_k olmak üzere, eğrinin bir bölünüşünü belirler ("oluşturur" deriz) (Şekil 16.17).



ŞEKİL 16.17 $[a, b]$'nin her bölünüşü $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$ eğrisinin bir bölünüşünü oluşturur.



ŞEKİL 16.18 Şekil 16.17'deki P_kP_{k+1} eğri parçasının, eğri üzerinde $t = c_k$ noktasındaki kuvvet vektörünü ve birim teğeti gösteren büyütülmüş bir görüntüsü.

$\mathbf{F}_k$, $\mathbf{F}$'nin eğri üzerinde $t = c_k$'ye karşılık gelen noktadaki değeriyse ve $\mathbf{T}_k$ eğrinin bu noktadaki teğet vektörünü gösteriyorsa, $\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{T}_k$, $\mathbf{F}$'nin $t = c_k$'de $\mathbf{T}$ yönündeki skaler bileşenidir (Şekil 16.18). $\mathbf{F}$'nin P_kP_{k+1} eğri parçası boyunca yaptığı iş yaklaşık olarak

$$\left(\begin{array}{c}\text{hareket yönündeki}\\\text{kuvvet bileşeni}\end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c}\text{uygulanan}\\\text{mesafe}\end{array}\right) = \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{T}_k \, \Delta s_k$$

olur. $\mathbf{F}$'nin eğri boyunca $t = a$'dan $t = b$'ye kadar yaptığı iş yaklaşık olarak

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{T}_k \, \Delta s_k$$

olur. $[a, b]$ bölünüşünün normu sıfıra yaklaşırken, eğrinin oluşturulan bölünüşünün normu sıfıra yaklaşır ve bu toplamlar

$$\int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

eğrisel integraline yaklaşır. Bu integralle hesapladığımız sayının işareti t artarken eğrini hangi yöne ilerlediğine bağlıdır. Hareket yönünü değiştirirsek, $\mathbf{T}$'nin yönünü tersine çevirir ve $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ ile integralinin işaretini değiştiririz.

Tablo 16.2, (1) denklemindeki iş integralini yazmanın altı yolunu sunar. Farklılıklarına rağmen, Tablo 16.2'deki denklemlerin hepsi aynı şekilde hesaplanır. Tabloda, $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ düzgün bir eğri ve

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = dg\mathbf{i} + dh\mathbf{j} + dk\mathbf{k}$$

de onun diferansiyelidir.

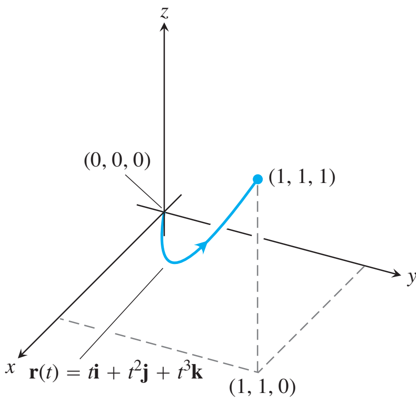
TABLO 16.2 İş integralini yazmanın değişik yolları

$\mathbf{W} = \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$	Tanım
$= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$	Kapalı diferansiyel form
$= \int_a^b \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt$	dt'yi kapsayacak şekilde genişletilmiş t parametresini ve $d\mathbf{r}/dt$ hız vektörünü vurgular
$= \int_a^b \left(M\frac{dg}{dt} + N\frac{dh}{dt} + P\frac{dk}{dt}\right)dt$	Bileşen fonksiyonlarını vurgular
$= \int_a^b \left(M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt} + P\frac{dz}{dt}\right)dt$	$\mathbf{r}$'nin bileşenlerini kısaltır.
$= \int_a^b M\,dx + N\,dy + P\,dz$	dt'ler sadeleşir; en yaygın şekil.

Bir İş İntegralini Hesaplamak

Bir $\mathbf{r}(t)$ düzgün eğrisi boyunca iş integralini hesaplamak için, şu adımları izleyin:

1. $\mathbf{F}$'yi eğri üzerinde t'nin bir fonksiyonu olarak hesaplayın.
2. $d\mathbf{r}/dt$'yi hesaplayın.
3. $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}/dt$ 'yi $t = a$'dan $t = b$'ye kadar integre edin.



ŞEKİL 16.19 Örnek 2'deki eğri.

ÖRNEK 2 Değişken Bir Kuvvetin Bir Uzay Eğrisi Üzerinde Yaptığı İş

$\mathbf{F} = (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k}$'nin $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$, eğrisi üzerinde (0, 0, 0)'dan (1, 1, 1)'e kadar yaptığı işi bulun (Şekil 16.19).

Çözüm Önce $\mathbf{F}$'yi eğri üzerinde hesaplarız.

$$\mathbf{F} = (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k}$$
$$= \underbrace{(t^2 - t^2)}_{0}\mathbf{i} + (t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k}$$

Sonra $d\mathbf{r}/dt$'yi buluruz:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

Son olarak $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}/dt$ 'yi bulur ve $t = 0$'dan $t = 1$'e kadar integre ederiz:

$$\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = [(t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k}]\cdot(\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})$$
$$= (t^3 - t^4)(2t) + (t - t^6)(3t^2) = 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8$$

ve

$$\text{İş} = \int_0^1 (2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8)\, dt$$

$$= \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{6}t^6 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{9}t^9\right]_0^1 = \frac{29}{60}.$$ ■

Akış İntegralleri ve Hız Alanları İçin Dolaşım

Bir kuvvet alanı yerine, **F**'nin uzayda bir bölgeden akan bir akışkanın hız alanını temsil ettiğini varsayın (bir dalga teknesi veya hidroelektrik bir jeneratörün türbin odası gibi). Bu koşullar altında, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$'nin bölge içinde kalan bir eğri üzerindeki integrali, eğri boyunca akışkan akışını verir.

TANIMLAR Akış İntegrali, Dolaşım

$\mathbf{r}(t)$, sürekli bir **F** hız alanının tanım bölgesinde düzgün bir eğriyse, eğri üzerinde $t = a$'dan $t = b$'ya kadar **akış**

$$\text{Akı} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \qquad (2)$$

dir. Bu durumda integrale **akış integrali** denir. Eğri kapalı bir döngüyse, akışa eğri etrafında **dolaşım** denir.

Akış integrallerini, iş integrallerini hesapladığımız şekilde hesaplarız.

ÖRNEK 3 Bir Helis Boyunca Akış Bulmak

Bir akışkanın hız alanı $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$'dir. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le \pi/2$, eğrisi boyunca akışı bulun.

Çözüm **F**'yi eğri üzerinde hesaplarız,

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k} = (\cos t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}$$

sonra $d\mathbf{r}/dt$'yi buluruz:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Daha sonra $\mathbf{F} \cdot (d\mathbf{r}/dt)$'yi $t = 0$'dan $t = \dfrac{\pi}{2}$'ye kadar integre ederiz:

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\cos t)(-\sin t) + (t)(\cos t) + (\sin t)(1)$$

$$= -\sin t \cos t + t \cos t + \sin t$$

dolayısıyla,

$$\text{Akış} = \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt = \int_0^{\pi/2} (-\sin t \cos t + t \cos t + \sin t)\, dt$$

$$= \left[\frac{\cos^2 t}{2} + t \sin t \right]_0^{\pi/2} = \left(0 + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$ ■

ÖRNEK 4 Bir Çemberin Etrafındaki Dolaşımı Bulmak

$\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ alanının $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$, çemberi etrafındaki dolaşımını bulun.

Çözüm Çember üzerinde, $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} = (\cos t - \sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$ ve

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$$

dir. Buradan,

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin t \cos t + \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1}$$

ifadesi

$$\text{Dolaşım} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt = \int_0^{2\pi} (1 - \sin t \cos t)\, dt$$

$$= \left[t - \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

verir. ■

Düzlemdeki Bir Eğriden Geçen Akı

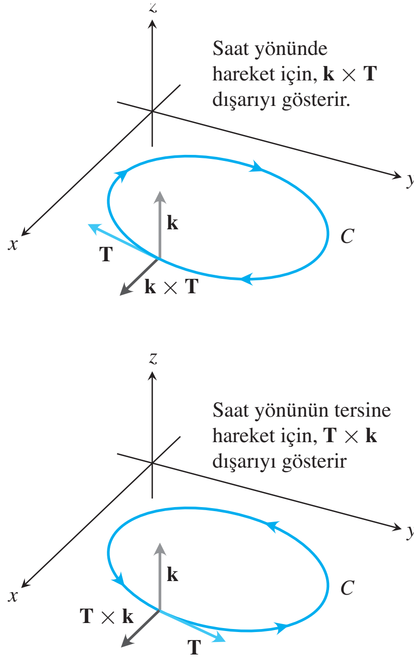
Bir akışkanın xy-düzlemindeki düzgün bir C eğrisiyle çevrelenen bir bölgeye giriş veya çıkış hızını bulmak için $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$'nin C üzerinde eğrisel integralini alırız. Burada $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$, akışkanın hız alanının eğrinin dışarıyı işaret eden normal vektörü yönündeki skaler bileşenidir. Bu integralin değerine $\mathbf{F}$'nin C'deki **akısı** denir. *Akı* (*flux*) akışın Latincesidir, ama çoğu akı hesaplamasında hiç hareket yoktur. Örneğin, $\mathbf{F}$ bir elektrik veya manyetik alan olsaydı, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$'nin integraline yine alanın C'deki akısı denecekti.

TANIM **Düzlemde Kapalı Bir Eğri Üzerinden Geçen Akı**

C, sürekli bir $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ vektör alanının tanım bölgesi içinde düzgün bir eğri ise ve $\mathbf{n}$ de C'nin dışarıyı gösteren birim normal vektörüyse, $\mathbf{F}$'nin C üzerindeki akısı aşağıdaki eğrisel integralle verilir:

$$\mathbf{F}\text{'nin } C\text{'deki } \textbf{akısı} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds. \qquad (3)$$

Akı ile dolaşım arasındaki farka dikkat edin. $\mathbf{F}$'nin C'deki akısı, $\mathbf{F}$'nin dışarıyı gösteren normalinin yönündeki skaler bileşeni $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$'nin yay uzunluğuna göre eğrisel integralidir.



ŞEKİL 16.20 *xy*-düzleminde *t* artarken saat yönünün tersine dönen düzgün bir *C* eğrisinin dışarıyı gösteren bir birim normal vektörünü bulmak için, **n** = **T** × **k** alırız. Saat yönündeki hareket için **n** = **k** × **T** alırız.

F'nin *C* etrafındaki dolaşımı, **F**'nin birim teğet vektör yönündeki skaler bileşeni **F • T**'nin yay uzunluğuna göre eğrisel integralidir. Akı, **F**'nin normal bileşeninin integralidir; dolaşım **F**'nin teğetsel bileşeninin integralidir.

(3) denklemindeki integrali hesaplamak için, *t a*'dan *b*'ye giderken *C* eğrisini tam bir kere dolaşan

$$x = g(t), \qquad y = h(t), \qquad a \le t \le b$$

parametrizasyonuyla işe başlarız. Dışarıyı gösteren birim normal vektör **n**'yi, eğrinin teğet birim vektörü **T** ile **k** vektörünün vektörel çarpımını alarak bulabiliriz. Fakat hangi sırayı seçeceğiz: **T** × **k** mi, **k** × **T** mi? Hangisi dışarıyı gösterir? Bu, *t* parametresi artarken, *C*'nin hangi yönde ilerlediğine bağlıdır. Hareket saat yönündeyse, **k** × **T** dışarıyı gösterir; hareket saat yönünün tersineyse, **T** × **k** dışarıyı gösterir (Şekil 16.20). Seçim genelde saat yönünün tersine hareketi öngören **n** = **T** × **k** olarak yapılır. Yani, akı'nın (3) denklemi ile verilen tanımındaki yay uzunluğu integralinin değeri, *C*'nin hangi yönde ilerlediğine bağlı olmadığı halde, (3) denklemini hesaplamak için türetmek üzere olduğumuz denklemler saat yönünün tersine bir hareketi varsayarlar.

Bileşenler cinsinden,

$$\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k} = \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}\right) \times \mathbf{k} = \frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}$$

olur. $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ ise,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = M(x, y)\frac{dy}{ds} - N(x, y)\frac{dx}{ds}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_C \left(M\frac{dy}{ds} - N\frac{dx}{ds}\right) ds = \oint_C M\,dy - N\,dx$$

halini alır. Son integrale, kapalı C eğrisi üzerindeki integralin saat yönünün tersine olduğunu hatırlatmak için yönlü bir ⟲ çemberi koyduk. Bu integrali hesaplamak için, *M*, *dy*, *N* ve *dx*'i *t* cinsinden ifade etmemiz ve $t = a$'dan $t = b$'ye kadar integralini almamız gerekir. Akıyı bulmak için **n**'yi ya da *ds*'yi bilmemiz gerekmez.

> **Düzgün Kapalı Bir Düzlem Eğri Üzerinden Geçen Akıyı Hesaplamak**
>
> $$(\mathbf{F} = M\,\mathbf{i} + N\mathbf{j}\text{'nin } C\text{'den geçen akısı}) = \oint_C M\,dy - N\,dx \qquad (4)$$
>
> İntegral, *C*'yi saat yönünün tersine tam bir kere dolaşan herhangi bir düzgün $x = g(t),\ y = h(t),\ a \le t \le b$, parametrizasyonuyla hesaplanabilir.

ÖRNEK 5 Bir Çemberden Geçen Akıyı Hesaplamak

$\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$'nin *xy*-düzlemindeki $x^2 + y^2 = 1$ çemberinden geçen akısını bulun.

Çözüm $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$, parametrizasyonu çemberi saat yönünün tersine tam bir defa kat eder. Dolayısıyla, (4) denkleminde bu parametrizasyonu kullanabiliriz.

$$M = x - y = \cos t - \sin t, \qquad dy = d(\sin t) = \cos t\, dt$$
$$N = x = \cos t, \qquad dx = d(\cos t) = -\sin t\, dt,$$

ile

$$\text{Akı} = \int_C M\,dy - N\,dx = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin t \cos t + \cos t \sin t)\,dt \qquad \text{(4) denklemi}$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

buluruz. F'nin çemberdeki akısı π'dir. Yanıt pozitif olduğu için, eğri boyunca net akış dışarı doğrudur. İçeri doğru net bir akış negatif bir akı verirdi. ■

ALIŞTIRMALAR 16.2

Vektör ve Gradiyent Alanları

1–4 alıştırmalarında, fonksiyonların gradiyent alanlarını bulun.

1. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$
2. $f(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
3. $g(x, y, z) = e^z - \ln(x^2 + y^2)$
4. $g(x, y, z) = xy + yz + xz$
5. **F**'nin orijine doğru işaret etme ve büyüklüğü (x, y)'den orijine olan uzaklığın karesiyle ters orantılı olma özelliği bulunacak şekilde düzlemde bir vektör alanının $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ formülünü bulun (Alan (0, 0)'da tanımlı değildir).
6. (0, 0)'da $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, başka (a, b) noktalarında $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ çemberine teğet ve saat yönünü işaret etme özelliği olan, $|\mathbf{F}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ büyüklüklü bir **F** vektör alanının $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ formülünü bulun.

İş

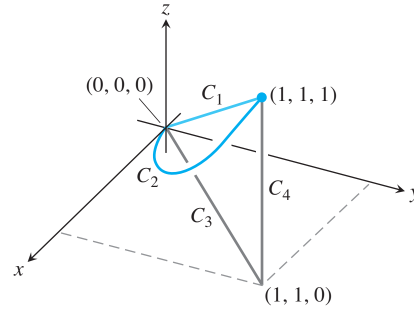
7–12 alıştırmalarında, **F** kuvvetinin aşağıdaki yollar üzerinde (0, 0, 0)'dan (1, 1, 1)'e kadar yaptığı işi bulun (Şekil 16.21).

a. Doğru yol C_1: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$

b. Eğri yol C_2: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$

c. (0, 0, 0)'dan (1, 1, 0)'a giden ve sonra (1, 1, 0)'dan (1, 1, 1)'e giden doğru parçalarından oluşan $C_3 < C_4$ yolu.

7. $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$
8. $\mathbf{F} = [1/(x^2 + 1)]\mathbf{j}$
9. $\mathbf{F} = \sqrt{z}\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \sqrt{y}\mathbf{k}$
10. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$
11. $\mathbf{F} = (3x^2 - 3x)\mathbf{i} + 3z\mathbf{j} + \mathbf{k}$
12. $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$



ŞEKİL 16.21 (0, 0, 0)'dan (1, 1, 1)'e giden yollar.

13–16 alıştırmalarında, **F**'nin artan t yönünde eğri boyunca yaptığı işi bulun.

13. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$
$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$
14. $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$
$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (t/6)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$
15. $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$
$\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$
16. $\mathbf{F} = 6z\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 12x\mathbf{k}$
$\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (t/6)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

Düzlemde Eğrisel İntegraller ve Vektör Alanları

17. $\int_C xy\,dx + (x + y)\,dy$'yi (–1, 1)'den (2, 4)'e kadar $y = x^2$ eğrisi üzerinde hesaplayın.
18. $\int_C (x - y)\,dx + (x + y)\,dy$'yi köşeleri (0, 0), (1, 0) ve (0, 1)' de olan üçgen üzerinde saat yönünün tersine hesaplayın.

19. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ vektör alanı için $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$'yi (4, 2)'den (1, –1)'e kadar $x = y^2$ eğrisi boyunca hesaplayın.

20. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ vektör alanı için $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$'yi (1, 0)'dan (0, 1)'e kadar saat yönünün tersine $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerinde hesaplayın.

21. İş $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$ kuvveti tarafından (1, 1)'den (2, 3)'e giden doğru boyunca yapılan işi bulun.

22. İş $f(x, y) = (x + y)^2$'nin gradiyentinin $x^2 + y^2 = 4$ çemberi üzerinde (2, 0)'dan (2, 0)'a kadar yaptığı işi bulun.

23. Dolaşım ve Akı Aşağıdaki eğrilerin her birinde

$$\mathbf{F}_1 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \qquad \text{ve} \qquad \mathbf{F}_2 = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

alanlarının akı ve dolaşımını bulun.

a. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ çemberi

b. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (4 \sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ elipsi

24. Bir çemberden geçen akı

$$\mathbf{F}_1 = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} \qquad \text{ve} \qquad \mathbf{F}_2 = 2x\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$$

alanlarının

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

çemberi üzerindeki akılarını bulun.

Dolaşım ve Akı

25–28 alıştırmalarında, **F** alanının $\mathbf{r}_1(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le \pi$, yarım dairesel yayı ve onu izleyen $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i}$, $-a \le t \le a$, doğru parçasından oluşan yarım çembersel yol üzerindeki akı ve dolaşımını bulun.

25. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

26. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$

27. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

28. $\mathbf{F} = -y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$

29. Akı integralleri $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} - (x^2 + y^2)\mathbf{j}$ hız alanının akış integralini xy-düzleminde (1, 0)'dan (–1, 0)'a kadar aşağıdaki yollardan her birinde bulun.

a. $x^2 + y^2 = 1$ çemberinin üst yarısı

b. (1, 0)'dan (–1, 0)'a giden doğru parçası

c. (1, 0)'dan (0, –1)'e giden doğru parçası ve onu izleyen (0, –1)'den (–1, 0)'a giden doğru parçası.

30. Bir üçgenden geçen akı Alıştırma 29'daki **F** alanının, köşeleri (1, 0), (0, 1) ve (–1, 0)'da bulunan üçgenden dışarı doğru olan akısını bulun.

Düzlemde Alanları Bulmak ve Çizmek

31. Spin alanı $x^2 + y^2 = 4$ çemberi boyunca çeşitli temsil noktalarında yatay ve dikey bileşenleriyle birlikte

$$\mathbf{F} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}$$

spin alanını çizin (Şekil 16.14'e bakın.)

32. Radyal alanı $x^2 + y^2 = 1$ çemberi boyunca çeşitli temsil noktalarındaki yatay ve dikey bileşenleriyle birlikte

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

radyal alanını çizin (Şekil 16.13'e bakın).

33. Bir teğet vektörler alanı

a. xy-düzleminde $(a, b) \ne (0, 0)$ olan her nokta için, $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ çemberine teğet ve saat yönünün tersini gösterme özelliğine sahip, $\sqrt{a^2 + b^2}$ büyüklüğünde bir $\mathbf{G} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ alanı bulun (Alan (0, 0)'da tanımlı değildir).

b. **G**, Şekil 16.14'teki **F** spin alanı ile nasıl ilişkilidir?

34. Bir teğet vektörler alanı

a. xy-düzleminde $(a, b) \ne (0, 0)$ olan her nokta için, $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ çemberine teğet ve saat yönünü gösterme özelliğine sahip bir $\mathbf{G} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ alanı bulun.

b. **G**, Şekil 16.14'teki **F** spin alanı ile nasıl ilişkilidir?

35. Orijine yönlenmiş birim vektörler xy-düzlemindeki her $(x, y) \ne (0, 0)$ noktasında, **F** orijini gösteren bir birim vektör olmak üzere bir $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ alanı bulun (Alan (0, 0)'da tanımlı değildir).

36. İki "Merkezi" alan xy-düzlemindeki her $(x, y) \ne (0, 0)$ noktasında, **F** orijini gösteren bir birim vektör ve $|\mathbf{F}|$, **(a)** (x, y)'den orijine olan uzaklık, **(b)** (x, y)'den orijine olan uzaklık ile ters orantılı olmak üzere bir $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ alanı bulun (Alan (0, 0)'da tanımlı değildir).

Uzayda Akış İntegralleri

37–40 alıştırmalarında, **F** uzayda bir bölgede akan bir akışkanın hız alanıdır. Verilen eğri boyunca artan t yönünde akışı bulun.

37. $\mathbf{F} = -4xy\mathbf{i} + 8y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$

38. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$

$r(t) = 3t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$

39. $\mathbf{F} = (x - z)\mathbf{i} + x\mathbf{k}$

$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le \pi$

40. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

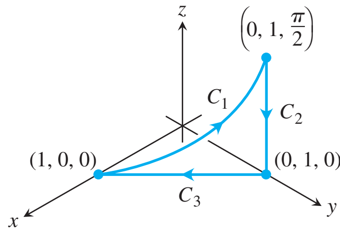
$\mathbf{r}(t) = (-2 \cos t)\mathbf{i} + (2 \sin t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

41. Dolaşım Artan t yönünde ilerleyen aşağıdaki üç eğriden oluşan kapalı yol boyunca $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$'nın dolaşımını bulun:

C_1: $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le \pi/2$

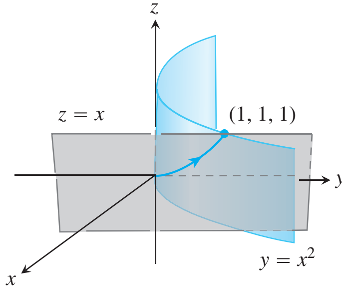
C_2: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{j} + (\pi/2)(1 - t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$

C_3: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$



42. Sıfır dolaşım C, $2x + 3y - z = 0$ düzleminin $x^2 + y^2 = 12$ silindiriyle kesiştiği elips olsun. İki eğrisel integrali de doğrudan hesaplamadan, $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ alanının C eğrisi etrafındaki dolaşımın iki yönde de sıfır olduğunu gösterin.

43. Bir eğri boyunca akış $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$ alanı uzayda bir akışın hız alanıdır. $y = x^2$ silindiri ile $z = x$ düzleminin kesişim eğrisi üzerinde (0, 0, 0)'dan (1, 1, 1)'e kadar akışı bulun (*İpucu*: Parametre olarak $t = x$ kullanın).



44. Bir gradiyent alanın akışı $\mathrm{F} = \nabla(xy^2z^3)$ alanının verilen eğrilerdeki akışını bulun.

a. Alıştırma 42'deki C üzerinde, yukarıdan bakıldığında saat yönünde bir defa

b. (1, 1, 1)'den (2, 1, –1)'e giden doğru parçası üzerinde

Teori ve Örnekler

45. İş ve alan $a \le t \le b$ için $f(t)$'nin diferansiyellenebilir ve pozitif olduğunu varsayın. C, $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}$, $a \le t \le b$, yolu ve $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$ olsun.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

iş integralinin değeri ile t-ekseni, f'nin grafiği, $t = a$ ve $t = b$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanı arasında bir ilişki var mıdır? Yanıtınızı açıklayın.

46. Sabit büyüklüklü bir radyal kuvvetin yaptığı iş Bir parçacık düzgün $y = f(x)$ eğrisi üzerinde $(a, f(a))$'dan $(b, f(b))$'ye ilerlemektedir. Parçacığı hareket ettiren kuvvetin büyüklüğü sabit k'dir ve her zaman orijinden uzağı göstermektedir. Kuvvetin yaptığı işin

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = k\left[(b^2 + (f(b))^2)^{1/2} - (a^2 + (f(a))^2)^{1/2}\right]$$

olduğunu gösterin.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Sayısal Olarak İş Bulmak

47–52 alıştırmalarında, bir BCS kullanarak **F** kuvvetinin verilen yolda yaptığı işi bulmak için aşağıdaki adımları izleyin.

a. $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$ yolu için $d\mathbf{r}$'yi bulun.

b. Yol boyunca **F** kuvvetini hesaplayın.

c. $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ 'yi hesaplayın.

47. $\mathbf{F} = xy^6\mathbf{i} + 3x(xy^5 + 2)\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$

48. $\mathbf{F} = \dfrac{3}{1 + x^2}\mathbf{i} + \dfrac{2}{1 + y^2}\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le \pi$

49. $\mathbf{F} = (y + yz\cos xyz)\mathbf{i} + (x^2 + xz\cos xyz)\mathbf{j} + (z + xy\cos xyz)\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

50. $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + ze^x\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = -t\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, $1 \le t \le 4$

51. $\mathbf{F} = (2y + \sin x)\mathbf{i} + (z^2 + (1/3)\cos y)\mathbf{j} + x^4\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (\sin 2t)\mathbf{k}$, $-\pi/2 \le t \le \pi/2$

52. $\mathbf{F} = (x^2y)\mathbf{i} + \frac{1}{3}x^3\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (2\sin^2 t - 1)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

16.3 Yoldan Bağımsızlık, Potansiyel Fonksiyonlar ve Korunmalı Alanlar

Yerçekimi ve elektrik alanlarında, bir kütleyi veya bir yükü bir noktadan diğerine taşımak için gereken iş miktarı, arada hangi yolun izlendiğine değil sadece cismin ilk ve son konumlarına bağlıdır. Bu bölüm iş integrallerinin yoldan bağımsızlığı kavramını tartışmakta ve iş integrallerinin yoldan bağımsız olduğu alanların önemli özelliklerini tanımlamaktadır.

Yoldan Bağımsızlık

A ve B uzayda açık bir D bölgesinde iki nokta ise, bir parçacığı D üzerinde tanımlanan bir $\mathbf{F}$ kuvvetiyle A'dan B'ye götürmek için yapılan $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ işi genellikle hangi yolun izlendiğine bağlıdır. Ancak, bazı özel alanlar için, integralin değeri A'dan B'ye giden bütün yollar için aynıdır.

TANIM Yoldan Bağımsızlık, Korunmalı Alanlar

$\mathbf{F}$, uzayda açık bir D bölgesi üzerinde tanımlı bir alan olsun ve D'deki herhangi iki A ve B noktası için, A'dan B'ye ilerlemekle yapılan $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ işinin A'dan B'ye giden bütün yollar üzerinde aynı olduğunu varsayın. Bu durumda $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ integrali ***D* içinde yoldan bağımsızdır** ve $\mathbf{F}$ alanı ***D* üzerinde korunmalıdır**.

Korunmalı kelimesi fizikten gelir ve enerji korunumunun geçerli olduğu (ki geçerlidir, korunmalı alanlarda) alanları belirtmek için kullanılır.

Pratikte normal olarak karşılaşılan diferansiyellenebilme koşulları altında, bir $\mathbf{F}$ alanı ancak ve yalnız skaler bir f fonksiyonunun gradiyent alanı ise; yani, ancak ve yalnız f için $\mathbf{F} = \nabla f$ ise korunmalıdır. Bu durumda f fonksiyonunun özel bir adı vardır.

TANIM Potansiyel Fonksiyon

$\mathbf{F}$, D'de tanımlı bir alan ise ve D üzerindeki bir f skaler fonksiyonu için, $\mathbf{F} = \nabla f$ ise, f fonksiyonuna $\mathbf{F}$'nin **potansiyel fonksiyonu** denir.

Bir elektrik potansiyeli, gradiyent alanı bir elektrik alan olan skaler bir fonksiyondur. Bir yerçekimi potansiyeli, gradiyent alanı bir yerçekimi alanı olan skaler bir fonksiyondur. Göreceğimiz gibi, bir $\mathbf{F}$ alanı için bir f potansiyel fonksiyonu bulursak, $\mathbf{F}$'nin tanım bölgesinde, A ve B arasındaki bütün yollar üzerinde iş integrallerini

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A) \tag{1}$$

ile hesaplayabiliriz.

Çok değişkenli fonksiyonlar için ∇f'yi tek değişkenli fonksiyonların türevi f' gibi düşünürseniz, (1) denkleminin Analizin Temel Teoreminin

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

formülünün vektör analizindeki benzeri olduğunu görürsünüz.

Korunmalı alanların, ilerlerken göreceğimiz önemli özellikleri vardır. Örneğin, $\mathbf{F}$'nin D üzerinde korunmalı olduğunu söylemek, $\mathbf{F}$'nin D içinde her kapalı yol üzerindeki integralinin sıfır olduğunu söylemeye eşdeğerdir. Doğal olarak, (1) denkleminin geçerli olması için, eğriler, alanlar ve tanım bölgeleri üzerinde belirli koşulların sağlanması gerekir. Bu koşulları aşağıda tartışıyoruz.

Bu Noktadan İleriye Varsayımlar: Bağlantılılık ve Basit Bağlantılılık

Bütün eğrilerin **parçalı olarak düzgün**, yani Bölüm 13.1'de gösterildiği gibi, arka arkaya eklenmiş düzgün eğrilerden meydana gelmiş olduğunu varsayacağız. Ayrıca $\mathbf{F}$'nin bileşenlerinin birinci mertebe kısmi türevlerinin var ve sürekli olduğunu da kabul edeceğiz.

$\mathbf{F} = \nabla f$ olduğunda, bu süreklilik koşulu f potansiyel fonksiyonunun karışık ikinci mertebe türevlerinin eşit olmasını garantiler. Bu sonucu, **F**'nin korunmalı alanlarını çalışırken çıkaracağız.

D'nin uzayda açık bir bölge olduğunu varsayacağız. Bu, D içindeki her noktanın, tümüyle D içinde kalan bir topun merkezi olabilmesi anlamına gelir. D'nin **bağlantılı** olduğunu varsayacağız, ki bu bir açık bölgede her noktanın diğer her noktaya bölge içinde kalan düzgün bir eğriyle bağlanabileceği anlamına gelir. Son olarak, D'nin basit bağlantılı olduğunu varsayacağız, ki bu da D içindeki her kapalı döngünün D'yi hiç terk etmeden bir noktaya büzülebileceği anlamına gelir (Örneğin, içinden bir doğru çıkarılmış bir uzaydan ibaret olan D bölgesi **basit bağlantılı** olamaz. Doğrunun etrafındaki bir döngüyü D'yi terk etmeden bir noktaya büzmenin bir yolu bulunmayacaktır).

Bağlantılılık ve basit bağlantılılık aynı şey değildir ve biri diğerini gerektirmez. Bağlantılı bölgeleri "tek parça" olarak, basit bağlantılı bölgeleri de "döngülerin içinden geçen delikleri" olmayan bölgeler olarak düşünün. Uzayın kendisi hem bağlantılı hem de basit bağlantılıdır. Bu bölümdeki bazı sonuçlar, bu koşulların sağlanmadığı bir bölgeye uygulanırlarsa sağlanmayabilirler. Örneğin, bu bölümde daha sonra verilecek olan korunmalı alanlar için bileşen testi, basit bağlantılı olmayan bölgelerde geçerli değildir.

Korunmalı Alanlarda Eğrisel İntegraller

Aşağıdaki sonuç korunmalı bir alanda bir eğrisel integrali hesaplamanın uygun bir yolunu verir. Sonuç, integralin değerinin sadece uç noktalara bağlı olduğunu ve onları birleştiren belirli yola bağlı olmadığını belirtir.

TEOREM 1 Eğrisel İntegrallerin Temel Teoremi

1. $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, uzayın açık, bağlantılı bir D bölgesinde bileşenleri sürekli olan bir vektör alanı olsun. Bu durumda, ancak ve yalnız D içindeki bütün A ve B noktaları için $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$'nin değeri A ve B'yi D içinde birleştiren yoldan bağımsız ise,

$$\mathbf{F} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

olacak şekilde diferansiyellenebilir bir f fonksiyonu vardır.

2. İntegral A'dan B'ye giden yoldan bağımsızsa, değeri

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$$

olur.

$\mathbf{F} = \nabla f$'nin, integralin Yoldan Bağımsızlığını Gerektirmesinin İspatı A ile B'nin D içinde iki nokta ve C: $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, $a \le t \le b$'nin de D içinde A ile B'yi birleştiren düzgün bir eğri olduğunu varsayın. Eğri boyunca f, t'nin diferansiyellenebilir bir fonksiyonudur ve

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$x = g(t),\ y = h(t),\ z = k(t)$ ile Zincir Kuralı

$$= \nabla f \cdot \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right) = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$\mathbf{F} = \nabla f$ olduğundan

olur.

Bu nedenle,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = \int_a^b \frac{df}{dt}\,dt$$

$$= f(g(t), h(t), k(t))\Big]_a^b = f(B) - f(A)$$

bulunur.

Böylece, iş integralinin değeri sadece f'nin A ve B'deki değerlerine bağlıdır, aralarındaki yola değil. Bu 2. kısmın yanında, 1. kısımdaki gerektirmeyi de ispatlar. Daha teknik olan yeterlik kısmının ispatını burada vermeyeceğiz. ■

ÖRNEK 1 Korunmalı Bir Alanın Yaptığı İşi Bulmak

$A(-1, 3, 9)$ noktasını $B(1, 6, -4)$'e bağlayan herhangi bir C eğrisi üzerinde

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} = \nabla(xyz)$$

korunmalı alanının yaptığı işi bulun.

Çözüm $f(x, y, z) = xyz$ ile

$$\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \nabla f\cdot d\mathbf{r} \qquad \mathbf{F} = \nabla f$$

$$= f(B) - f(A) \qquad \text{Temel Teorem, Kısım 2}$$

$$= xyz|_{(1,6,-4)} - xyz|_{(-1,3,9)}$$

$$= (1)(6)(-4) - (-1)(3)(9)$$

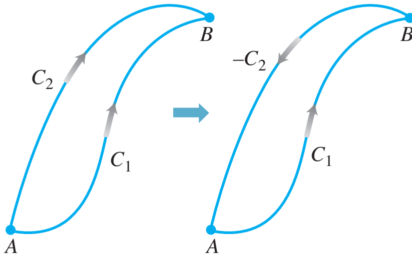
$$= -24 + 27 = 3$$ ■

buluruz.

TEOREM 2 Korunmalı Alanların Kapalı-Döngü Özelliği

Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

1. D'deki her kapalı döngü üzerinde $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$'dır.
2. D'de $\mathbf{F}$ alanı korunmalıdır.

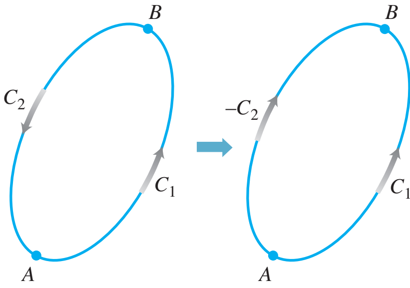


ŞEKİL 16.22 A'dan B'ye giden iki yolumuz varsa, biri tersine çevrilerek bir döngü oluşturulabilir.

(1) ⟹ (2)'nin ispatı D içindeki herhangi iki A ve B noktası için $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$'nin integralinin A'dan B'ye kadar herhangi iki C_1 ve C_2 üzerindeki değerinin aynı olduğunu göstermek istiyoruz. C_2'nin yönünü tersine çevirerek B'den A'ya giden bir $-C_2$ yolu oluştururuz (Şekil 16.22). C_1 ve $-C_2$ kapalı bir C eğrisi oluşturur ve

$$\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0.$$

olur. Yani C_1 ve C_2 üzerinden integraller aynı değeri verir. Eğrisel integralin tanımının, bir eğri boyunca yön değiştirmenin, integralin işaretinin değiştiğini gösterdiğine dikkat edin.



ŞEKİL 16.23 A ve B bir döngü üzerinde bulunuyorsa, döngünün bir parçasını tersine çevirerek, A'dan B'ye giden iki yol yapılabilir.

(2) ⟹ (1)'in ispatı $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ 'nin integralinin herhangi bir C kapalı döngü üzerindeki integralinin sıfır olduğunu göstermek istiyoruz. C üzerinde iki A ve B noktası seçer ve bunları C'yi iki parçaya bölmek için kullanırız: A'dan B'ye C_1 ve onu izleyen B'den yine A'ya C_2 (Şekil 16.23). Bu durumda

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0. \qquad \blacksquare$$

olur.

Aşağıdaki diyagram Teorem 1 ve 2'nin sonuçlarını özetler.

	Teorem 1		Teorem 2	
D'de $\mathbf{F} = \nabla f$	⟺	D'de $\mathbf{F}$ korunmalıdır	⟺	$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ D'deki herhangi bir kapalı yolda

Eğrisel integralleri korunmalı alanlarda hesaplamanın ne kadar uygun olduğunu gördüğümüze göre, geriye iki soru kalır:

1. Verilen bir $\mathbf{F}$ alanının korunmalı olduğunu nasıl anlarız?
2. $\mathbf{F}$ gerçekten korunmalıysa, f potansiyel fonksiyonunu nasıl buluruz (ki $\mathbf{F} = \nabla f$ olsun)?

Korunmalı Alanlar İçin Potansiyel Bulmak

Korunmalı olmanın testi aşağıdadır. $\mathbf{F}$'nin bölgesinin bağlantılı ve basit bağlantılı olduğu kabulümüzü aklınızda tutun.

Korunmalı Alanlar İçin Bileşen Testi

$\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$, bileşenlerinin birinci mertebe kısmi türevleri sürekli olan bir alan olsun. Bu durumda, ancak ve yalnız

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \tag{2}$$

ise, $\mathbf{F}$ korunmalıdır.

İspat F korunmalı ise, (2) denklemlerinin geçerli olduğunu ispat edin

$$\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

olacak şekilde bir f potansiyel fonksiyonu vardır. Böylece

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} \qquad \text{Süreklilik, karışık kısmi türevlerin eşitliğini gerektirir.} \\ &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial z}\end{aligned}$$

olur. (2) denklemlerindeki diğer iki eşitlik de benzer şekilde ispatlanır. ■

İspatın ikinci yarısı, yani (2) denklemlerinin $\mathbf{F}$'nin korunmalı olmasını gerektirmesi Bölüm 16.7'de işlenecek olan Stokes Teoreminin bir sonucudur ve bölgemizin basit bağlantılı olduğu kabulümüzü gerektirmektedir.

F'nin korunmalı olduğunu biliyorsak, genellikle **F** için bir potansiyel fonksiyonu bulmak isteriz. Bu $\nabla f = \mathbf{F}$ veya

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$$

denkleminden f'yi çözmeyi gerektirir. Bunu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = P$$

denklemlerini aşağıdaki örnekte olduğu gibi integre ederek yaparız.

ÖRNEK 2 Bir Potansiyel Fonksiyon Bulmak

$\mathbf{F} = (e^x \cos y + yz)\mathbf{i} + (xz - e^x \sin y)\mathbf{j} + (xy + z)\mathbf{k}$'nin korunmalı olduğunu gösterin ve bir potansiyel fonksiyonu bulun.

Çözüm (2) Denklemlerindeki testleri

$$M = e^x \cos y + yz, \qquad N = xz - e^x \sin y, \qquad P = xy + z$$

denklemlerine uygular ve

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z}, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -e^x \sin y + z = \frac{\partial M}{\partial y}$$

buluruz. Bu eşitlikler birlikte, $\nabla f = \mathbf{F}$ olacak şekilde bir f fonksiyonunun var olduğunu söyler. f'yi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + yz, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xz - e^x \sin y, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + z \tag{3}$$

denklemlerini çözerek buluruz. İlk denklemi, y ve z'yi sabit tutup, x'e göre integre ederek

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + g(y, z)$$

elde ederiz. İntegrasyon sabitini y ve z'nin bir fonksiyonu olarak yazarız, çünkü y ve z değişirse değeri değişebilir. Sonra bu denklemden $\partial f/\partial y$'yi hesaplar ve bunu (3) denklemlerindeki $\partial f/\partial y$ ifadesiyle karşılaştırırız. Bu

$$-e^x \sin y + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - e^x \sin y$$

verir, böylece $\partial g/\partial y = 0$ olur. Dolayısıyla, g sadece z'nin bir fonksiyonudur:

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + h(z)$$

Şimdi bu denklemden $\partial f/\partial z$'yi hesaplar ve bunu (3) denklemlerindeki $\partial f/\partial z$ ifadesiyle karşılaştırırız. Bu

$$xy + \frac{dh}{dz} = xy + z, \quad \text{veya} \quad \frac{dh}{dz} = z$$

verir, dolayısıyla

$$h(z) = \frac{z^2}{2} + C$$

olur.

Böylece

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C$$

olur. C'nin her değeri için bir tane olmak üzere, **F** için sonsuz sayıda potansiyel fonksiyonlar bulduk. ■

ÖRNEK 3 Bir Alanın Korunmalı Olmadığını Göstermek

$\mathbf{F} = (2x - 3)\mathbf{i} - z\mathbf{j} + (\cos z)\mathbf{k}$'nin korunmalı olmadığını gösterin.

Çözüm (2) Denklemlerindeki bileşen testini uygular ve hemen

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos z) = 0, \qquad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -1$$

buluruz. Bu ikisi eşit değildir, dolayısıyla **F** korunmalı değildir. Daha fazla teste gerek yoktur. ■

Tam Diferansiyel Formlar

Bir sonraki bölümde ve daha sonra göreceğimiz gibi, genellikle iş ve dolaşım integrallerini Bölüm 16.2'de sözü edilen

$$\int_A^B M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

"diferansiyel" formunda ifade etmek uygundur. $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ bir f fonksiyonunun diferansiyeliyse, bu tip integralleri hesaplaması oldukça kolaydır. Çünkü bu durumda,

$$\begin{aligned}\int_A^B M\,dx + N\,dy + P\,dz &= \int_A^B \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \\ &= \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(B) - f(A) \qquad \text{Teorem 1}\end{aligned}$$

olur. Yani, tek değişkenli diferansiyellenebilir fonksiyonlarda olduğu gibi,

$$\int_A^B df = f(B) - f(A)$$

bulunur.

TANIMLAR **Tam Diferansiyel Form**

$M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + P(x, y, z)dz$ formuna **diferansiyel form** denir. Uzaydaki bir D bölgesinde bir (skaler) f fonksiyonu için,

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$$

ise, diferansiyel forma D'de **tam diferansiyel form** denir.

D üzerinde $M\,dx + N\,dy + P\,dz = df$ ise, $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ alanı f'nin D üzerindeki gradiyent alanıdır. Tersine, $\mathbf{F} = \nabla f$ ise, $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ formu tamdır. Dolayısıyla, formun tamlığı testi **F**'nin korunmalı olup olmadığı testiyle aynıdır.

$M\,dx + N\,dy + P\,dz$'nin Tamlık Testi

Ancak ve yalnız

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

ise, $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ diferansiyel formu tamdır. Bu, $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$'nin korunmalı olduğunu söylemeye eşdeğerdir.

ÖRNEK 4 Bir Diferansiyel Formun Tam Olduğunu Göstermek

$y\,dx + x\,dy + 4\,dz$'nin tam olduğunu gösterin ve (1, 1, 1)'den (2, 3, –1)'e kadar giden doğru parçası üzerinde

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,dx + x\,dy + 4\,dz$$

integralini hesaplayın.

Çözüm $M = y,\ N = x,\ P = 4$ alır ve Tamlık Testini uygularız:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Bu eşitlikler bize $y\,dx + x\,dy + 4\,dz$'nin tam olduğunu söyler, dolayısıyla bir f fonksiyonu için

$$y\,dx + x\,dy + 4\,dz = df$$

olur ve integralin değeri $f(2, 3, -1) - f(1, 1, 1)$ bulunur.

f'yi bir sabit ile birlikte

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 4. \qquad (4)$$

denklemlerini integre ederek buluruz. Birinci denklemden

$$f(x, y, z) = xy + g(y, z)$$

elde ederiz. İkinci denklem

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial g}{\partial y} = x, \qquad \text{veya} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

verir. Bu nedenle g sadece z'nin bir fonksiyonudur ve

$$f(x, y, z) = xy + h(z)$$

olur. (4) denklemlerinin üçüncüsü

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 + \frac{dh}{dz} = 4, \qquad \text{veya} \qquad h(z) = 4z + C$$

olduğunu söyler. Dolayısıyla,

$$f(x, y, z) = xy + 4z + C$$

olur. İntegralin değeri

$$f(2, 3, -1) - f(1, 1, 1) = 2 + C - (5 + C) = -3$$

bulunur. ■

ALIŞTIRMALAR 16.3

Korunmalı Alanları Test Etmek

1–6 alıştırmalarındaki alanların hangileri korunmalı, hangileri değildir?

1. $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
2. $\mathbf{F} = (y \sin z)\mathbf{i} + (x \sin z)\mathbf{j} + (xy \cos z)\mathbf{k}$
3. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} - y\mathbf{k}$
4. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F} = (z + y)\mathbf{i} + z\mathbf{j} + (y + x)\mathbf{k}$
6. $\mathbf{F} = (e^x \cos y)\mathbf{i} - (e^x \sin y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Potansiyel Fonksiyonları Bulmak

7–12 alıştırmalarında, **F** alanı için bir f potansiyel fonksiyonu bulun.

7. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$
8. $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$
9. $\mathbf{F} = e^{y+2z}(\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2x\mathbf{k})$
10. $\mathbf{F} = (y \sin z)\mathbf{i} + (x \sin z)\mathbf{j} + (xy \cos z)\mathbf{k}$
11. $\mathbf{F} = (\ln x + \sec^2(x + y))\mathbf{i} + \left(\sec^2(x + y) + \frac{y}{y^2 + z^2}\right)\mathbf{j} + \frac{z}{y^2 + z^2}\mathbf{k}$
12. $\mathbf{F} = \frac{y}{1 + x^2y^2}\mathbf{i} + \left(\frac{x}{1 + x^2y^2} + \frac{z}{\sqrt{1 - y^2z^2}}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{y}{\sqrt{1 - y^2z^2}} + \frac{1}{z}\right)\mathbf{k}$

Eğrisel İntegralleri Hesaplamak

13–17 alıştırmalarında, integrallerdeki diferansiyel formların tam olduklarını gösterin. Sonra integralleri hesaplayın.

13. $\int_{(0,0,0)}^{(2,3,-6)} 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$
14. $\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$
15. $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy\,dx + (x^2 - z^2)\,dy - 2yz\,dz$
16. $\int_{(0,0,0)}^{(3,3,1)} 2x\,dx - y^2\,dy - \frac{4}{1 + z^2}\,dz$
17. $\int_{(1,0,0)}^{(0,1,1)} \sin y \cos x\,dx + \cos y \sin x\,dy + dz$

R^3 uzayının tamamında tanımlı olmadıkları halde, 18–22 alıştırmalarına karşı gelen bölgeler basit bağlantılıdır. Alanların korunmalı olduklarını göstermek için bileşen testi kullanılabilir. Her bir alan için bir potansiyel fonksiyon bulun ve integralleri Örnek 4'teki gibi hesaplayın.

18. $\int_{(0,2,1)}^{(1,\pi/2,2)} 2\cos y\,dx + \left(\frac{1}{y} - 2x \sin y\right)dy + \frac{1}{z}\,dz$
19. $\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} 3x^2\,dx + \frac{z^2}{y}\,dy + 2z \ln y\,dz$
20. $\int_{(1,2,1)}^{(2,1,1)} (2x \ln y - yz)\,dx + \left(\frac{x^2}{y} - xz\right)dy - xy\,dz$
21. $\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{1}{y}\,dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{y}{z^2}\,dz$
22. $\int_{(-1,-1,-1)}^{(2,2,2)} \frac{2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz}{x^2 + y^2 + z^2}$
23. **Örnek 4'ü tekrarlamak** Örnek 4'teki
$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,dx + x\,dy + 4\,dz$$
integralini (1, 1, 1)'den (2, 3, –1)'e giden doğru parçasının parametrik denklemlerini bulup, doğru üzerinde $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$'nin eğrisel integralini hesaplayarak bulun. **F** korunmalı olduğu için, integral yoldan bağımsızdır.
24. (0, 0, 0)'ı (0, 3, 4)'e bağlayan C doğru parçası üzerinde $\int_C x^2\,dx + yz\,dy + (y^2/2)\,dz$'yi hesaplayın.

Teori, Uygulama ve Örnekler

Bağımsız yol 25 ve 26 alıştırmalarındaki integrallerin değerlerinin A'dan B'ye gidilen yola bağlı olmadığını gösterin.

25. $\int_A^B z^2\,dx + 2y\,dy + 2xz\,dz$
26. $\int_A^B \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

27 ve 28 alıştırmalarında, **F** için bir potansiyel fonksiyon bulun.

27. $\mathbf{F} = \frac{2x}{y}\mathbf{i} + \left(\frac{1 - x^2}{y^2}\right)\mathbf{j}$
28. $\mathbf{F} = (e^x \ln y)\mathbf{i} + \left(\frac{e^x}{y} + \sin z\right)\mathbf{j} + (y \cos z)\mathbf{k}$
29. **Farklı yollar üzerinde iş** $\mathbf{F} = (x^2 + y)\mathbf{i} + (y^2 + x)\mathbf{j} + ze^z\mathbf{k}$'nin aşağıdaki yollarda (1, 0, 0)'dan (1, 0, 1)'e kadar yaptığı işi bulun.
   a. $x = 1, y = 0, 0 \le z \le 1$, doğru parçası
   b. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (t/2\pi)\mathbf{k}, 0 \le t \le 2\pi$, helisi
   c. (1, 0, 0)'dan (0, 0, 0)'a kadar x-ekseni ve ardından (0, 0, 0)'dan (1, 0, 1)'e kadar $z = x^2, y = 0$ parabolü
30. **Farklı yollar üzerinde iş** $\mathbf{F} = e^{yz}\mathbf{i} + (xze^{yz} + z \cos y)\mathbf{j} + (xye^{yz} + \sin y)\mathbf{k}$'nin aşağıdaki yollarda (1, 0, 1)'den (1, $\pi/2$, 0)'a kadar yaptığı işi bulun.

a. $x = 1, y = \pi t/2, \quad z = 1 - t, \quad 0 \le t \le 1$ doğru parçası

b. (1, 0, 1)'den orijine giden doğru parçası ve ardından orijinden $(1, \pi/2, 0)$'a giden doğru parçası

c. (1, 0, 1)'den (1, 0, 0)'a giden doğru parçası, ardından (1, 0, 0)'dan orijine kadar x-ekseni ve ardından orijinden $(1, \pi/2, 0)$'a kadar $y = \pi x^2/2, z = 0$ parabolü.

31. Bir iş integralini iki şekilde hesaplamak $\mathbf{F} = \nabla(x^3y^2)$ ve C de xy-düzleminde (–1, 1)'den (1, 1)'e, önce (–1, 1)'den (0, 0)'a ardından (0, 0)'dan (1, 1)' e giden doğru parçalarından oluşan yol olsun. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$'yi iki şekilde hesaplayın:

a. C'yi oluşturan doğru parçalarının parametrizasyonlarını bulun ve integrali hesaplayın.

b. $f(x, y) = x^3y^2$'nin $\mathbf{F}$'nin potansiyel fonksiyonu olmasını kullanın.

32. Farklı yollar boyunca integral $\int_C 2x \cos y\, dx - x^2 \sin y\, dy$'yi xy-düzleminde aşağıda verilen C yolları boyunca hesaplayın.

a. (1, 0)'dan (0, 1)'e kadar $y = (x - 1)^2$ parabolü

b. $(-1, \pi)$'den (1, 0)'a giden doğru parçası

c. (–1, 0)'dan (1, 0)'a kadar x-ekseni

d. Saat yönünün tersinde (1, 0)'dan yeniden (1, 0)'a kadar $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi$, astroidi

33. a. Tam diferansiyel form Aşağıdaki diferansiyel form tamsa, a, b ve c arasındaki ilişki nedir?

$$(ay^2 + 2czx)\, dx + y(bx + cz)\, dy + (ay^2 + cx^2)\, dz$$

b. Gradiyent Alan Hangi b ve c değerlerinde

$$\mathbf{F} = (y^2 + 2czx)\mathbf{i} + y(bx + cz)\mathbf{j} + (y^2 + cx^2)\mathbf{k}$$

bir gradiyent alan olur?

34. Bir eğrisel integralin gradiyenti $\mathbf{F} = \nabla f$'nin korunmalı bir vektör alanı ve

$$g(x, y, z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

olduğunu varsayın. $\nabla g = \mathbf{F}$ olduğunu gösterin.

35. En az iş yolu Bir $\mathbf{F}$ kuvvet alanının bir parçacığı iki yer arasında hareket ettirirken en az iş yapacağı yolu bulmanız istenmektedir. Yaptığınız çabuk bir hesap $\mathbf{F}$'nin korunmalı olduğunu gösterir. Nasıl yanıt verirsiniz? Yanıtınızı açıklayın.

36. Açıklayıcı bir deney Deneyle, bir $\mathbf{F}$ kuvvet alanının bir cismi A'dan B'ye kadar C_1 yolu boyunca götürmekle cismi A'dan B'ye C_2 yolundan götürmekle yapacağı işin yarısını yaptığını buluyorsunuz. $\mathbf{F}$ hakkında ne sonuca varırsınız? Yanıtınızı açıklayın.

37. Sabit kuvvetin işi Sabit $\mathbf{F} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ kuvvet alanı ile bir parçacığı A'dan B'ye götürmekle yapılan işin $W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$ olduğunu gösterin.

38. Yer çekimi alanı

a. Aşağıdaki yerçekimi alanı için bir potansiyel fonksiyonu bulun.

$$\mathbf{F} = -GmM \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \qquad (G,\ m \text{ ve } M \text{ sabit})$$

b. P_1 ve P_2 orijinden s_1 ve s_2 uzaklıkta noktalar olsun. (a)'daki yerçekimi alanının bir parçacığı P_1'den P_2'ye kadar hareket ettirmek için yapması gereken işin

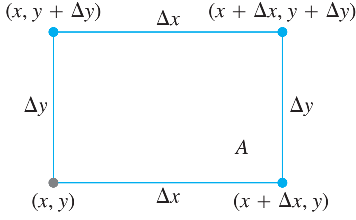
$$GmM\left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}\right)$$

olduğunu gösterin.

16.4 Düzlemde Green Teoremi

Bölüm 16.2, Tablo 16.2'den her $\int_C M\, dx + N\, dy$ eğrisel integralinin bir $\int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ akış integrali olarak yazılabileceğini biliyoruz. İntegral yoldan bağımsız ise yani $\mathbf{F}$ alanı korunmalı ise (temel varsayımların sağlandığı bir bölge üzerinde), alanın bir potansiyel fonksiyonundan integrali kolayca hesaplayabiliriz. Bu bölümde, korunmalı olmayan fakat xy-düzleminde bir akış integrali veya kapalı bir eğri üzerinde akı integrali ise bir vektör alanının integralinin nasıl hesaplanacağı üzerinde duracağız. Bunu yapmanın yolu, eğrisel integrali eğrinin çevrelediği bölge üzerindeki bir iki katlı integrale dönüştüren ve Green Teoremi olarak bilinen sonuçtur.

Akışkan akışlarının hız alanları cinsinden konuşacağız, çünkü akışkan akışlarını resmetmesi kolaydır. Ancak, Green Teoreminin belirli matematiksel koşulları sağlayan herhangi bir vektör alanına uygulanabileceğini unutmamanızı hatırlatırız. Geçerliliği alanın belirli bir fiziksel yorumu olup olmamasına bağlı değildir.



ŞEKİL 16.24 Bir vektör alanının bir (x, y) noktasındaki diverjansını (akı yoğunluğunu) tanımlamak için dikdörtgen.

Diverjans

Green Teoremi için iki yeni fikre ihtiyacımız vardır. Birincisi, bazen fizikçilerin ve mühendislerin vektör alanının *akı yoğunluğu* dedikleri, bir vektör alınının bir noktadaki *diverjansı* fikridir. Bunu aşağıdaki gibi elde ederiz.

$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$'nin düzlemdeki bir akışkan akışının hız alanı olduğunu ve M ile N'nin birinci mertebe kısmi türevlerinin bir R bölgesinin her noktasında sürekli olduklarını varsayın. (x, y) noktası R'de bir nokta ve A da, bir köşesi (x, y)'de bulunan ve tümüyle, içiyle birlikte, R'de bulunan bir dikdörtgen olsun (Şekil 16.24). Koordinat eksenlerine paralel olan dikdörtgenin kenarlarının uzunlukları Δx ve Δy'dir. Akışkanın dikdörtgeni alt kenardan terk etme hızı yaklaşık olarak

$$\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{j})\, \Delta x = -N(x, y)\Delta x$$

olur. Bu, (x, y)'deki hızın dışarı giden normal yönündeki skaler bileşeni kere doğru parçasının uzunluğudur. Örneğin hız metre bölü saniye ise, çıkış hızı metre bölü saniye kere metrekare bölü saniye olacaktır. Akışkanın diğer üç kenarı, dışarıyı gösteren normalleri yönünde geçiş hızları benzer şekilde hesaplanabilir. Buna göre,

Çıkış Oranları : Üst: $\mathbf{F}(x, y + \Delta y) \cdot \mathbf{j}\, \Delta x = N(x, y + \Delta y)\Delta x$

Alt: $\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{j})\, \Delta x = -N(x, y)\Delta x$

Sağ: $\mathbf{F}(x + \Delta x, y) \cdot \mathbf{i}\, \Delta y = M(x + \Delta x, y)\Delta y$

Sol: $\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{i})\, \Delta y = -M(x, y)\Delta y$

elde ederiz. Karşılıklı çiftleri birleştirmek

Üst ve alt: $$(N(x, y + \Delta y) - N(x, y))\Delta x \approx \left(\frac{\partial N}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x$$

Sağ ve sol: $$(M(x + \Delta x, y) - M(x, y))\Delta y \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y$$

verir. Bu son iki denklemi toplamak

$$\text{Dikdörtgen sınırındaki akı} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y$$

verir. Şimdi bunu $\Delta x \Delta y$ ile bölerek dikdörtgen için birim alan başına toplam akıyı veya akı yoğunluğunu buluruz:

$$\frac{\text{Dikdörtgen sınırındaki akı}}{\text{Dikdörtgen alanı}} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)$$

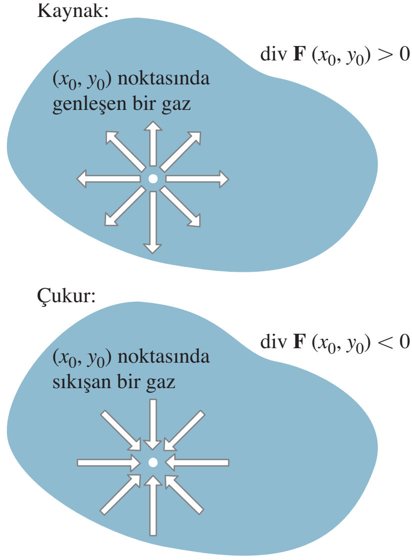
Son olarak, Δx ve Δy'yi sıfıra götürerek, $\mathbf{F}$'nin (x, y) noktasındaki akı yoğunluğu dediğimiz şeyi tanımlarız. Matematikte, akı yoğunluğuna $\mathbf{F}$'nin diverjansı deriz. Sembolü, div $\mathbf{F}$'dir ve "F'nin diverjansı" veya "div $\mathbf{F}$" olarak okunur.

TANIM **Diverjans (Akı Yoğunluğu)**

Bir $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ vektör alanının (x, y) noktasındaki **akı yoğunluğu** veya diverjansı

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \tag{1}$$

dir.



ŞEKİL 16.25 Bir gaz bir (x_0, y_0) noktasında genişliyorsa, akış doğrularının diverjansı pozitiftir; gaz sıkışıyorsa diverjans negatiftir.

Sezgisel olarak, bir gaz bir (x_0, y_0) noktasında genleşiyorsa, akış çizgileri o noktada ıraksayacaktır (isim buradan gelir, İngilizce'de diverjans [divergence] ıraksayan demektir) ve gaz (x_0, y_0) çevresindeki küçük bir dikdörtgenden dışarı akacağı için, **F**'nin (x_0, y_0)'daki diverjansı pozitif olacaktır. Gaz, genleşmek yerine sıkışıyorsa, diverjans negatif olacaktır (Şekil 16.25'e bakın).

ÖRNEK 1 Diverjans Bulmak

$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y)\mathbf{i} + (xy - y^2)\mathbf{j}$'nin diverjansını bulun.

Çözüm (1) Denklemindeki formülü kullanırız:

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{F} &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y) + \frac{\partial}{\partial y}(xy - y^2) \\ &= 2x + x - 2y = 3x - 2y\end{aligned}$$

■

Bir Eksen Etrafında Dönmek: Rotasyonelin k-Bileşeni

Green Teoremi için gerek duyduğumuz ikinci fikir, düzlemsel bir bölgede akan bir akışkan içindeki bir noktada bir çarkın nasıl döndüğünün ölçülmesi ile ilgilidir. Bu fikir, farklı noktalarda bölgeye dik olarak yerleştirilen eksenler etrafında akışkanın nasıl döndüğü hakkında bazı sezgiler verir. Fizikçiler bazen buna bir **F** vektör alanının bir noktadaki *dolaşım yoğunluğu* derler. Bunu elde etmek için

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

vektör alanına ve A dikdörtgenine döneriz. Dikdörtgen Şekil 16.26'da yeniden çizilmiştir.

F alanının A'nın sınırındaki saat yönünün tersine dolaşımı kenarlardaki akış hızlarının toplamıdır. Alt kenar için, akış hızı yaklaşık olarak,

$$\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{i}\, \Delta x = M(x, y)\Delta x$$

olur. Bu, $\mathbf{F}(x, y)$ hızının **i** teğet vektörü yönündeki skaler bileşeni kere doğru parçasının uzunluğudur. Diğer kenarlardaki saat yönünün tersine akış hızları benzer şekilde hesaplanabilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}&\text{Üst:} && \mathbf{F}(x, y + \Delta y) \cdot (-\mathbf{i})\, \Delta x = -M(x, y + \Delta y)\Delta x \\ &\text{Alt:} && \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{i}\, \Delta x = M(x, y)\Delta x \\ &\text{Sağ:} && \mathbf{F}(x + \Delta x, y) \cdot \mathbf{j}\, \Delta y = N(x + \Delta x, y)\Delta y \\ &\text{Sol:} && \mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{j})\, \Delta y = -N(x, y)\Delta y.\end{aligned}$$

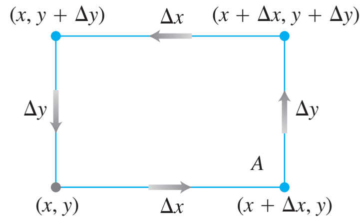
elde ederiz. Karşılıklı çiftleri toplamak

Üst ve alt:

$$-(M(x, y + \Delta y) - M(x, y))\Delta x \approx -\left(\frac{\partial M}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x$$

Sağ ve sol:

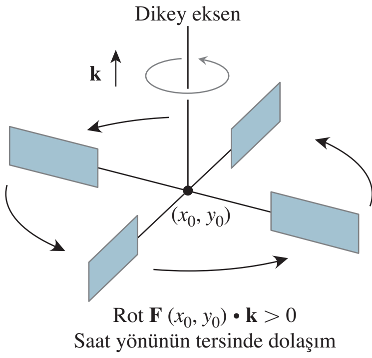
$$(N(x + \Delta x, y) - N(x, y))\Delta y \approx \left(\frac{\partial N}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y$$



ŞEKİL 16.26 Bir vektör alanının bir (x, y) noktasındaki rotasyoneli (dolaşım yoğunluğunu) tanımlamak için dikdörtgen (curl = rotasyonel ~ dönerek hareket etmek)

verir. Bu son iki denklemi toplamak ve $\Delta x \Delta y$ ile bölmek dikdörtgen için bir dolaşım yoğunluğu tahmini verir:

$$\frac{\text{Dikdörtgen sınırındaki akı}}{\text{Dikdörtgen alanı}} \approx \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$



Dikey eksen
k
(x_0, y_0)
Rot **F** (x_0, y_0) • **k** < 0
Saat yönünde dolaşım

ŞEKİL 16.27 Sıkıştırılamaz bir akışkanın bir düzlem bölge üzerindeki akışında, rotasyonelin **k**-bileşeni akışkanın bir noktadaki dönme hızını ölçer. Dönmenin saat yönünün tersine olduğu noktalarda rotasyonel pozitif, dönmenin saat yönünde olduğu noktalarda negatiftir.

Son olarak, Δx ve Δy'yi sıfıra götürerek, **F**'nin (x, y) noktasındaki *dolaşım yoğunluğu* dediğimiz şeyi tanımlarız.

Düzlem için dolaşım yoğunluğunun pozitif yönü, dikey eksen etrafında, (dikey) birim vektör **k**'nın ucundan aşağıya *xy*-düzlemine bakıldığında, *saat yönünün tersine* dönmedir (Şekil 16.27). Dolaşım değeri aslında bölüm 16.27'de tanımlayacağımız, bir **F** vektör alanının *rotasyoneli* denen, daha genel bir dolaşım vektörünün **k**-bileşenidir. Green Teoremi için sadece bu **k**-bileşenine ihtiyacımız vardır.

TANIM Rotasyonelin k-Bileşeni (Dolaşım Yoğunluğu)

Bir $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ vektör alanının bir (x, y) noktasındaki **rotasyonelinin (dolaşım yoğunluğu) k-bileşeni**

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \qquad (2)$$

skaleridir.

xy-düzlemindeki bir bölge civarında ince bir tabaka üzerinde su hareket ediyorsa, bir (x_0, y_0) noktasındaki dolaşımın, veya rotasyonelin **k**-bileşeni, (x_0, y_0)'a, ekseni düzleme dik olarak (yani **k**'ya paralel), küçük bir çark konulursa, çarkın ne hızla ve hangi yönde döneceğini ölçer (Şekil 16.27).

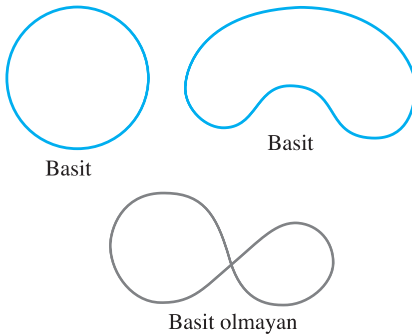
ÖRNEK 2 Rotasyonelin **k**-Bileşenini Bulmak

Aşağıdaki vektör alanının rotasyonelinin **k**-bileşenini bulun.

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y)\mathbf{i} + (xy - y^2)\mathbf{j}.$$

Çözüm (2) Denklemindeki formülü kullanırız:

$$(\text{rot } \mathbf{F}) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xy - y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y) = y + 1.$$ ■



ŞEKİL 16.28 Green Teoremini ispatlarken, iki çeşit kapalı eğri kullanırız, basit ve basit olmayan. Basit eğriler kendilerini kesmezler. Bir çember basittir, ama bir 8 şekli basit değildir.

Green Teoreminin İki Formu

Bir formuyla Green Teoremi, uygun koşullar altında bir vektör alanının düzlemdeki basit kapalı bir eğri üzerinden dışarıya doğru akısının (Şekil 16.28), alanın diverjansının eğrinin çevrelediği bölgedeki iki katlı integraline eşit olduğunu söyler. Bölüm 16.2'deki (3) ve (4) denklemlerindeki akı formüllerini hatırlayın.

TEOREM 3 Green Teoremi (Akı-Diverjans veya Normal Form)

Bir $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ alanının basit kapalı bir *C* eğrisi üzerinden dışarıya doğru akısı div **F**'nin *C*'nin çevrelediği *R* bölgesindeki iki katlı integraline eşittir.

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \oint_C M\, dy - N\, dx = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy \qquad (3)$$

Dışarıya doğru akı — Diverjans integrali

Başka bir formuyla Green Teoremi, bir vektör alanının basit kapalı bir eğri etrafındaki saat yönünün tersine dolaşımının, alanın rotasyonelinin **k**-bileşeninin eğrinin çevrelediği bölgedeki iki katlı integrali olduğunu söyler. Bölüm 16.2'de dolaşım tanımı için (2) Denklemini hatırlayın.

TEOREM 4 Green Teoremi (Dolaşım–Rotasyonel veya Teğet Form)

Bir $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ alanının düzlemde basit kapalı bir C eğrisi etrafındaki saat yönünün tersine dolaşımı, **F**'nin rotasyonelinin C eğrisinin çevrelediği R bölgesindeki iki katlı integraline eşittir:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{4}$$

Saat yönünün tersi dolaşımı — Rot integrali

Green Teoreminin iki formu eşdeğerdir. (3) Denklemini $\mathbf{G}_1 = N\mathbf{i} - M\mathbf{j}$ alanına uygulamak (4) Denklemini verir ve (4) Denklemini $\mathbf{G}_2 = -N\mathbf{i} + M\mathbf{j}$ alanına uygulamak (3) Denklemini verir.

Matematiksel Varsayımlar

Green Teoreminin geçerli olması için iki çeşit varsayıma ihtiyacımız vardır. İlk olarak, integrallerinin varlığını garantilemek için, M ve N üzerine koşullar koymamız gerekir. Genel varsayımlar, C ve R'yi içeren bir açık bölgenin her noktasında M, N ve birinci mertebe kısmi türevlerinin sürekli olduklarıdır. İkinci olarak, C eğrisi üzerinde geometrik koşullar bulunmalıdır. Basit, kapalı olmalı ve M ve N'yi integre edebileceğimiz parçalardan oluşmalıdır. Genel varsayımlar C'nin parçalı olarak düzgün olduğudur. Ancak, burada Green Teoremi için vereceğimiz ispat R'nin şekli hakkında varsayımlar da içerir. Daha ileri kitaplarda daha az koşullu ispatlar bulabilirsiniz. Önce birkaç örneğe bakalım.

ÖRNEK 3 Green Teoremini Desteklemek

Green teoreminin iki şeklini de

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

alanı ve

$$C:\quad \mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

birim çemberiyle çevrili R bölgesi için doğrulayın.

Çözüm Önce şunları biliyoruz:

$$M = \cos t - \sin t, \qquad dx = d(\cos t) = -\sin t\,dt,$$

$$N = \cos t, \qquad dy = d(\sin t) = \cos t\,dt,$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = -1, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial N}{\partial y} = 0$$

(3) Denkleminin iki tarafı:

$$\oint_C M\,dy - N\,dx = \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \sin t)(\cos t\,dt) - (\cos t)(-\sin t\,dt)$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \pi$$
$$\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_R (1 + 0)\,dx\,dy$$
$$= \iint_R dx\,dy = \text{birim çemberin alanı} = \pi$$

ve (4) Denkleminin iki tarafı:

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \sin t)(-\sin t\,dt) + (\cos t)(\cos t\,dt)$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t + 1)\,dt = 2\pi$$
$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{dy}\right) dx\,dy = \iint_R (1 - (-1))\,dx\,dy = 2\iint_R dx\,dy = 2\pi$$

dir. ■

Green Teoremiyle Eğrisel İntegralleri Hesaplamak

Farklı eğrileri art arda ekleyerek kapalı bir C eğrisi oluşturursak, bir eğrisel integrali C üzerinde hesaplama işlemi oldukça uzun olabilir, çünkü hesaplanması zor bir çok integral içerir. Ancak, C Green Teoreminin uygulanabileceği bir R bölgesini çevreliyorsa, Green Teoremini kullanarak C üzerindeki eğrisel integral R üzerinde iki katlı bir integrale dönüştürülebilir.

ÖRNEK 4 Green Teoremini Kullanarak Bir Eğrisel İntegral Hesaplamak

C, birinci dörtte bir bölgeden $x = 1$ ve $y = 1$ doğrularıyla kesilmiş kare olmak üzere,

$$\oint_C xy\,dy - y^2\,dx$$

integralini hesaplayın.

Çözüm Eğrisel integrali kare üzerinde iki katlı bir integrale dönüştürmek için Green Teoreminin iki formunu da kullanabiliriz.

1. *Normal Form Denklemi* (3) *ile*: $M = xy$, $N = y^2$ ve C ile R'yi karenin sınırı ve içi olarak almak

$$\oint_C xy\,dy - y^2\,dx = \iint_R (y + 2y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 3y\,dx\,dy$$
$$= \int_0^1 \Big[3xy\Big]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 3y\,dy = \frac{3}{2}y^2\Big]_0^1 = \frac{3}{2}$$

verir.

2. *Teğet Form Denklemi* (4) *ile*: $M = -y^2$ ve $N = xy$ almak aynı sonucu verir:

$$\oint_C -y^2\,dx + xy\,dy = \iint_R (y - (-2y))\,dx\,dy = \frac{3}{2}$$

■

ÖRNEK 5 Dışarı Akıyı Bulmak

$\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ alanının dışarı doğru akısını $x = \pm 1$ ve $y = \pm 1$ doğrularıyla sınırlanan karede hesaplayın.

Çözüm Akıyı bir eğrisel integralle hesaplamak her biri karenin bir kenarı için olmak üzere dört integrasyon gerektirecektir. Green Teoremiyle, eğrisel integrali tek bir iki katlı integrale dönüştürebiliriz. $M = x$, $N = y^2$, C kare ve R karenin içi olmak üzere,

$$\text{Akı} = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \oint_C M\,dy - N\,dx$$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad \text{Green Teoremi}$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (1 + 2y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left[x + 2xy\right]_{x=-1}^{x=1} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} (2 + 4y)\,dy = \left[2y + 2y^2\right]_{-1}^{1} = 4$$

buluruz. ■

Green Teoreminin Özel Bölgeler İçin İspatı

C, xy-düzleminde eksenlere paralel doğruların iki noktadan fazla yerde kesmedikleri düzgün basit, kapalı bir eğri olsun. R de C'nin çevrelediği bölge olsun ve M, N ve birinci mertebe kısmi türevlerinin C ve R'yi içeren açık bir bölgenin her noktasında sürekli olduklarını varsayın. Green Teoreminin dolaşım–rotasyonel şeklini,

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{5}$$

ispatlamak istiyoruz.

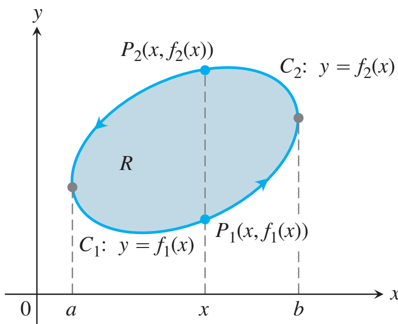
Şekil 16.29 yönlü iki parçadan oluşmuş C'yi göstermektedir:

$$C_1: \quad y = f_1(x), \quad a \le x \le b, \qquad C_2: \quad y = f_2(x), \quad b \ge x \ge a$$

a ile b arasındaki herhangi bir x için $\partial M/\partial y$'yi $y = f_1(x)$'ten $y = f_2(x)$'e kadar y'ye göre integre edip

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy = M(x, y)\Big]_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} = M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))$$

elde ederiz.



ŞEKİL 16.29 C sınır eğrisi $y = f_1(x)$'in grafiği C_1 ve $y = f_2(x)$'in grafiği C_2'den oluşmuştur.

Sonra bunu a'dan b'ye kadar x'e göre integre edebiliriz:

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\, dy\, dx &= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))]\, dx \\ &= -\int_b^a M(x, f_2(x))\, dx - \int_a^b M(x, f_1(x))\, dx \\ &= -\int_{C_2} M\, dx - \int_{C_1} M\, dx \\ &= -\oint_C M\, dx\end{aligned}$$

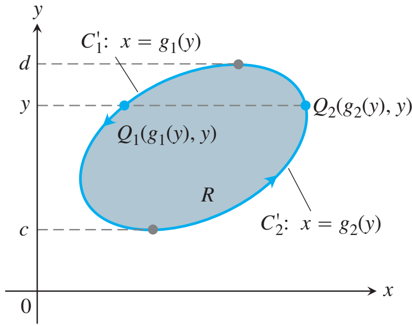
Dolayısıyla,

$$\oint_C M\, dx = \iint_R \left(-\frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy \qquad (6)$$

olur. (6) Denklemi, (5) Denklemi için gerekli olan sonucun yarısıdır. Diğer yarısını $\partial N/\partial x$'i Şekil 16.30'da görüldüğü gibi önce x'e, sonra da y'ye göre integre ederek bulabiliriz. Bu şekil, Şekil 16.29'daki C eğrisinin yönlü C_1': $x = g_1(y)$, $d \geq y \geq c$ ve C_2': $x = g_2(y)$, $c \leq y \leq d$ eğrilerine bölünmüş olarak göstermektedir. İki katlı integralin sonucu

$$\oint_C N\, dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\, dx\, dy \qquad (7)$$

olur. (6) ve (7) Denklemlerini toplamak (5) Denklemini verir. Bu ispatı tamamlar. ■



ŞEKİL 16.30 C sınır eğrisi $x = g_1(y)$'nin grafiği C_1' ve $x = g_2(y)$'nin grafiği C_2''den oluşmuştur.

İspatı Başka Bölgelere Genişletmek

Şimdi yapmış olduğumuz tartışma Şekil 16.31'deki dikdörtgene doğrudan uygulanamaz, çünkü $x = a$, $x = b$, $y = c$ ve $y = d$ bölgenin sınırlarını iki noktadan fazla yerden keser. Ancak, C sınırını dört tane

$$C_1:\quad y = c,\quad a \leq x \leq b, \qquad C_2:\quad x = b,\quad c \leq y \leq d$$

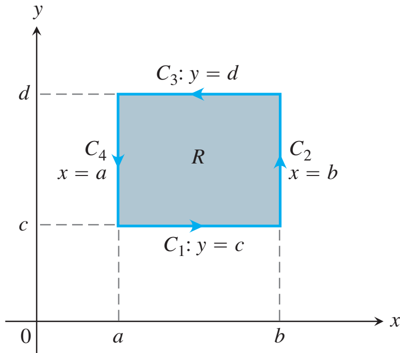
$$C_3:\quad y = d,\quad b \geq x \geq a, \qquad C_4:\quad x = a,\quad d \geq y \geq c$$

yönlü doğru parçasına bölersek, tartışmayı aşağıdaki şekilde değiştirebiliriz.

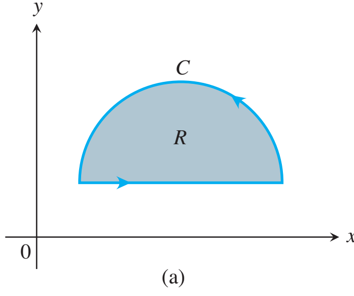
(7) Denkleminin ispatındaki gibi ilerleyerek,

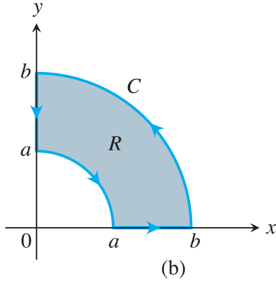
$$\begin{aligned}\int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x}\, dx\, dy &= \int_c^d (N(b, y) - N(a, y))\, dy \\ &= \int_c^d N(b, y)\, dy + \int_d^c N(a, y)\, dy \\ &= \int_{C_2} N\, dy + \int_{C_4} N\, dy \qquad (8)\end{aligned}$$

buluruz.



ŞEKİL 16.31 Green Teoremini bir dikdörtgende ispatlamak için, sınırı dört yönlü doğru parçasına böleriz.





ŞEKİL 16.32 Green Teoreminin geçerli olduğu başka bölgeler.

C_1 ve C_3 boyunca y sabit olduğu için, C_3, $\int_{C_1} N\,dy = \int_{C_3} N\,dy = 0$ 'dır, dolayısıyla eşitliği değiştirmeden (8) Denkleminin sağ tarafına $\int_{C_1} N\,dy = \int_{C_3} N\,dy$ ekleyebiliriz. Bunu yaparsak,

$$\int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_C N\,dy \tag{9}$$

elde ederiz. Benzer şekilde,

$$\int_a^b \int_c^d \frac{\partial M}{\partial y}\,dy\,dx = -\oint_C M\,dx \tag{10}$$

olduğunu gösterebiliriz. (9) Denkleminden (10) Denklemini çıkarırsak, yine

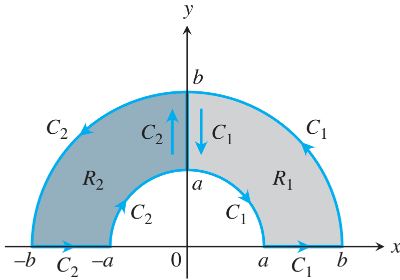
$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

buluruz.

Şekil 16.32'deki gibi bölgelerle de aynı kolaylıkla uğraşılabilir. (5) Denklemi hala geçerlidir. Ayrıca, R_1 ve R_2 bölgelerini ve sınırlarını birleştirerek görebileceğimiz gibi, Şekil 16.33'teki nal şekilli R bölgesine de uygulanabilir. C_1, R_1 ve C_2, R_2'ye Green Teoremi uygulamak

$$\int_{C_1} M\,dx + N\,dy = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$\int_{C_2} M\,dx + N\,dy = \iint_{R_2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy.$$



ŞEKİL 16.33 R_1 ve R_2'yi birleştiren bir R bölgesi.

verir. Bu iki denklemi topladığımızda, C_1 için y-ekseni boyunca b'den a'ya kadar eğrisel integral, aynı doğru üzerinde olan C_2 için ters yöndeki integrali sadeleştirir. Buradan, C eğrisi x-ekseninin $-b$'den $-a$'ya ve a'dan b'ye kadar olan doğru parçaları ile iki yarım çemberden oluşan eğri ve R'de C'nin içindeki bölge olmak üzere,

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

bulunur.

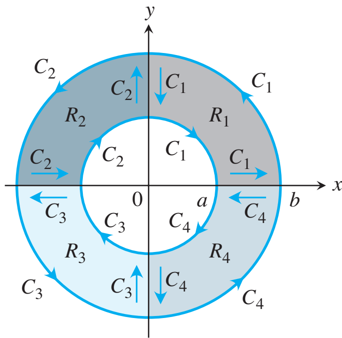
Farklı sınırlar üzerindeki eğrisel integralleri toplayıp tek bir sınır üzerinde bir integral elde etme işlemi sonlu sayıdaki bölgelere de genişletilebilir. Şekil 16.34a'da birinci dörtte bir bölgedeki R_1 bölgesinin saat yönünün tersine yönlendirilmiş sınırı C_1 olsun. Aynı şekilde, diğer üç dörttebir bölge için C_i, $i = 2, 3, 4$ R_i bölgesinin sınırı olsun. Green teoreminden

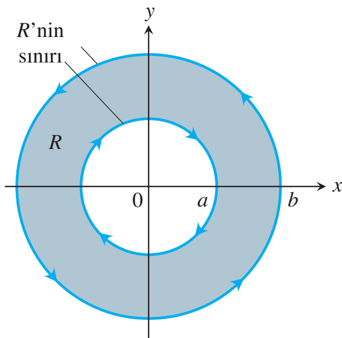
$$\oint_{C_i} M\,dx + N\,dy = \iint_{R_i} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{11}$$

elde edilir. $i = 1, 2, 3, 4$ için (11) Denklemlerini toplar ve

$$\oint_{r=b} (M\,dx + N\,dy) + \oint_{r=a} (M\,dx + N\,dy) = \iint_{\cup R_i} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{12}$$

elde ederiz (Şekil 16.34b).





ŞEKİL 16.34 Dairesel R bölgesi dört küçük bölgeyi birleştirir. Kutupsal koordinatlarda, iç çember için $r = a$, dış çember için $r = b$ ve bölgenin kendisi için $a \le r \le b$'dir.

(12) Denklemi $(\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$'nin dairesel R halkası üzerindeki integralinin, ilerlerken R'yi solumuzda tutacak yönde R'nin tüm sınırı üzerinde $M\,dx + N\,dy$'nin eğrisel integraline eşit olduğunu söyler (Şekil 16.34b).

ÖRNEK 6 Bir Halka Şekli İçin Green Teoremini Gerçeklemek

$$M = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad N = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

ise, R: $h^2 \le x^2 + y^2 \le 1$, $0 < h < 1$, dairesel halkasının üzerinde Green Teoreminin dolaşım şeklini (4 Denklemi) doğrulayın (Şekil 16.35).

Çözüm R'nin sınırı, t artarken saat yönünün tersine dönen

$$C_1: \quad x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

çemberi ve θ artarken saat yönünde dönen

$$C_h: \quad x = h\cos\theta, \qquad y = -h\sin\theta, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

çemberinden oluşur. M ve N fonksiyonları ile birinci mertebe kısmi türevleri R üzerinde süreklidir. Üstelik,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2)(-1) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

dir. Dolayısıyla

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_R 0\,dx\,dy = 0$$

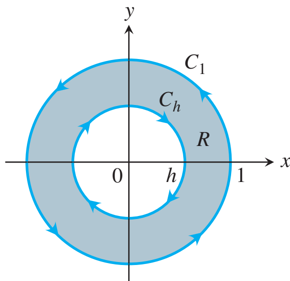
bulunur.

$M\,dx + N\,dy$'nin R'nin sınırı üzerindeki integrali

$$\int_C M\,dx + N\,dy = \oint_{C_1} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} + \oint_{C_h} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt - \int_0^{2\pi} \frac{h^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{h^2}\,d\theta$$

$$= 2\pi - 2\pi = 0 \text{ olur.}$$ ■



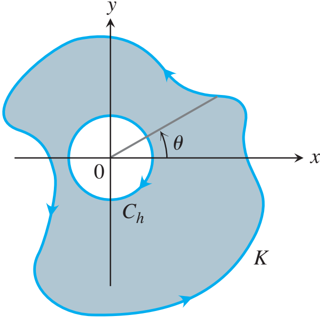
ŞEKİL 16.35 Görüldüğü gibi Green Teoremi sınırlar boyunca integral alınarak dairesel R bölgesine uygulanabilir (Örnek 6).

Örnek 6'daki M ve N fonksiyonları (0, 0)'da süreksizdirler, dolayısıyla Green Teoremini C_1 çemberi ve içindeki bölgeye uygulayamayız. Orijini dışlamamız gerekir. Bunu C_h'nin içindeki noktaları dışlayarak yaparız.

Örnek 6'daki C_1 çemberi yerine C_h'yi çevreleyen bir elips veya herhangi bir basit kapalı K eğrisi kullanabiliriz (Şekil 16.36). Sonuç yine

$$\oint_K (M\,dx + N\,dy) + \oint_{C_h} (M\,dx + N\,dy) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dy\,dx = 0,$$

olur.



ŞEKİL 16.36 C_h çemberi ve K eğrisiyle sınırlı bölge.

Bu da, bu şekildeki herhangi bir K eğrisi için, şaşırtıcı

$$\oint_K (M\,dx + N\,dy) = 2\pi$$

sonucunu verir. Bu sonucu kutupsal koordinatlara dönerek açıklayabiliriz.

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$
$$dx = -r\sin\theta\,d\theta + \cos\theta\,dr, \qquad dy = r\cos\theta\,d\theta + \sin\theta\,dr$$

ile,

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = \frac{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,d\theta}{r^2} = d\theta$$

elde ederiz ve K'yi bir kere saat yönünün tersine dolaşırsak θ, 2π kadar artar.

ALIŞTIRMALAR 16.4

Green Teoremini Gerçeklemek

1–4 alıştırmalarında, $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ alanı için (3) ve (4) denklemlerinin iki tarafını da hesaplayarak Green Teoremini gerçekleyin. Her durumda integrasyon bölgelerini R: $x^2 + y^2 \le a^2$ dairesi ve onu sınırlayan C: $\mathbf{r} = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$, çemberi olarak alın.

1. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

2. $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$

3. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F} = -x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$

Saat Yönünün Tersine Dolaşım ve Dışarı Doğru Akı

5–10 alıştırmalarında $\mathbf{F}$'nin C eğrisi üzerinde saat yönünün tersine dolaşımını ve dışarı doğru akısını Green Teoremiyle bulun.

5. $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$
C: $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ ile sınırlı kare.

6. $\mathbf{F} = (x^2 + 4y)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j}$
C: $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ ile sınırlı kare.

7. $\mathbf{F} = (y^2 - x^2)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$
C: $y = 0, x = 3$ ve $y = x$ ile sınırlı üçgen.

8. $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} - (x^2 + y^2)\mathbf{j}$
C: $y = 0, x = 1$ ve $y = x$ ile sınırlı üçgen.

9. $\mathbf{F} = (x + e^x\sin y)\mathbf{i} + (x + e^x\cos y)\mathbf{j}$
C: $r^2 = \cos 2\theta$ fiyongunun sağ döngüsü

10. $\mathbf{F} = \left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)\mathbf{i} + \ln(x^2 + y^2)\mathbf{j}$
C: Kutupsal koordinatlarda $1 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi$ eşitsizlikleriyle tanımlı bölgenin sınırı.

11. Birinci bölgede, $y = x^2$ ve $y = x$ eğrileriyle sınırlı bölgenin sınırı üzerinde $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ alanının saat yönünün tersine dolaşımını ve dışarı doğru akısını bulun.

12. Birinci bölgeden $x = \pi/2$ ve $y = \pi/2$ doğrularıyla kesilen kare üzerinde $\mathbf{F} = (-\sin y)\mathbf{i} + (x\cos y)\mathbf{j}$ alanının saat yönünün tersine dolaşımını ve dışarı doğru akısını bulun.

13. $r = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$, kardioidi üzerinde

$$\mathbf{F} = \left(3xy - \frac{x}{1 + y^2}\right)\mathbf{i} + (e^x + \tan^{-1}y)\mathbf{j}$$

alanının dışarıya doğru akısını bulun.

14. Üstten $y = 3 - x^2$ eğrisi ve alttan $y = x^4 + 1$ eğrisi ile sınırlanan bölgenin sınırı üzerinde $\mathbf{F} = (y + e^x\ln y)\mathbf{i} + (e^x/y)\mathbf{j}$ alanının saat yönünün tersine dolaşımını bulun.

İş

15 ve 16 alıştırmalarında, bir parçacığı verilen eğri üzerinde saat yönünün tersine bir tur döndüren $\mathbf{F}$ tarafından yapılan işi bulun.

15. $\mathbf{F} = 2xy^3\mathbf{i} + 4x^2y^2\mathbf{j}$
C: Birinci bölgede x-ekseni, $x = 1$ doğrusu ve $y = x^3$ eğrisiyle çevrelenen "üçgensel" bölgenin sınırı.

16. $\mathbf{F} = (4x - 2y)\mathbf{i} + (2x - 4y)\mathbf{j}$
C: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ çemberi

Düzlemde Eğrisel İntegralleri Hesaplamak

17–20 alıştırmalarındaki integralleri Green Teoremini uygulayarak hesaplayın.

17. $\oint_C (y^2\,dx + x^2\,dy)$
C: $x = 0$, $x + y = 1$, $y = 0$ ile sınırlı üçgen

18. $\oint_C (3y\,dx + 2x\,dy)$
C: $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \sin x$'in sınırı

19. $\oint_C (6y + x)\,dx + (y + 2x)\,dy$

C: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ çemberi

20. $\oint_C (2x + y^2)\,dx + (2xy + 3y)\,dy$

C: Düzlemde Green Teoreminin geçerli olduğu herhangi bir basit kapalı eğri

Green Teoremiyle Alan Hesaplamak

Düzlemde herhangi bir basit kapalı C eğrisi ve onun çevrelediği R bölgesi Green Teoreminin hipotezlerini sağlıyorsa, R'nin alanı aşağıdaki formülle verilir:

Green Teoremi Alan Formülü

$$R\text{'nin alanı} = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx \qquad (13)$$

Bunun nedeni, (3) denkleminin, tersine döndürüldüğünde,

$$R\text{'nin alanı} = \iint_R dy\,dx = \iint_R \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) dy\,dx$$

$$= \oint_C \frac{1}{2}x\,dy - \frac{1}{2}y\,dx$$

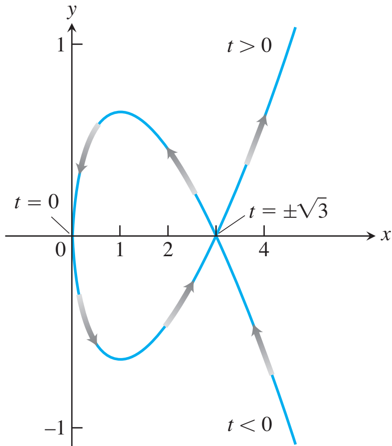
vermesidir. Green Teoremi alan formülünü kullanarak (13 Denklemi) 21–24 alıştırmalarındaki eğrilerle çevrelenen bölgelerin alanlarını bulun.

21. $\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$, çemberi

22. $\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (b\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$, elipsi

23. $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$, astroidi

24. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + ((t^3/3) - t)\mathbf{j}$, $-\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$ eğrisi (Şekle bakın).



Teori ve Örnekler

25. C, Green Teoreminin geçerli olduğu bir bölgenin sınırı olsun. Aşağıdakileri Green Teoremini kullanarak hesaplayın.

a. $\oint_C f(x)\,dx + g(y)\,dy$

b. $\oint_C ky\,dx + hx\,dy$ (k ve h birer sabit)

26. Sadece alana bağlı integral Herhangi bir kare üzerinde

$$\oint_C xy^2\,dx + (x^2y + 2x)\,dy$$

integralinin değerinin karenin sadece karenin alanına bağlı olduğunu, düzlemdeki konumuna bağlı olmadığını gösterin.

27.

$$\oint_C 4x^3y\,dx + x^4\,dy$$

integralinde özel olan şey nedir? Yanıtınızı açıklayın.

28.

$$\oint_C -y^3\,dy + x^3\,dx$$

integralinde özel olan şey nedir? Yanıtınızı açıklayın.

29. Bir eğrisel integral olarak alan R, düzlemde parçalı olarak düzgün, basit bir kapalı C eğrisiyle sınırlı bölge ise,

$$R\text{'nin alanı} = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx$$

olduğunu gösterin.

30. Bir eğrisel integral olarak belirli integral Negatif olmayan bir $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevinin $[a, b]$'de sürekli olduğunu varsayın. C'de xy-düzleminde alttan x-ekseni, üstten f'nin grafiği ve yanlardan $x = a$ ve $x = b$ doğrularıyla çevrili bölgenin sınırı olsun.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\oint_C y\,dx$$

olduğunu gösterin.

31. Alan ve ağırlık merkezi A, xy-düzleminde parçalı olarak düzgün, basit bir kapalı C eğrisiyle sınırlı bölgenin alanı ve $\bar{x}$ de R'nin ağırlık merkezinin x-koordinatı olsun.

$$\frac{1}{2}\oint_C x^2\,dy = -\oint_C xy\,dx = \frac{1}{3}\oint_C x^2\,dy - xy\,dx = A\bar{x}$$

olduğunu gösterin.

32. Eylemsizlik momenti I_y Alıştırma 31'deki bölgenin y-ekseni etrafındaki eylemsizlik momenti olsun.

$$\frac{1}{3}\oint_C x^3\,dy = -\oint_C x^2y\,dx = \frac{1}{4}\oint_C x^3\,dy - x^2y\,dx = I_y$$

olduğunu gösterin.

33. Green Teoremi ve Laplace denklemi Gerekli bütün türevlerin var ve sürekli olduğunu varsayarak, $f(x, y)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

Laplace denklemini sağlıyorsa, Green Teoreminin uygulanabildiği bütün kapalı C eğrileri için

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial y}\,dx - \frac{\partial f}{\partial x}\,dy = 0$$

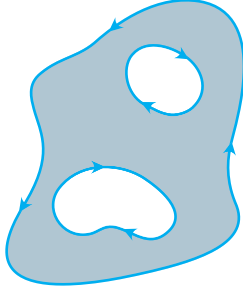
olduğunu gösterin (Tersi de doğrudur: Eğrisel integral her zaman sıfırsa, f Laplace denklemini sağlar).

34. İşi maksimize etmek Düzlemde, saat yönünün tersine yönlenmiş bütün düzgün, basit, kapalı eğriler arasından, üzerinde

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{3}y^3\right)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

kuvvetinin yaptığı işin en büyük olduğu eğriyi bulun (*İpucu*: (rot **F**) • **k** nerede pozitiftir?)

35. Delikler içeren bölgeler Green Teoremi, sınır eğrileri düzgün, basit ve kapalı olduğu ve sınırın her bileşeni üzerinde integral alırken R'yi hep solumuzda tutacak bir yön seçtiğimiz sürece, içinde sonlu sayıda delik bulunduran bir R bölgesinde geçerlidir (Şekil 16.37).



ŞEKİL 16.37 Green Teoremi, birden fazla deliği olan bölgelerde de geçerlidir (Alıştırma 35).

a. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ve C'de $x^2 + y^2 = a^2$ çemberi olsun.

$$\oint_C \nabla f \cdot \mathbf{n}\,ds$$

akı integralini hesaplayın.

b. K, düzlemde (0, 0)'dan geçmeyen herhangi bir düzgün, basit, kapalı eğri olsun. Green Teoremini kullanarak

$$\oint_K \nabla f \cdot \mathbf{n}\,ds$$

integralinin, (0, 0)'ın K'nin içinde bulunup bulunmadığına bağlı olarak iki olası değeri olduğunu gösterin.

36. Bendixson kriteri Düzlemsel bir akışkan akışının *akış çizgileri* akışkanın parçacıkları tarafından çizilen düzgün eğrilerdir. Akışkanın hız alanının $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ vektörleri akış çizgilerinin teğet vektörleridir. Akış, basit bağlantılı bir R bölgesinde (içinde delik veya eksik nokta yok) gerçekleşiyorsa ve R içinde $M_x + N_y \neq 0$ ise, R'deki akış çizgilerinin hiçbirinin kapalı olmadığını gösterin. Başka bir deyişle, akışkanın hiçbir parçacığının R'de kapalı bir yörüngesi yoktur. $M_x + N_y \neq 0$ kriterine kapalı yörüngelerin yokluğu için **Bendixson kriteri** denir.

37. Green Teoreminin özel durumunun ispatını tamamlamak için (7) denklemini türetin.

38. Green Teoreminin genişletilmesinin tartışmasını tamamlamak için (10) denklemini türetin.

39. Korunmalı alanların Rot bileşeni Korunmalı iki boyutlu bir vektör alanının rotasyoneli için herhangi bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızın nedenlerini açıklayın.

40. Korunmalı alanların dolaşımı Green Teoremi korunmalı bir alanın dolaşımı hakkında bir şey söyler mi? Bu bildiğiniz herhangi bir şeyle uyuşur mu? Yanıtınızı açıklayın.

BİLGİSAYAR ARAŞTIRMALARI

Dolaşım Bulmak

41–44 alıştırmalarında, bir BCS ve Green Teoremini kullanarak, bir **F** alanının basit kapalı bir C eğrisi etrafında saat yönünün tersine dolaşımını bulun. Aşağıdaki BCS adımlarını gerçekleştirin:

a. xy-düzleminde C'yi çizin.

b. Green Teoreminin rotasyonel formu için $(\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$ integrandını belirleyin.

c. (a) şıkkındaki çiziminizden integrasyon sınırlarını (iki katlı integral) belirleyin ve dolaşım için rotasyonel integralini hesaplayın.

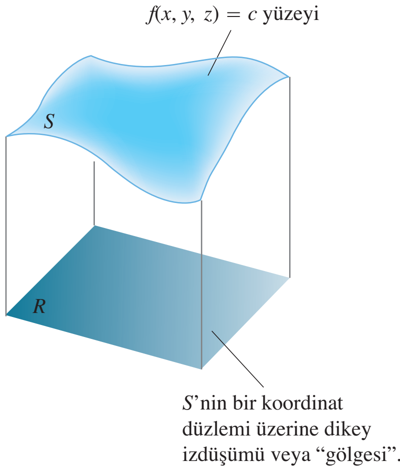
41. $\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} + (x + 3y)\mathbf{j}$, C: $x^2 + 4y^2 = 4$ elipsi

42. $\mathbf{F} = (2x^3 - y^3)\mathbf{i} + (x^3 + y^3)\mathbf{j}$, C: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ elipsi

43. $\mathbf{F} = x^{-1}e^y\mathbf{i} + (e^y \ln x + 2x)\mathbf{j}$,
C: $y = 1 + x^4$ (alttan) ve y = 2 (üstten) ile tanımlı bölgenin sınırı

44. $\mathbf{F} = xe^y\mathbf{i} + 4x^2 \ln y\,\mathbf{j}$,
C: Köşeleri (0, 0), (2, 0) ve (0, 4)'te olan üçgen.

16.5 Yüzey Alanı ve Yüzey İntegralleri



ŞEKİL 16.38 Yakında göreceğimiz gibi, bir $g(x, y, z)$ fonksiyonunun uzaydaki bir S yüzeyi üzerindeki integrali S'nin bir koordinat düzlemi üzerine dik izdüşümü veya "gölge"si üzerinde iki katlı bir integral hesaplanarak bulunabilir.

Bir fonksiyonun düzlemde düz bir bölgede integralinin nasıl alınacağını biliyoruz, ama ya fonksiyon eğri bir yüzey üzerinde tanımlıysa? Yüzey integrali denilen bu şeyleri hesaplamak için bunları yüzeyin altındaki koordinat düzleminde, bir bölge üzerinde iki katlı bir integral olarak yeniden yazarız (Şekil 16.38). Yüzey integralleri, bir zardan geçen sıvı akışını veya inmekte olan bir paraşüte yukarı doğru etkiyen kuvvet gibi büyüklükleri hesaplamak için kullanılır.

Yüzey Alanı

Şekil 16.39 altındaki düzlemde bulunan "gölge" bölge R'nin üzerindeki bir S yüzeyini göstermektedir. Yüzey, $f(x, y, z) = c$ denklemiyle tanımlanır. Yüzey **düzgün** (∇f S üzerinde sürekli ve hiç bir zaman yok olmuyorsa) ise, alanını R üzerinde iki katlı bir integral olarak tanımlayabilir ve hesaplayabiliriz. Yüzeyin, gölgesi, R, üzerine izdüşümünün bire-bir olduğunu varsayıyoruz. Yani, R'deki her nokta $f(x, y, z) = c$ eşitliğini sağlayan bir tek (x, y, z) noktasına karşılık gelir.

S'nin alanını tanımlamanın ilk adımı, R üzerinde bir integral tanımlıyor olsaydık yapacak olduğumuz gibi, R bölgesini küçük ΔA_k dikdörtgenlerine bölmektir. Her ΔA_k'nin yukarısında yüzeyin bir $\Delta\sigma_k$ parçası bulunur. Bu $\Delta\sigma_k$ parçasına, bu parçanın bir $T_k(x_k, y_k, z_k)$ noktasındaki teğet düzlemin bir parçası olan ΔP_k paralelkenarı ile yaklaşımda bulunabiliriz. Teğet düzlemdeki bu paralelkenar doğrudan ΔA_k üzerine iz düşer. Daha açık olmak gerekirse, Şekil 16.39'da gösterildiği gibi, ΔA_k'nin arka köşesi C_k'nin tam üzerinde bulunan $T_k(x_k, y_k, z_k)$ noktasını seçeriz. Teğet düzlem R'ye paralelse, ΔP_k, ΔA_k'ye eş olacaktır. Aksi halde, alanı ΔA_k'nin alanından büyük olan bir paralelkenar olacaktır.

Şekil 16.40, $\Delta\sigma_k$ ve ΔP_k'nin büyütülmüş bir görüntüsünü vermekte ve T_k'deki $\nabla f(x_k, y_k, z_k)$ gradiyent vektörünü ve R'ye normal olan bir $\mathbf{p}$ birim vektörünü göstermektedir. Şekil ayrıca, ∇f ile $\mathbf{p}$ arasındaki γ_k açısını da göstermektedir. Şekildeki diğer vektörler, $\mathbf{u}_k$ ve $\mathbf{v}_k$, teğet düzlemdeki ΔP_k parçasının kenarlarında bulunurlar. Böylece, hem $\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k$, hem de ∇f teğet düzleme normaldir.

Şimdi, ileri vektör geometri konularından, $\mathbf{u}_k$ ve $\mathbf{v}_k$ tarafından belirlenen bir paralelkenarın, normali $\mathbf{p}$ olan herhangi bir düzlemdeki izdüşümünün alanının $|(\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k)\cdot\mathbf{p}|$'nin olduğu bilgisine ihtiyacımız var. Bizim durumumuzda, bu

$$|(\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k)\cdot\mathbf{p}| = \Delta A_k$$

ifadesine dönüşür. Takip eden türetmedeki notasyonu basitleştirmek için küçük dikdörtgensel bölgenin *alanını* ΔA_k ile göstereceğiz. Benzer şekilde, bu küçük bölgenin yukarısındaki teğet düzlem parçasının alanını da ΔP_k ile göstereceğiz.

Şimdi, $|\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k|$'nin kendisi ΔP_k'nin alanıdır (vektörel çarpımların standart sonucu), dolayısıyla bu son denklem

$$\underbrace{|\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k|}_{\Delta P_k}\ \underbrace{|\mathbf{p}|}_{1}\ \underbrace{|\cos(\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k \text{ ile } \mathbf{p} \text{ arasındaki açı})|}_{|\cos\gamma_k| \text{ ile aynı çünkü } \nabla f \text{ ve } \mathbf{u}_k\times\mathbf{v}_k\text{'nin her ikisi de teğet düzleme normaldir.}} = \Delta A_k$$

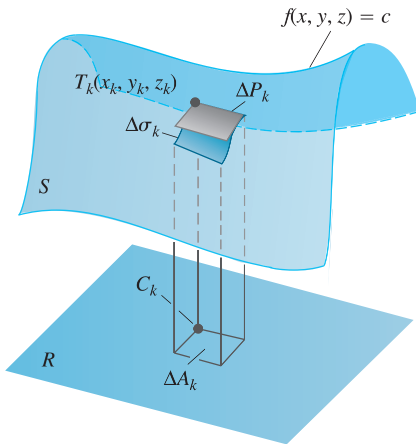
veya, $\gamma_k \neq 0$ olduğu sürece,

$$\Delta P_k|\cos\gamma_k| = \Delta A_k$$

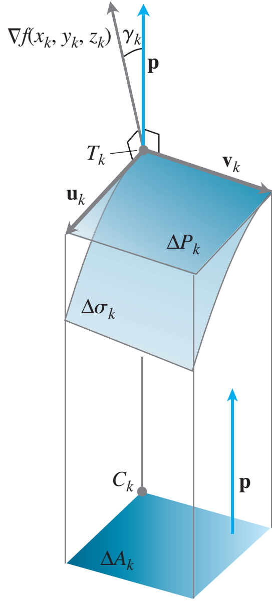
veya

$$\Delta P_k = \frac{\Delta A_k}{|\cos\gamma_k|}$$

haline gelir.



ŞEKİL 16.39 Bir S yüzeyi ve onun altındaki düzlem üzerine dikey izdüşümü. R'yi S'nin düzlem üzerindeki gölgesi olarak düşünebilirsiniz. Teğet düzlem ΔP_k, ΔA_k'nın üzerindeki yüzey parçası $\Delta\sigma_k$'ye yaklaşımda bulunur.



ŞEKİL 16.40 Bir önceki şeklin büyütülmüş görüntüsü. $\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k$ vektörü (burada görünmemektedir) ∇f vektörüne paraleldir, çünkü iki vektör de ΔP_k'nin düzlemine normaldir.

∇f vektörü iz düşüm düzlemine paralel olmadığı ve $\nabla f \cdot \mathbf{p} \neq 0$ olduğu sürece, $\cos \gamma_k \neq 0$ olacaktır.

ΔP_k parçaları, bir araya gelerek S'yi oluşturan $\Delta\sigma_k$ yüzey parçalarına yaklaşımda bulundukları için,

$$\sum \Delta P_k = \sum \frac{\Delta A_k}{|\cos \gamma_k|} \qquad (1)$$

toplamı S'nin alanı demek istediğimiz şeye bir yaklaşım gibi görünmektedir. Ayrıca R'nin bölünüşünü iyileştirirsek, yaklaşım daha da iyi olacak gibi görünmektedir. Aslında, (1) Denkleminin sağındaki toplamlar

$$\iint_R \frac{1}{|\cos \gamma|}\, dA \qquad (2)$$

iki katlı integralinin yaklaşım toplamlarıdır. Bu nedenle S'nin **alanını**, var olduğu taktirde, bu intgralin değeri olarak tanımlarız. Herhangi bir $f(x, y, z) = c$ yüzeyi için, $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = |\nabla f||\mathbf{p}||\cos \gamma|$ olur ve

$$\frac{1}{|\cos \gamma|} = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}$$

bulunur. Bu (2) Denklemiyle birleşerek, alan için pratik bir formül verir.

> **Yüzey Alanı Formülü**
>
> $f(x, y, z) = c$ yüzeyinin kapalı ve sınırlı bir R düzlem bölgesi üzerindeki alanı, $\mathbf{p}$, R'ye normal bir birim vektör ve $\nabla f \cdot \mathbf{p} \neq 0$ olmak üzere
>
> $$\text{Yüzey alanı} = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}\, dA \qquad (3)$$
>
> ile verilir.

Böylece, alan, ∇f'nin büyüklüğünün, ∇f'nin R'ye normal olan skaler bileşeninin büyüklüğüyle bölümünün, R üzerindeki iki katlı integralidir.

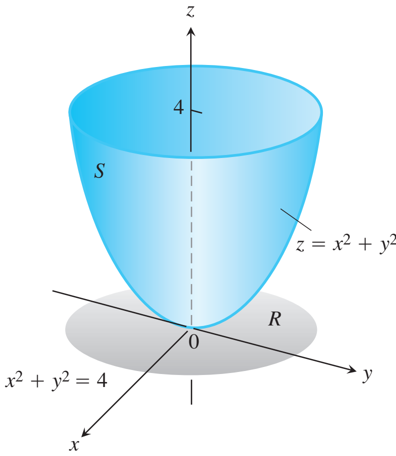
(3) Denklemine R boyunca $\nabla f \cdot \mathbf{p} \neq 0$ ve ∇f'nin sürekli olduğu varsayımlarıyla ulaştık. Ancak, integral var olduğunda değerini, $f(x, y, z) = c$ yüzeyinin R'nin yukarısındaki parçasının alanı olarak tanımlarız (İz düşümün bire-bir varsayıldığını hatırlayın).

Alıştırmalarda (11 Denklemine bakın), yüzeyin $z = f(x, y)$ ile tanımlanması halinde (3) Denkleminin nasıl sadeleştiğini gösteriyoruz.

ÖRNEK 1 Yüzey Alanı Bulmak

$x^2 + y^2 - z = 0$ paraboloidinin altından, $z = 4$ düzlemiyle kesilen yüzeyin alanını bulun.

Çözüm S yüzeyini ve altındaki R bölgesini (xy-düzlemi içinde) çizeriz (Şekil 16.41). S yüzeyi $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$ seviye yüzeyinin bir parçası ve R, xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 \leq 4$ dairesidir. R'nin düzlemine normal bir birim vektör elde etmek için, $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ alabiliriz.



ŞEKİL 16.41 Bu parabolik yüzeyin alanı Örnek 1'de hesaplanmaktadır.

Yüzeydeki herhangi bir (x, y, z) noktasında,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^2 + y^2 - z \\ \nabla f &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k} \\ |\nabla f| &= \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \\ |\nabla f \cdot \mathbf{p}| &= |\nabla f \cdot \mathbf{k}| = |-1| = 1 \end{aligned}$$

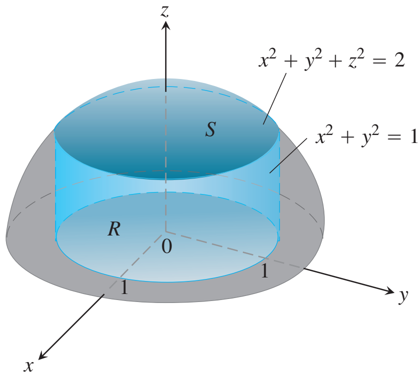
buluruz. R bölgesinde, $dA = dx\,dy$'dir. Buradan

$$\begin{aligned} \text{Yüzey alanı} &= \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}\,dA && \text{(3) Denklemi} \\ &= \iint_{x^2+y^2\le 4} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,dx\,dy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1}\,r\,dr\,d\theta && \text{Kutupsal koordinatlar} \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12}(4r^2 + 1)^{3/2}\right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}(17^{3/2} - 1)\,d\theta = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right) \end{aligned}$$

bulunur. ■

ÖRNEK 2 Yüzey Alanı Bulmak

$x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ z \ge 0$, yarım küresinden $x^2 + y^2 = 1$ silindiriyle kesilen kapağın alanını bulun (Şekil 16.42).



ŞEKİL 16.42 Yarım küreden silindir tarafından kesilen kapağın dikey izdüşümü xy-düzlemindeki R: $x^2 + y^2 \le 1$ dairesi üzerinedir (Örnek 2).

Çözüm S kapağı $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 2$ seviye yüzeyinin bir parçasıdır. xy-düzlemindeki R: $x^2 + y^2 \le 1$ dairesine bire bir iz düşer. $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ vektörü R'nin düzlemine normaldir.

Yüzey üzerinde herhangi bir noktada,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 \\ \nabla f &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \\ |\nabla f| &= 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{2} && \text{Çünkü } S\text{'nin noktalarında } x^2+y^2+z^2 = 2 \text{ dir.} \\ |\nabla f \cdot \mathbf{p}| &= |\nabla f \cdot \mathbf{k}| = |2z| = 2z \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle,

$$\text{Yüzey alanı} = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}\,dA = \iint_R \frac{2\sqrt{2}}{2z}\,dA = \sqrt{2}\iint_R \frac{dA}{z} \tag{4}$$

bulunur. z ile ne yapılacaktır?

z küre üzerindeki bir noktanın koordinatı olduğu için, x ve y cinsinden

$$z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Bu dönüşüm ile (4) Denklemini hesaplamaya devam ederiz:

$$\text{Yüzey alanı} = \sqrt{2}\iint_R \frac{dA}{z} = \sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{dA}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{2-r^2}} \qquad \text{Kutupsal koordinatlar}$$

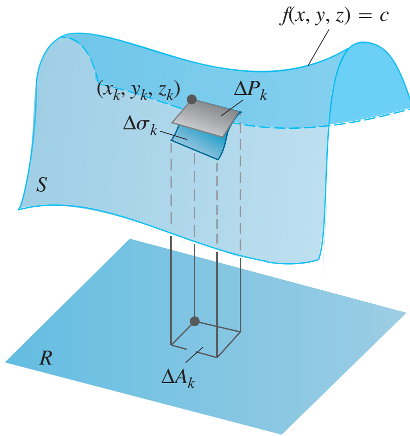
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[-(2-r^2)^{1/2}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{2}-1\right)d\theta = 2\pi\left(2-\sqrt{2}\right)$$

Yüzey İntegralleri

Şimdi, yüzey alanını hesaplamak için geliştirdiğimiz fikirleri kullanarak, bir fonksiyonu bir yüzey üzerinde nasıl integre edeceğimizi göstereceğiz.

Örneğin, elimizde, Şekil 16.43'te gösterildiği gibi, bir $f(x, y, z) = c$ yüzeyi üzerine dağılmış bir elektrik yükü bulunduğunu ve $g(x, y, z)$ fonksiyonunun S üzerindeki her noktada birim alan başına yükü (yük yoğunluğu) verdiğini varsayalım. Bu durumda, S üzerindeki toplam yükü bir integral olarak aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz.



ŞEKİL 16.43 Bir yüzey üzerinde bir elektrik yükünün nasıl dağıldığını biliyorsak, uygun bir değiştirilmiş yüzey integraliyle toplam yükü bulabiliriz.

Yüzeyin altında kalan zemin düzlemdeki gölge bölge R'yi, S'nin yüzey alanını tanımlıyor olsaydık yapacak olduğumuz gibi, küçük dikdörtgenlere böleriz. Böylece, her ΔA_k'nin tam yukarısında, teğet düzlemin bir paralelkenar şekilli bir parçası, ΔP_k, ile yaklaşımda bulunacağımız bir $\Delta\sigma_k$ yüzey parçası bulunur. (Şekil 16.43'e bakın.)

Bu noktaya kadar kuruluş yüzey alanının tanımı gibi ilerler, ama burada ek bir adım atıyoruz: g'yi (x_k, y_k, z_k)'de hesaplar ve $\Delta\sigma_k$ yüzey parçası üzerindeki toplam yüke $g(x_k, y_k, z_k)\Delta P_k$ çarpımıyla yaklaşımda bulunuruz. Bunun mantığı, R'nin bölünüşü yeterince çok dikdörtgenden oluşuyorsa, g'nin değerinin $\Delta\sigma_k$ boyunca neredeyse sabit olacağı ve ΔP_k'nin de neredeyse $\Delta\sigma_k$ ile aynı olacağıdır. Artık S üzerindeki toplam yüke

$$\text{Toplam yük} \approx \sum g(x_k, y_k, z_k)\,\Delta P_k = \sum g(x_k, y_k, z_k)\,\frac{\Delta A_k}{|\cos\gamma_k|}$$

toplamıyla yaklaşımda bulunulabilir.

S'yi tanımlayan f fonksiyonu ve birinci mertebe kısmi türevleri sürekli ve g, S üzerinde sürekliyse, son denklemin sağındaki toplamlar, R'nin bölünüşü her zamanki gibi iyileştirilirken,

$$\iint_R g(x, y, z)\,\frac{dA}{|\cos\gamma|} = \iint_R g(x, y, z)\,\frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}\,dA \tag{5}$$

limitne yaklaşır. Bu limite g'nin S yüzeyi üzerindeki integrali denir ve R'de iki katlı bir integral olarak hesaplanır. İntegralin değeri S yüzeyindeki toplam yüktür.

Bekleyebileceğiniz gibi, (5) denklemindeki bu formül, integral var olduğu sürece, S yüzeyi üzerinde *herhangi* bir g fonksiyonunun integralini tanımlar.

TANIM Yüzey İntegrali

R, $f(x, y, z) = c$ ile tanımlanan S yüzeyinin gölge bölgesi ve g de S'nin noktalarında tanımlanmış sürekli bir fonksiyon ise, ***g*'nin *S* üzerindeki integrali, p** R'ye normal bir birim vektör ve $\nabla f \cdot \mathbf{p} \neq 0$ olmak üzere,

$$\iint_R g(x, y, z) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA \tag{6}$$

integralidir. İntegralin kendisine **yüzey integrali** denir.

(6) Denklemindeki integral farklı uygulamalarda farklı anlamlar taşır. g'nin değeri 1 ise, integral S'nin alanını verir. g bir malzemenin S ile modellenen ince kabuğunun kütle yoğunluğuysa, integral kabuğun kütlesini verir.

(6) Denklemindeki integrali $(|\nabla f|/|\nabla f \cdot \mathbf{p}|)\, dA$) için $d\sigma$ yazarak kısaltabiliriz:

Yüzey Alanı Diferansiyeli ve Yüzey İntegrallerinin Diferansiyel Şekli

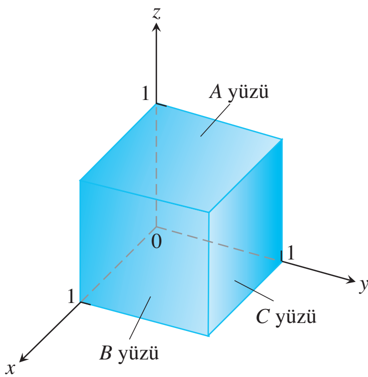
$$d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA \qquad \iint_S g\, d\sigma \tag{7}$$

yüzey alanı diferansiyeli — yüzey integrallerinin diferansiyel şekli

Yüzey integralleri diğer iki katlı integraller gibi davranırlar: iki fonksiyonun toplamının integralinin fonksiyonların integrallerinin toplamı olması gibi. Tanım bölgelerinin toplanabilirliği

$$\iint_S g\, d\sigma = \iint_{S_1} g\, d\sigma + \iint_{S_2} g\, d\sigma + \cdots + \iint_{S_n} g\, d\sigma$$

şeklini alır. Ana fikir şudur; S düzgün eğrilerle sonlu sayıda üst üste binmeyen düzgün parçalara bölünürse (yani, S **parçalı olarak düzgündür**), S üzerindeki integral parçalar üzerindeki integrallerin toplamıdır. Böylece, bir kübün yüzeyi üzerinde bir integral kübün yüzeyleri üzerinde integrallerin toplamıdır. Birbirine eklenmiş plakalardan oluşan bir kablumbağa kabuğu üzerindeki integrali, her plakayı tek tek integre edip, sonuçları toplayarak alırız.



ŞEKİL 16.44 Örnek 3'teki küp.

ÖRNEK 3 Bir Yüzey Üzerinde İntegrasyon

$g(x, y, z) = xyz$'yi birinci sekizde bir bölgeden $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ düzlemleriyle kesilen küp üzerinde integre edin (Şekil 16.44).

Çözüm xyz'yi altı yüz üzerinde integre eder ve sonuçları toplarız. Koordinat düzlemlerinde bulunan yüzlerde $xyz = 0$ olduğu için, kübün yüzeyi üzerinde integral

$$\iint_{\substack{\text{Küp}\\ \text{yüzeyi}}} xyz\, d\sigma = \iint_{A\text{ yüzü}} xyz\, d\sigma + \iint_{B\text{ yüzü}} xyz\, d\sigma + \iint_{C\text{ yüzü}} xyz\, d\sigma$$

haline indirgenir.

A yüzü, xy-düzlemindeki $R_{xy}: 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$ kare bölgesine iz düşen $f(x, y, z) = z = 1$ yüzeyidir. Bu yüzey ve bölge için,

$$\mathbf{p} = \mathbf{k}, \quad \nabla f = \mathbf{k}, \quad |\nabla f| = 1, \quad |\nabla f \cdot \mathbf{p}| = |\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}| = 1$$

$$d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA = \frac{1}{1} dx\, dy = dx\, dy$$

$$xyz = xy(1) = xy$$

ve

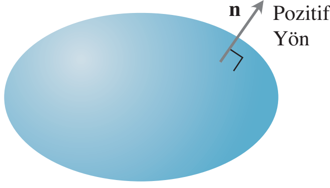
$$\iint_{A \text{ yüzü}} xyz\, d\sigma = \iint_{R_{xy}} xy\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 xy\, dx\, dy = \int_0^1 \frac{y}{2} dy = \frac{1}{4}$$

buluruz.

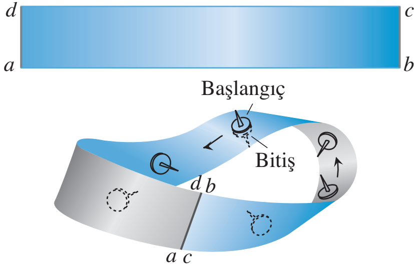
Simetri, xyz'nin B ve C yüzleri üzerindeki integralinin de $1/4$ olduğunu söyler ve

$$\iint_{\substack{\text{Küp} \\ \text{yüzeyi}}} xyz\, d\sigma = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

elde ederiz. ■



ŞEKİL 16.45 Uzaydaki düzgün kapalı yüzeyler yönlendirilebilirler. Dışarı doğru birim normal vektör her noktada pozitif yönü tanımlar.



ŞEKİL 16.46 Bir Möbius şeridi yapmak için, dikdörtgen bir *abcd* kağıt parçası alın, *bc* ucunu bir kere döndürün ve *a*'yı *c* ile ve *b*'yi *d* ile eşleştirecek şekilde uçları birleştirin. Möbius şeridi, yönlendirilemeyen veya tek yüzlü bir yüzeydir.

Yönlendirme

Düzgün bir S yüzeyi üzerinde, konumla sürekli olarak değişen bir **n** birim normal vektör alanı tanımlanabiliyorsa, S'ye **yönlendirilebilir** veya iki yüzlü (iki taraflı) deriz. Yönlendirilebilir bir yüzeyin herhangi bir parçası veya bir bölümü de yönlendirilebilirdir. Küreler ve uzaydaki diğer düzgün kapalı yüzeyler (cisimleri çevreleyen düzgün yüzeyler) yönlendirilebilirdir. Genel olarak, kapalı bir yüzeyde **n**'yi dışarı doğru seçeriz.

n seçildikten sonra, yüzeyi **yönlendirdiğimizi** söyler ve normal alanıyla birlikte yüzeye **yönlendirilmiş yüzey** deriz. Herhangi bir noktadaki n vektörüne o noktadaki **pozitif yön** denir (Şekil 16.45).

Şekil 16.46'daki Möbius şeridi yönlendirilemez. Sürekli bir birim normal alan oluşturmaya nereden başlarsanız başlayın (şekilde bir raptiye olarak gösterilmektedir), vektörü yüzey boyunca gösterildiği gibi sürekli olarak ilerletmek onu başlangıç noktasına başladığı yönün aksi yönünde döndürecektir. Bu noktadaki vektör iki yöne de bakamaz ve yine de alan sürekliyse böyle olması gerekir. Böyle alanların var olmadığı sonucuna varırız.

Akı İçin Yüzey İntegrali

F'nin yönlendirilmiş bir S yüzeyi üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve **n**'nin de yüzeyde seçilmiş birim normal alan olduğunu varsayın. $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ 'nin S üzerindeki integraline **F**'nin S üzerinde pozitif yöndeki akı'sı deriz. Yani, akı **F**'nin **n** yönündeki skaler bileşeninin S üzerindeki integralidir.

TANIM Akı

Üç boyutlu bir **F** vektör alanının, yönlendirilmiş bir S yüzeyinden **n** yönündeki **akısı** şu formülle verilir:

$$\text{Akı} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma. \tag{8}$$

Tanım, iki boyutlu bir **F** alanının düzlemdeki bir C eğrisi üzerindeki akısının eşdeğeridir. Düzlemde (Bölüm 16.2), akı **F**'nin eğriye normal skaler bileşeninin integralidir:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$$

F, üç boyutlu bir akışkan akışının hız alanıysa, **F**'nin S'deki akısı akışkanın S'den verilen yönde geçtiği net hızdır. Bu tip akışları Bölüm 16.7'de daha fazla inceleyeceğiz.

S bir $g(x, y, z) = c$ seviye yüzeyinin bir parçasıysa, **n**, hangisinin istenilen yönü verdiğine bağlı olarak

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla g}{|\nabla g|} \tag{9}$$

alanlarından biri olarak alınabilir. Buna karşılık gelen akı

$$\text{Akı} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

$$= \iint_R \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\pm\nabla g}{|\nabla g|}\right) \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \mathbf{p}|}\, dA \qquad \text{(9) ve (7) denklemleri} \tag{8}$$

$$= \iint_R \mathbf{F} \cdot \frac{\pm\nabla g}{|\nabla g \cdot \mathbf{p}|}\, dA \tag{10}$$

olur.

ÖRNEK 4 Akı Bulmak

$\mathbf{F} = yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$'nin $y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, silindirinden $x = 0$ ve $x = 1$ düzlemleriyle kesilen S yüzeyinde dışarı doğru akısını bulun.

Çözüm S üzerinde dışarı doğru normal alan (Şekil 16.47) $g(x, y, z) = y^2 + z^2$'nin gradiyentinden

$$\mathbf{n} = +\frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{\sqrt{4y^2 + 4z^2}} = \frac{2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{2\sqrt{1}} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

olarak bulunur. $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ ile,

$$d\sigma = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \mathbf{k}|}\, dA = \frac{2}{|2z|}\, dA = \frac{1}{z}\, dA$$

elde ederiz. S üzerinde $z \geq 0$ olduğu için, mutlak değer işaretlerini kaldırırız.

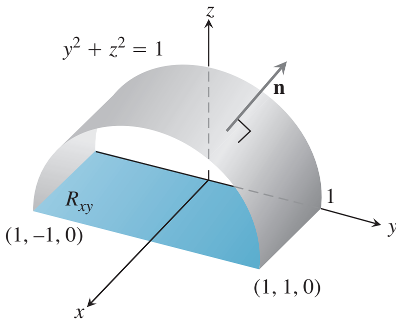
$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$'nin yüzey üzerindeki değeri

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = (yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) \cdot (y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$
$$= y^2 z + z^3 = z(y^2 + z^2)$$
$$= z \qquad S\text{'de } y^2 + z^2 = 1$$

olur. Bu nedenle, **F**'nin S'deki dışarı doğru akısı

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_S (z)\left(\frac{1}{z}\, dA\right) = \iint_{R_{xy}} dA = \text{alan}(R_{xy}) = 2$$

olarak bulunur. ■



ŞEKİL 16.47 Bir vektör alanının bu yüzey üzerinden dışarı doğru akısının hesaplanması. R_{xy} gölge bölgesinin alanı 2'dir (Örnek 4).

İnce Kabukların Moment ve Kütleleri

Çanaklar, metal davullar ve kubbeler gibi malzemelerin ince kabukları yüzeylerle modellenir. Moment ve kütleleri Tablo 16.3'teki formüllerle hesaplanır.

TABLO 16.3 Çok ince kabukların kütle ve moment formülleri

Kütle: $M = \iint_S \delta(x, y, z)\, d\sigma$ $\quad$ ($\delta(x, y, z) =$ (x, y, z)'deki birim alan başına kütle olarak yoğunluk

Koordinat düzlemleri etrafındaki birinci momentler:

$$M_{yz} = \iint_S x\,\delta\, d\sigma, \qquad M_{xz} = \iint_S y\,\delta\, d\sigma, \qquad M_{xy} = \iint_S z\,\delta\, d\sigma$$

Kütle merkezinin koordinatları:

$$\bar{x} = M_{yz}/M, \qquad \bar{y} = M_{xz}/M, \qquad \bar{z} = M_{xy}/M$$

Eylemsizlik momentleri:

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2)\,\delta\, d\sigma, \qquad I_y = \iint_S (x^2 + z^2)\,\delta\, d\sigma,$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\,\delta\, d\sigma, \qquad I_L = \iint_S r^2\delta\, d\sigma,$$

$r(x, y, z) =$ (x, y, z) noktasından L doğrusuna uzaklık

Bir L doğrusu etrafındaki jirasyon yarıçapı: $R_L = \sqrt{I_L/M}$

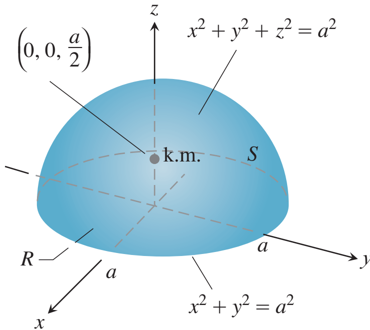
ÖRNEK 5 Kütle Merkezi Bulmak

a yarıçaplı ve sabit δ yoğunluklu ince yarı küresel bir kabuğun kütle merkezini bulun.

Çözüm Kabuğu

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad z \geq 0$$

yarım küresiyle modelleriz (Şekil 16.48). Yüzeyin z-ekseni etrafındaki simetrisi $\bar{x} = \bar{y} = 0$ olduğunu söyler. Geriye sadece $\bar{z} = M_{xy}/M$ formülünden $\bar{z}$'yi bulmak kalır.



ŞEKİL 16.48 Sabit yoğunluklu ince bir yarım küresel kabuğun kütle merkezi simetri ekseni üzerinde tabandan tepeye olan uzaklığın yarısındadır (Örnek 5).

Kabuğun kütlesi şöyle bulunur:

$$M = \iint_S \delta\, d\sigma = \delta \iint_S d\sigma = (\delta)(S\text{'nin alanı}) = 2\pi a^2 \delta$$

M_{xy} integralini hesaplamak için, $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ alır ve

$$|\nabla f| = |2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2a$$

$$|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = |\nabla f \cdot \mathbf{k}| = |2z| = 2z$$

$$d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}\, dA = \frac{a}{z}\, dA$$

buluruz.

Bu durumda,

$$M_{xy} = \iint_S z\delta\, d\sigma = \delta \iint_R z\frac{a}{z}\, dA = \delta a \iint_R dA = \delta a(\pi a^2) = \delta\pi a^3$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\pi a^3 \delta}{2\pi a^2 \delta} = \frac{a}{2}$$

buluruz. Kabuğun kütle merkezi $(0, 0, a/2)$ noktasıdır. ■

ALIŞTIRMALAR 16.5

Yüzey Alanı

1. $x^2 + y^2 - z = 0$ paraboloidinden $z = 2$ düzlemiyle kesilen yüzeyin alanını bulun.
2. $x^2 + y^2 - z = 0$ paraboloidinden $z = 2$ ve $z = 6$ düzlemleri ile kesilen şeridin alanını bulun.
3. $x + 2y + 2z = 5$ düzleminden duvarları $x = y^2$ ve $x = 2 - y^2$ olan silindirle kesilen bölgenin alanını bulun.
4. $x^2 - 2z = 0$ yüzeyinin, xy-düzleminde $x = \sqrt{3}$, $y = 0$ ve $y = x$ doğrularıyla sınırlı üçgenin üzerinde bulunan kısmının alanını bulun.
5. $x^2 - 2y - 2z = 0$ yüzeyinin, xy-düzleminde $x = 2$, $y = 0$ ve $y = 3x$ doğrularıyla sınırlı üçgenin üzerinde bulunan kısmının alanını bulun.
6. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ küresinden $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisiyle kesilen kapağın alanını bulun.
7. $z = cx$ (c sabittir) düzleminden $x^2 + y^2 = 1$ silindiriyle kesilen elipsin alanını bulun.
8. $x^2 + z^2 = 1$ silindirinin $x = \pm 1/2$ ve $y = \pm 1/2$ düzlemleri arasında kalan üst parçasının alanını bulun.
9. $x = 4 - y^2 - z^2$ paraboloidinin, yz-düzlemindeki $1 \le y^2 + z^2 \le 4$ halkasının üzerinde kalan kısmının alanını bulun.
10. $x^2 + y + z^2 = 2$ paraboloidinden $y = 0$ düzlemiyle kesilen yüzeyin alanını bulun.
11. $x^2 - 2\ln x + \sqrt{15}y - z = 0$ yüzeyinin xy-düzlemindeki R: $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$ karesi üzerindeki kısmının alanını bulun.
12. $2x^{3/2} + 2y^{3/2} - 3z = 0$ yüzeyinin, xy-düzlemindeki R: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ karesi üzerindeki kısmının alanını bulun.

Yüzey İntegralleri

13. $g(x, y, z) = x + y + z$'yi birinci sekizde bir bölgeden $x = a$, $y = a$, $z = a$ düzlemleriyle kesilen küp yüzeyi üzerinde integre edin.
14. $g(x, y, z) = y + z$'yi birinci sekizde bir bölgede, koordinat eksenleri ve $x = 2$ ile $y + z = 1$ düzlemleriyle sınırlı takozun yüzeyi üzerinde integre edin.
15. $g(x, y, z) = xyz$'yi birinci sekizde bir bölgeden $x = a$, $y = b$ ve $z = c$ düzlemleriyle kesilen dikdörtgenler prizmasının yüzeyinde integre edin.
16. $g(x, y, z) = xyz$'yi $x = \pm a$, $y = \pm b$ ve $z = \pm c$ düzlemleriyle sınırlı cismin yüzeyi üzerinde integre edin.
17. $g(x, y, z) = x + y + z$'yi $2x + 2y + z = 2$ düzleminin birinci sekizde bir bölgedeki kısmı üzerinde integre edin.
18. $g(x, y, z) = x\sqrt{y^2 + 4}$'ü $y^2 + 4z = 16$ parabolik silindirinden $x = 0$, $x = 1$ ve $z = 0$ düzlemleriyle kesilen yüzey üzerinde integre edin.

Bir Yüzeydeki Akı

19 ve 20 alıştırmalarında, **F** alanının verilen yüzey üzerinden belirtilen yöndeki akısını bulun.

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

    S: $z = 0$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$ dikdörtgen yüzeyi, yön $\mathbf{k}$
20. $\mathbf{F}(x, y, z) = yx^2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$

    S: $y = 0$, $-1 \le x \le 2$, $2 \le z \le 7$ dikdörtgen yüzeyi, yön $-\mathbf{j}$

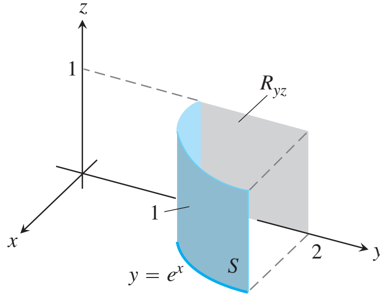
21–26 alıştırmalarında, **F** alanının $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin birinci sekizde bir bölgedeki kısmında orijinden uzaklaşan yönde olan akısını bulun.

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$
22. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
23. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k}$
24. $\mathbf{F}(x, y, z) = zx\mathbf{i} + zy\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$
25. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
26. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

27. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$ alanının $z = 4 - y^2$ silindirinden $x = 0$, $x = 1$ ve $z = 0$ düzlemiyle kesilen yüzeyden dışarı doğru akısını bulun.

28. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ alanının $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin dibinden $z = 1$ düzlemiyle kesilen yüzeyden dışarı doğru (z-ekseninden uzağa) akısını bulun.

29. S, $y = e^x$ silindirinin, yz-düzlemine (x-eksenine paralel olarak) izdüşümü R_{yz}: $1 \le y \le 2$, $0 \le z \le 1$ dikdörtgeni olan, birinci sekizde bir bölgedeki kısmı olsun (Şekle bakın). **n** de, S yüzeyinin yz-düzleminden uzaklaşan birim normali olsun. $\mathbf{F}(x, y, z) = -2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ alanının S üzerinde **n** yönündeki akısını bulun.



30. S, $y = \ln x$ silindirinin, xz-düzlemine (y-eksenine paralel olarak) izdüşümü R_{xz}: $1 \le x \le e$, $0 \le z \le 1$ dikdörtgeni olan, birinci sekizde bir bölgedeki kısmı olsun. **n** de, S'ye normal ve xz-düzleminden uzaklaşan birim vektör olsun. $\mathbf{F} = 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$'nin S üzerinde **n** yönündeki akısını bulun.

31. $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$ alanının birinci sekizde bir bölgeden $x = a$, $y = a$, $z = a$ düzlemleriyle kesilen küpün yüzeyinden dışarı doğru akısını bulun.

32. $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + \mathbf{k}$ alanının $x^2 + y^2 + z^2 \le 25$ küresinden $z = 3$ düzlemiyle kesilen üst kapağın yüzeyindeki dışarı doğru akısını bulun.

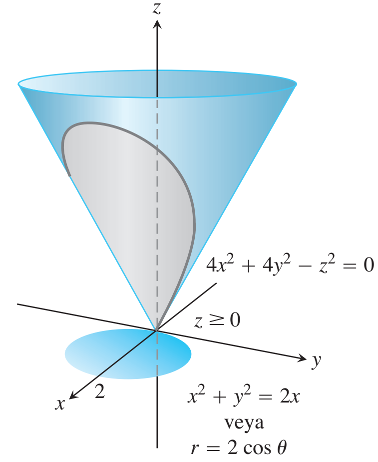
Momentler ve Kütleler

33. Merkez $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin birinci sekizde bir bölgedeki kısmının merkezini bulun.

34. Merkez $y^2 + z^2 = 9$, $z \ge 0$ silindirinden $x = 0$ ve $x = 3$ düzlemleriyle kesilen yüzeyin merkezini bulun (Örnek 4'teki yüzeye benzer).

35. Sabit yoğunluklu ince kabuk $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ konisinden $z = 1$ ve $z = 2$ düzlemleriyle kesilen sabit δ yoğunluklu ince bir kabuğun kütle merkezini ve z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentiyle jirasyon yarıçapını bulun.

36. Sabit yoğunluklu konik yüzey $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$, $z \ge 0$ konisinden $x^2 + y^2 = 2x$ dairesel silindiri ile kesilen sabit δ yoğunluklu ince kabuğun z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentini bulun (Şekle bakın).



37. Küresel kabuklar

a. a yarıçaplı ve sabit δ yoğunluklu ince küresel bir kabuğun bir çapı etrafındaki eylemsizlik momentini bulun (Bir yarım küresel kabukla çalışın ve sonucun iki katını alın).

b. Paralel Eksen Teoremini (Alıştırmalar 15.5) ve (a) şıkkındaki sonucu kullanarak kabuğa teğet bir doğruya göre eylemsizlik momentini bulun.

38. a. Dondurmalı ve dondurmasız koniler Taban yarıçapı a ve yüksekliği h olan bir koninin yan yüzeyinin (koni yüzeyi eksi taban yüzeyi) merkezini bulun.

b. Pappus formülünü (Alıştırmalar 15.5) ve (a) şıkkındaki sonucu kullanarak bir koninin bütün yüzeyinin (yan artı taban) merkezini bulun.

c. a yarıçaplı ve h yükseklikli bir koni bir dondurma külahına benzeyen bir yüzey oluşturacak şekilde bir yarım küreyle birleştiriliyor. Pappus formülünü ve (a) şıkkı ile Örnek 5'in sonuçlarını kullanarak S'nin merkezini bulun. Merkezi, yarım küre ve koninin paylaştıkları yüzeye yerkleştirmek için koni ne kadar yüksek olmalıdır?

Yüzey Alanı İçin Özel Formüller

S, xy-düzlemindeki bir R_{xy} bölgesinde birinci mertebe kısmi türevleri sürekli olan bir $z = f(x, y)$ fonksiyonuyla tanımlanan bir yüzeyse (Şekil 16.49), S aynı zamanda $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ fonksiyonunun, $F(x, y, z) = 0$ seviye yüzeyidir. R_{xy}'nin birim vektörünü $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ olarak almak

$$|\nabla F| = |f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} - \mathbf{k}| = \sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2} + 1}$$

$$|\nabla F \cdot \mathbf{p}| = |(f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}| = |-1| = 1$$

ve

$$\iint_{R_{xy}} \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|}\, dA = \iint_{R_{xy}} \sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2} + 1}\, dx\, dy, \qquad (11)$$

verir.

Benzer şekilde, yz-düzlemindeki bir R_{yz} bölgesinin üzerindeki düzgün bir $x = f(y, z)$ yüzeyinin alanı

$$A = \iint_{R_{yz}} \sqrt{f_y^2 + f_z^2 + 1}\, dy\, dz \tag{12}$$

ve xz-düzlemindeki bir R_{xz} bölgesinin üzerindeki düzgün bir $y = f(x, z)$ yüzeyinin alanı

$$A = \iint_{R_{xz}} \sqrt{f_x^2 + f_z^2 + 1}\, dx\, dz \tag{13}$$

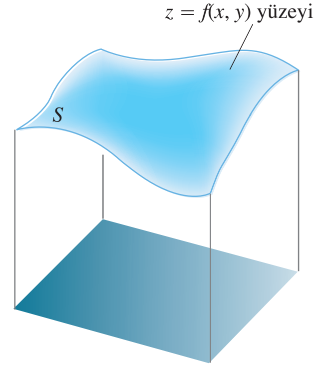
olur. (11)–(13) denklemlerini kullanarak 39–44 alıştırmalarındaki yüzeylerin alanlarını bulun.

39. $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin altından $z = 3$ düzlemiyle kesilen yüzey.

40. $x = 1 - y^2 - z^2$ paraboloidinin "burnundan" yz-düzlemiyle kesilen yüzey.

41. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = 1$ çemberi ile $9x^2 + 4y^2 = 36$ elipsinin arasında kalan bölgenin üzerindeki kısmı (*İpucu*: Bölgenin alanını bulmak için geometri formülleri kullanın).

42. $2x + 6y + 3z = 6$ düzleminden birinci sekizde bir bölgenin sınır düzlemleriyle kesilen üçgen. Alanı, her alan formülü için bir kere olmak üzere, üç yoldan hesaplayın



ŞEKİL 16.49 Bir $z = f(x, y)$ yüzeyi için, (3) Denklemindeki alan formülü

$$A = \iint_{R_{xy}} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dx\, dy$$

halini alır.

43. $y = (2/3)z^{3/2}$ silindirinden $x = 1$ ve $y = 16/3$ düzlemleriyle kesilen birinci sekizde bir bölgedeki yüzey.

44. $y + z = 4$ düzleminin, xz-düzleminin birinci dörtte bir bölgesinden $x = 4 - z^2$ parabolüyle kesilen bölgenin üzerindeki kısmı.

16.6 Parametrize Yüzeyler

Düzlemde eğrileri üç farklı şekilde tanımladık:

Açık şekil:	$y = f(x)$
Kapalı şekil:	$F(x, y) = 0$
Parametrik vektör şekil:	$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}, \quad a \le t \le b$

Uzayda yüzeyler için benzer tanımlarımız vardır:

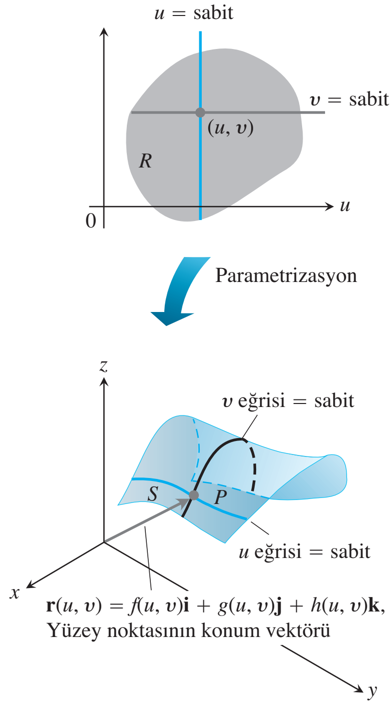
Açık şekil:	$z = f(x, y)$
Kapalı şekil:	$F(x, y, z) = 0$

Ayrıca bir yüzey üzerindeki bir noktanın konumunu iki değişkenli bir vektör fonksiyon olarak veren bir parametrik şekil daha vardır. Bu bölüm yüzey alanı ve yüzey integralleri araştırmamızı parametrik olarak tanımlanan yüzeylere genişletir.

Yüzeylerin Parametrizasyonu

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k} \tag{1}$$

uv-düzleminde bulunan bir R bölgesinde tanımlı ve R'nin içinde bire-bir olan sürekli bir vektör fonksiyon olsun (Şekil 16.50). $\mathbf{r}$'nin görüntü bölgesine, $\mathbf{r}$ tarafından tanımlanan veya çizilen S **yüzeyi** deriz. (1) Denklemi R bölgesi ile birlikte yüzeyin bir **parametrizasyonunu** oluşturur. u ve v değişkenleri **parametreler** ve R **parametre bölgesidir.**



ŞEKİL 16.50 Bir R bölgesi üzerinde tanımlı, iki değişkenli bir vector fonksiyonu olarak ifade edilmiş parametrize bir S yüzeyi.

Tartışmamızı basitleştirmek için, R'yi $a \leq u \leq b$, $c \leq v \leq d$ şeklinde eşitsizliklerle tanımlanan dikdörtgenler olarak alacağız. R'nin içinde $\mathbf{r}$'nin bire-bir olması koşulu S'nin kendisini kesmemesini garantiler. (1) Denkleminin

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v)$$

parametrik denklemlerinin vektör eşdeğeri olduğuna dikkat edin.

ÖRNEK 1 Bir Koniyi Parametrelemek

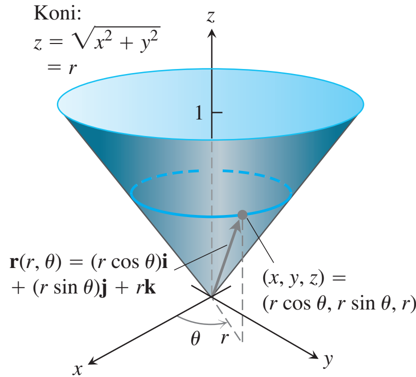
Aşağıdaki koninin bir parametrizasyonunu bulun.

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad 0 \leq z \leq 1$$

Çözüm Burada, silindirik koordinatlar gerek duyduğumuz her şeyi sağlar. Koni üzerinde tipik bir (x, y, z) noktası (Şekil 16.51) $0 \leq r \leq 1$ ve $0 \leq \theta \leq 2\pi$ olmak üzere $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ve $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ ile tanımlanır. (1) Denkleminde $u = r$ ve $v = \theta$ almak

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \qquad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$ ■

parametrizasyonunu verir.



ŞEKİL 16.51 Örnek 1'deki koni silindirik koordinatlar kullanılarak parametrelenebilir.

ÖRNEK 2 Bir Küreyi Parametrelemek

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin bir parametrizasyonunu bulun.

Çözüm Küresel koordinatlar gerek duyduklarımızı verir. Küre üzerindeki bir (x, y, z) noktası (Şekil 16.52) $x = a\sin\phi\cos\theta$, $y = a\sin\phi\sin\theta$ ve $z = a\cos\phi$, $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ile tanımlanır. (1) Denkleminde $u = \phi$ ve $v = \theta$ almak

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (a\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (a\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (a\cos\phi)\mathbf{k}$$
$$0 \leq \phi \leq \pi, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$ ■

parametrizasyonunu verir.

ÖRNEK 3 Bir Silindiri Parametrelemek

Aşağıdaki silindirin bir parametrizasyonunu bulun.

$$x^2 + (y-3)^2 = 9, \qquad 0 \leq z \leq 5$$

Çözüm Silindirik koordinatlarda, bir (x, y, z) noktası $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ve $z = z$ ile tanımlanır. $x^2 + (y-3)^2 = 9$ silindiri üzerindeki noktalar için (Şekil 16.53) denklem, xy-düzleminde silindir tabanının kutupsal denklemi ile aynıdır:

$$x^2 + (y^2 - 6y + 9) = 9$$
$$r^2 - 6r\sin\theta = 0$$

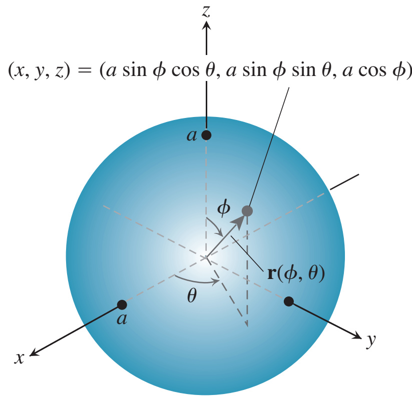
veya

$$r = 6\sin\theta, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

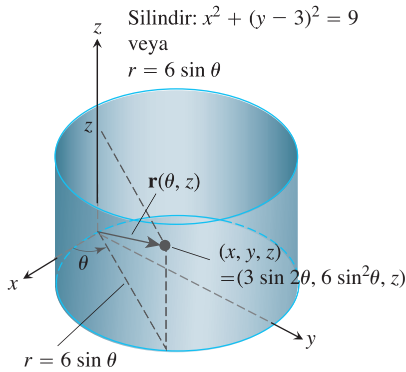
olur. Bu nedenle silindir üzerindeki tipik bir nokta

$$x = r\cos\theta = 6\sin\theta\cos\theta = 3\sin 2\theta$$
$$y = r\sin\theta = 6\sin^2\theta$$
$$z = z$$

şeklindedir.



ŞEKİL 16.52 Örnek 2'deki küre, küresel koordinatlar kullanılarak parametrelenebilir.



ŞEKİL 16.53 Örnek 3'teki silindir, silindirik koordinatlar kullanılarak parametrelenebilir.

(1) Denkleminde $u = \theta$ ve $v = z$ almak

$$\mathbf{r}(\theta, z) = (3 \sin 2\theta)\mathbf{i} + (6 \sin^2 \theta)\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le z \le 5$$

parametrizasyonunu verir. ■

Yüzey Alanı

Amacımız

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \quad a \le u \le b, \quad c \le v \le d$$

parametrizasyonu ile tanımlanan eğrisel bir S yüzeyinin alanını hesaplamak için iki katlı bir integral bulmaktır. Başlamak üzere olduğumuz kuruluş için S'nin düzgün olmasına gerek duyarız. Düzgünlüğün tanımı **r**'nin u ve v'ye göre kısmi türevlerini içerir:

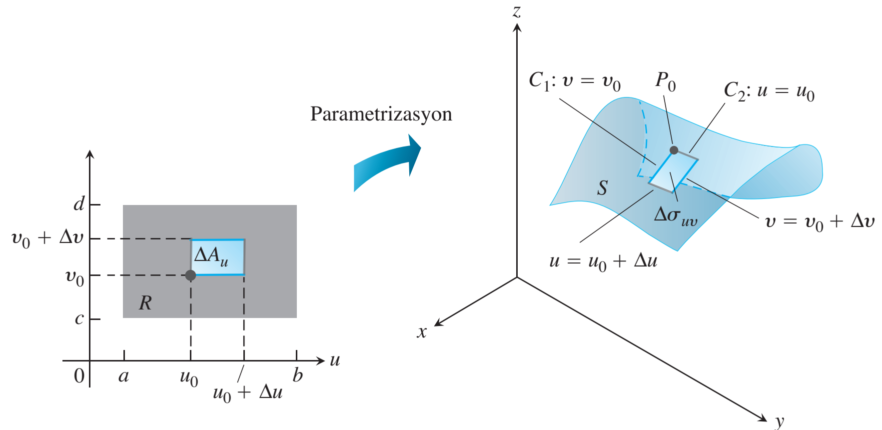
$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial u}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial v}\mathbf{k}$$

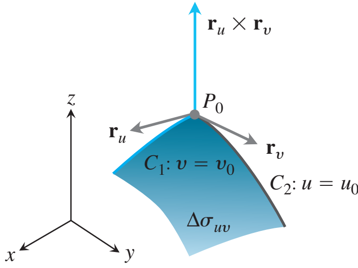
> **TANIM Düzgün parametrize yüzey**
> Parametrize bir $\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}$ yüzeyi, parametre aralığında $\mathbf{r}_u$ ve $\mathbf{r}_v$ sürekli ve $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ hiçbir zaman sıfır olmuyorsa, **düzgün**dür.

Düzgünlüğün tanımındaki $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ vektörel çarpımının hiçbir zaman sıfır olmaması şartı, $\mathbf{r}_u$ ve $\mathbf{r}_v$ vektörlerinin sıfır olmamaları ve hiçbir zaman aynı doğru üzerinde olmamaları demektir, dolayısıyla her zaman yüzeyin bir teğet düzlemini tanımlarlar.

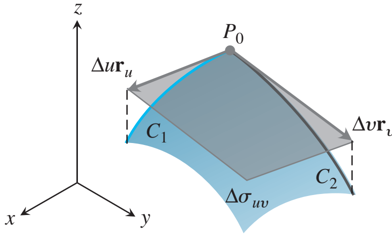
Şimdi kenarları $u = u_0$, $u = u_0 + \Delta u$, $v = v_0$ ve $v = v_0 + \Delta v$ doğruları üzerinde olmak üzere R'de bir ΔA_{uv} dikdörtgeni düşünün (Şekil 16.54). ΔA_{uv}'nin her kenarı S yüzeyi üzerinde bir eğri üzerine tasvir edilir ve bu dört eğri birlikte "eğrisel alan elemanı" $\Delta\sigma_{uv}$'yi oluştururlar. Şeklin gösterimiyle, $v = v_0$ kenarı bir C_1 eğrisine, $u = u_0$ kenarı bir C_2 eğrisine gider ve ortak köşeleri (u_0, v_0) da P_0'a gider.



ŞEKİL 16.54 uv-düzlemindeki dikdörtgen bir ΔA_{uv} alan elemanı S üzerinde eğri bir $\Delta\sigma_{uv}$ alan elemanına gider.



ŞEKİL 16.55 Yüzey alan elemanı $\Delta\sigma_{uv}$'nin büyütülmüş bir görüntüsü.



ŞEKİL 16.56 $\Delta u\mathbf{r}_u$ ve $\Delta v\mathbf{r}_v$ vektörleriyle belirlenen paralelkenar $\Delta\sigma_{uv}$ yüzey alan elemanına yaklaşımda bulunur.

Şekil 16.55, $\Delta\sigma_{uv}$'nin büyütülmüş bir görüntüsünü verir. $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ vektörü C_1'e P_0'da teğettir. Benzer şekilde, $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ C_2'ye P_0'da teğettir. $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ vektörel çarpımı yüzeye P_0'da normaldir (İşte burada S nin düzgün olduğu varsayımını kullanmaya başladık. $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$ olduğundan emin olmak istiyoruz).

Şimdi yüzey elemanı $\Delta\sigma_{uv}$'ye kenarları $\Delta u\mathbf{r}_u$ ve $\Delta v\mathbf{r}_v$ vektörleriyle belirlenen teğet düzlemdeki paralelkenarla yaklaşımda bulunuruz (Şekil 16.56). Bu paralelkenarın alanı şöyledir:

$$|\Delta u\mathbf{r}_u \times \Delta v\mathbf{r}_v| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\ \Delta u\ \Delta v. \tag{2}$$

R bölgesinin uv-düzleminde ΔA_{uv} dikdörtgen bölgeleri ile bölünüşü S yüzeyinin $\Delta\sigma_{uv}$ yüzey alan elemanlarıyla bölünüşünü verir. Her $\Delta\sigma_{uv}$ yüzey elemanının alanına (2) denklemindeki paralelkenarla yaklaşımda bulunuruz ve S'nin alanına bir yaklaşım elde etmek için bu alanları toplarız:

$$\sum_u \sum_v |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\ \Delta u\ \Delta v \tag{3}$$

Δu ve Δv bağımsız olarak sıfıra giderken, $\mathbf{r}_u$ ve $\mathbf{r}_v$'nin sürekliliği (3) Denklemindeki toplamın iki katlı $\int_c^d \int_a^b |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\ du\ dv$ integraline yaklaşmasını garantiler. Bu iki katlı integral S yüzeyinin alanını tanımlar ve daha genel olmasına rağmen alanın daha önceki tanımları ile uyuşur.

TANIM **Düzgün Bir Yüzeyin Alanı**

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \qquad a \le u \le b, \quad c \le v \le d$$

düzgün yüzeyinin **alanı**

$$A = \int_c^d \int_a^b |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\ du\ dv \tag{4}$$

ile verilir.

Bölüm 16.5'te olduğu gibi, (4) Denklemindeki integrali, $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\ du\ dv$ yerine $d\sigma$ yazarak kısaltabiliriz.

Yüzey Alanı Diferansiyeli ve Yüzey Alanı İçin Diferansiyel Formül

$$d\sigma = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\ du\ dv \qquad \iint_S d\sigma \tag{5}$$

Yüzey alan diferansiyeli — Yüzey alan için diferansiyel formül

ÖRNEK 4 Yüzey Alanı Bulmak (Koni)

Örnek 1'deki koninin yüzey alanını bulun (Şekil 16.51).

Çözüm Örnek 1'de

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \qquad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

parametrizasyonunu bulmuştuk.

(4) Denklemini uygulamak için, önce $\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta$' yı bulmamız gerekir:

$$\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(r\cos\theta)\mathbf{i} - (r\sin\theta)\mathbf{j} + \underbrace{(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)}_{r}\mathbf{k}$$

Yani, $|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r$ olur. Koninin alanı

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta|\, dr\, d\theta \qquad u = r,\ v = \theta \text{ ile (4) Denklemi}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2}\, d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(2\pi) = \pi\sqrt{2} \quad \text{birim kare}$$

olarak bulunur. ■

ÖRNEK 5 Yüzey Alanı Bulmak (Küre)

a yarıçaplı bir kürenin yüzey alanını bulun.

Çözüm Örnek 2'deki parametrizasyonu kullanırız:

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (a\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (a\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (a\cos\phi)\mathbf{k},$$
$$0 \le \phi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta$ için,

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2\sin^2\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (a^2\sin^2\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (a^2\sin\phi\cos\phi)\mathbf{k}$$

buluruz. Böylece, $0 \le \phi \le \pi$ için, $\sin\phi \ge 0$ olduğundan,

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{a^4\sin^4\phi\cos^2\theta + a^4\sin^4\phi\sin^2\theta + a^4\sin^2\phi\cos^2\phi}$$
$$= \sqrt{a^4\sin^4\phi + a^4\sin^2\phi\cos^2\phi} = \sqrt{a^4\sin^2\phi(\sin^2\phi + \cos^2\phi)}$$
$$= a^2\sqrt{\sin^2\phi} = a^2\sin\phi$$

elde edilir. Dolayısıyla kürenin alanı

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\phi\, d\phi\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \Big[-a^2\cos\phi\Big]_0^{\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} 2a^2\, d\theta = 4\pi a^2$$

olur. Bu, kürenin iyi bilinen alanı ile uyuşur. ■

Yüzey İntegralleri

Parametrize bir yüzeyin alanını hesaplama formülünü bulduğumuza göre, artık bir fonksiyonu parametrize formu kullanarak yüzey üzerinde integre edebiliriz.

TANIM **Parametrik Yüzey İntegrali**

Düzgün S yüzeyi $\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}$, $a \le u \le b$, $c \le v \le d$, ile parametrik olarak tanımlanmış ise ve $G(x, y, z)$ de S üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon ise, ***G*'nin *S* üzerindeki integrali**

$$\iint_S G(x, y, z)\, d\sigma = \int_c^d \int_a^b G(f(u, v), g(u, v), h(u, v))\,|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv$$

olarak verilir.

ÖRNEK 6 Parametrik Olarak Tanımlanmış Bir Yüzey Üzerinde İntegrasyon

$G(x, y, z) = x^2$'yi $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 1$ konisi üzerinde integre edin.

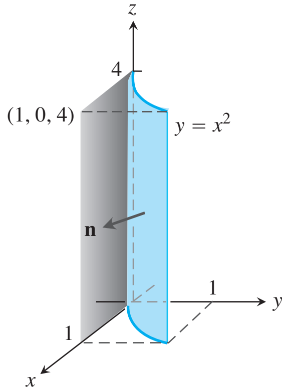
Çözüm Örnek 1 ve 4'teki işlere devam ederek, $|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{2}r$ ve

$$\begin{aligned}\iint_S x^2\, d\sigma &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^2\cos^2\theta\right)\left(\sqrt{2}r\right) dr\, d\theta \qquad x = r\cos\theta\\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta\, dr\, d\theta\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

buluruz. ■

ÖRNEK 7 Akı Bulmak

$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$'nin $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, $0 \le z \le 4$, parabolik silindirinden dışarı doğru akısını bulun (Şekil 16.57).



ŞEKİL 16.57 Parabolik bir silindirin yüzeyi üzerindeki akıyı bulmak (Örnek 7).

Çözüm Yüzey üzerinde, $x = x$, $y = x^2$ ve $z = z$'dir, dolayısıyla otomatik olarak $\mathbf{r}(x, z) = x\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $0 \le x \le 1$, $0 \le z \le 4$, parametrizasyonunu elde ederiz. Teğet vektörlerin vektörel çarpımı

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

olur. Yüzeyden dışarıya doğru birim normal

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z|} = \frac{2x\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

dir. Yüzey üzerinde, $y = x^2$'dir, dolayısıyla vektör alanı

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k} = x^2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$$

haline gelir. Böylece

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}}\left((x^2z)(2x) + (x)(-1) + (-z^2)(0)\right)\\ &= \frac{2x^3z - x}{\sqrt{4x^2 + 1}}.\end{aligned}$$

bulunur.

F'nin yüzeyden dışarıya akısı

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_0^4\int_0^1 \frac{2x^3z - x}{\sqrt{4x^2+1}}\,|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z|\,dx\,dz$$

$$= \int_0^4\int_0^1 \frac{2x^3z - x}{\sqrt{4x^2+1}}\sqrt{4x^2+1}\,dx\,dz$$

$$= \int_0^4\int_0^1 (2x^3z - x)\,dx\,dz = \int_0^4 \left[\frac{1}{2}x^4z - \frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=1} dz$$

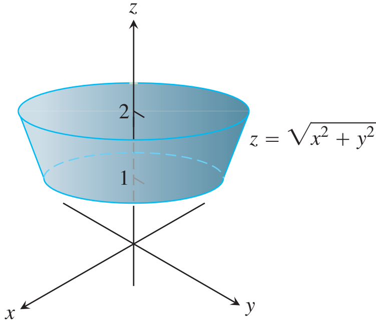
$$= \int_0^4 \frac{1}{2}(z-1)\,dz = \frac{1}{4}(z-1)^2\Big]_0^4$$

$$= \frac{1}{4}(9) - \frac{1}{4}(1) = 2$$

olarak bulunur. ■

ÖRNEK 8 Bir Kütle Merkezi Bulmak

$z = \sqrt{x^2+y^2}$ konisinden $z = 1$ ve $z = 2$ düzlemleriyle kesilen sabit δ yoğunluklu ince kabuğun kütle merkezini bulun (Şekil 16.58).



ŞEKİL 16.58 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ konisinin $z = 1$ ve $z = 2$ düzlemleri ile kesilmesiyle elde edilen kesik koni (Örnek 8).

Çözüm Yüzeyin z-ekseni etrafındaki simetrisi $\bar{x} = \bar{y} = 0$ olduğunu söyler. $\bar{z} = M_{xy}/M$'yi bulacağız. Örnek 1 ve 4'teki gibi çalışarak,

$$\mathbf{r}(r,\theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\sin\theta\,\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \qquad 1 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

ve

$$|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{2}r$$

buluruz. Dolayısıyla,

$$M = \iint_S \delta\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \delta\sqrt{2}r\,dr\,d\theta$$

$$= \delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 d\theta = \delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(2 - \frac{1}{2}\right)d\theta$$

$$= \delta\sqrt{2}\left[\frac{3\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 3\pi\delta\sqrt{2}$$

$$M_{xy} = \iint_S \delta z\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \delta r\sqrt{2}r\,dr\,d\theta$$

$$= \delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2\,dr\,d\theta = \delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 d\theta$$

$$= \delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{7}{3}\,d\theta = \frac{14}{3}\pi\delta\sqrt{2}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{14\pi\delta\sqrt{2}}{3\left(3\pi\delta\sqrt{2}\right)} = \frac{14}{9}$$

olur. Kabuğun kütle merkezi (0, 0, 14/9) noktasıdır. ■

ALIŞTIRMALAR 16.6

Yüzeylerin Parametrizasyonlarını Bulmak

1–16 alıştırmalarında, yüzeyin bir parametrizasyonunu bulun (Bunu yapmanın birçok doğru yolu vardır, o yüzden yanıtlarınız kitabın arkasındakilerle aynı olmayabilir).

1. $z = x^2 + y^2, z \leq 4$ paraboloidi
2. $z = 9 - x^2 - y^2, z \geq 0$ paraboloidi
3. **Kesik koni** $z = \sqrt{x^2 + y^2}/2$ konisinin birinci sekizde bir bölgede, $z = 0$ ve $z = 3$ düzlemleri arasında kalan kısmı
4. **Kesik koni** $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin $z = 2$ ve $z = 4$ düzlemleri arasında kalan kısmı
5. **Küresel kapak** $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ küresinden $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisiyle kesilen kapak
6. **Küresel kapak** $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresinin birinci sekizde bir bölgede xy-düzlemi ile $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi arasında kalan kısmı
7. **Küresel şerit** $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ küresinin $z = \sqrt{3}/2$ ve $z = -\sqrt{3}/2$ düzlemleri arasında kalan kısmı
8. **Küresel kapak** $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ küresinden $z = -2$ düzlemiyle kesilen üst parça
9. **Düzlemler arasında parabolik silindir** $z = 4 - y^2$ parabolik silindirinden $x = 0$, $x = 2$ ve $z = 0$ düzlemleriyle kesilen yüzey
10. **Düzlemler arasında parabolik silindir** $y = x^2$ parabolik silindirinden $z = 0$, $z = 3$ ve $y = 2$ düzlemleriyle kesilen yüzey
11. **Dairesel silindirik şerit** $y^2 + z^2 = 9$ silindirinin $x = 0$ ve $x = 3$ düzlemleri arasında kalan kısmı
12. **Dairesel silindirik şerit** $x^2 + z^2 = 4$ silindirinin $y = -2$ ve $y = 2$ düzlemleri arasında kalan xy-düzleminin üzerindeki kısmı
13. **Silindir içinde düzlem** $x + y + z = 1$ düzleminin
   a. $x^2 + y^2 = 9$ silindirinin içindeki kısmı
   b. $y^2 + z^2 = 9$ silindirinin içindeki kısmı
14. **Silindir içinde düzlem** $x - y + 2z = 2$ düzleminin
   a. $x^2 + z^2 = 3$ silindirinin içindeki kısmı
   b. $y^2 + z^2 = 2$ silindirinin içindeki kısmı
15. **Dairesel silindirik şerit** $(x - 2)^2 + z^2 = 4$ silindirinin $y = 0$ ve $y = 3$ düzlemleri arasında kalan kısmı
16. **Dairesel silindirik şerit** $y^2 + (z - 5)^2 = 25$ silindirinin $x = 0$ ve $x = 10$ düzlemleri arasında kalan kısmı

Parametrize Yüzeylerin Alanları

17–26 alıştırmalarında, yüzeyin alanını iki katlı bir integral olarak ifade etmek için bir parametrizasyon kullanın. Sonra integrali hesaplayın (İntegralleri kurmanın birçok doğru yolu vardır, o yüzden yanıtlarınız kitabın arkasındakilerle aynı olmayabilir. Ancak değerleri aynı olmalıdır).

17. **Silindir içinde düzlem** $y + 2z = 2$ düzleminin, $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin içindeki kısmı
18. **Silindir içinde düzlem** $z = -x$ düzleminin, $x^2 + y^2 = 4$ silindirinin içindeki kısmı
19. **Kesik koni** $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin $z = 2$ ve $z = 6$ düzlemleri arasında kalan kısmı
20. **Kesik koni** $z = \sqrt{x^2 + y^2}/3$ konisinin $z = 1$ ve $z = 4/3$ düzlemleri arasında kalan kısmı
21. **Dairesel silindirik şerit** $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin $z = 1$ ve $z = 4$ düzlemleri arasında kalan kısmı
22. **Dairesel silindirik şerit** $x^2 + z^2 = 10$ silindirinin $y = -1$ ve $y = 1$ düzlemleri arasında kalan kısmı
23. **Parabolik kapak** $z = 2 - x^2 - y^2$ paraboloidinden $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisiyle kesilen kapak
24. **Parabolik şerit** $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin $z = 1$ ve $z = 4$ düzlemleri arasında kalan kısmı
25. **Kesik küre** $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ küresinden $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisiyle kesilen alt bölüm
26. **Küresel şerit** $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresinin $z = -1$ ve $z = \sqrt{3}$ düzlemleri arasındaki kısmı

Parametrize Yüzeyler Üzerinde İntegraller

27–34 alıştırmalarında, verilen fonksiyonu verilen yüzey üzerinde integre edin.

27. **Parabolik silindir** $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$, parabolik silindiri üzerinde $G(x, y, z) = x$
28. **Dairesel silindir** $y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, $1 \leq x \leq 4$, silindirik yüzeyi üzerinde $G(x, y, z) = z$
29. **Küre** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ birim küresi üzerinde $G(x, y, z) = x^2$
30. **Yarı küre** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$ yarım küresi üzerinde $G(x, y, z) = z^2$
31. **Düzlem parçası** $x + y + z = 4$ düzleminin, xy-düzlemindeki $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, karesinin üzerinde bulunan kısmı üzerinde $F(x, y, z) = z$
32. **Koni** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$ konisi üzerinde $F(x, y, z) = z - x$
33. **Parabolik kubbe** $z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0$ parabolik kubbesi üzerinde $H(x, y, z) = x^2\sqrt{5 - 4z}$,
34. **Küresel kapak** $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresinin $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi üzerinde bulunan kısmı üzerinde $H(x, y, z) = yz$

Parametrize Yüzeyler Üzerinde Akı

35–44 Alıştırmalarında, $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ akısını yüzeyde verilen yönde bulmak için bir parametrizasyon kullanın.

35. Parabolik silindir $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$, $z = 4 - y^2$ parabolik silindirinden $x = 0$, $x = 1$ ve $z = 0$ düzlemleriyle kesilen yüzeyden dışarı doğru (x-ekseninden uzaklaşan normal)

36. Parabolik silindir $\mathbf{F} = x^2\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$, $y = x^2$, $-1 \le x \le 1$, parabolik silindirinden $z = 0$ ve $z = 2$ düzlemleriyle kesilen yüzeyden dışarı doğru (yz-düzleminden uzaklaşan normali)

37. Küre $\mathbf{F} = z\mathbf{k}$, birinci sekizde bir bölgede $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinden orijinden uzaklaşan yönde

38. Küre $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinden orijinden uzaklaşan yönde

39. Düzlem $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$, $x + y + z = 2a$ düzleminin, xy-düzlemindeki $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, karesinin üzerinde bulunan kısmından yukarı doğru

40. Silindir $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin $z = 0$ ve $z = a$ düzlemleriyle kesilen kısmından dışarı doğru.

41. Koni $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{k}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 1$, konisinden dışarı doğru (z-ekseninden uzaklaşan normal)

42. Koni $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 2$, konisinden dışarı doğru (z-ekseninden uzaklaşan normal)

43. Kesik koni $\mathbf{F} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin $z = 1$ ve $z = 2$ düzlemleriyle kesilen parçasından dışarı doğru (z-ekseninden uzaklaşan normal yönünde)

44. Paraboloid $\mathbf{F} = 4x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $z = x^2 + y^2$, paraboloidinin altından $z = 1$ düzlemiyle kesilen yüzeyinden dışarı (z-ekseninden uzaklaşan normal yönünde)

Kütle ve Momentler

45. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin birinci sekizde bir bölgedeki kısmının merkezini bulun.

46. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ konisinden $z = 1$ ve $z = 2$ düzlemleriyle kesilen sabit δ yoğunluklu ince kabuğun kütle merkezini ve z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentiyle jirasyon yarıçapını bulun.

47. Sabit δ yoğunluklu ince bir küresel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ kabuğunun z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentini bulun.

48. Sabit $\boldsymbol{\delta}$ yoğunluklu ince bir konik $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 1$, kabuğunun z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentini bulun.

Parametrize Yüzeylere Teğet Düzlemler

Parametrize bir $\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}$ yüzeyinin bir $P_0(f(u_0, v_0), g(u_0, v_0), h(u_0, v_0))$ noktasındaki teğet düzlemi, P_0'dan geçen ve P_0'daki teğet vektörler $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ ve $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$'ın vektörel çarpımı olan, $\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ vektörüne normal olan düzlemdir. 49–52 alıştırmalarında, verilen P_0 noktasında yüzeye teğet olan düzlemi bulun. Sonra yüzeyin Kartezyen denklemini bulun ve yüzeyle teğet düzlemi birlikte çizin.

49. Koni $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$, $r \ge 0$, $0 \le \theta \le 2\pi$, konisi, $(r, \theta) = (2, \pi/4)$'e karşı gelen $P_0\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\right)$ noktasında

50. Yarı küre $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (4\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (4\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (4\cos\phi)\mathbf{k}$, $0 \le \phi \le \pi/2$, $0 \le \theta \le 2\pi$, yarı küre yüzeyi, $(\phi, \theta) = (\pi/6, \pi/4)$'e karşılık gelen $P_0\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3}\right)$ noktasında

51. Dairesel silindir $\mathbf{r}(\theta, z) = (3\sin 2\theta)\mathbf{i} + (6\sin^2\theta)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $0 \le \theta \le \pi$, silindiri, $(\theta, z) = (\pi/3, 0)$'a karşılık gelen $P_0\left(3\sqrt{3}/2, 9/2, 0\right)$ noktasında (Örnek 3'e bakın).

52. Parabolik silindir $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ parabolik silindir yüzeyi, $(x, y) = (1, 2)$'ye karşılık gelen $P_0(1, 2, -1)$ noktasında

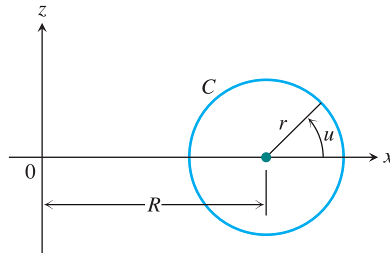
Parametrizasyonun Başka Örnekleri

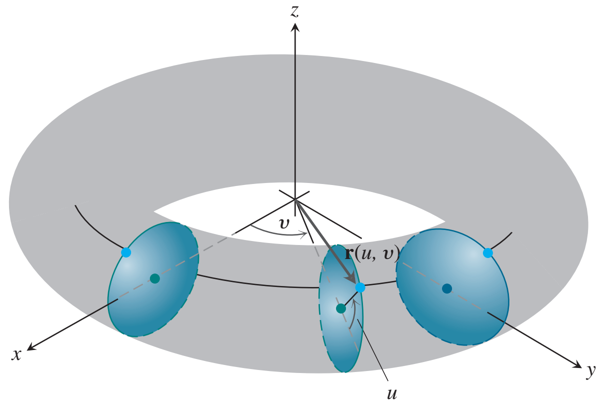
53. a. Bir *dönel torus* (simit) xz-düzlemindeki bir C çemberinin uzayda z-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeydir. (Şekle bakın) C'nin yarıçapı $r > 0$ ve merkezi $(R, 0, 0)$ ise, torusun bir parametrizasyonunun, $0 \le u \le 2\pi$ ve $0 \le v \le 2\pi$ şekildeki açılar olmak üzere

$$\mathbf{r}(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v)\mathbf{i} + ((R + r\cos u)\sin v)\mathbf{j} + (r\sin u)\mathbf{k}$$

olduğunu gösterin.

b. Torusun yüzey alanının $A = 4\pi^2 Rr$ olduğunu gösterin.



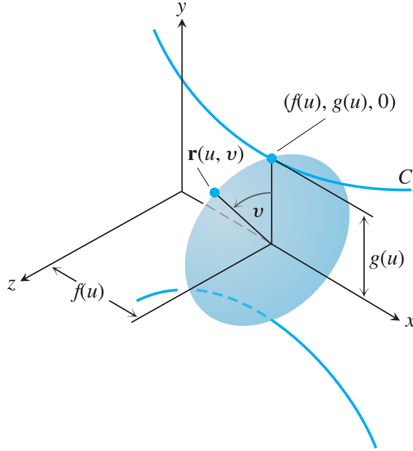


54. Bir dönel yüzeyin parametrelenmesi $a \le u \le b$ için $g(u) > 0$ olmak üzere, parametrelenmiş C: $(f(u), g(u))$ eğrisinin x-ekseni etrafında döndürüldüğünü varsayın.

a. $0 \le v \le 2\pi$, xy-düzlemiyle yüzey üzerindeki $\mathbf{r}(u, v)$ noktası arasındaki açı olmak üzere, ortaya çıkan dönel yüzeyin bir parametrizasyonunun

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u)\mathbf{i} + (g(u)\cos v)\mathbf{j} + (g(u)\sin v)\mathbf{k}$$

olduğunu gösterin (Aşağıdaki şekle bakın). $f(u)$'nun dönme ekseni *boyunca* uzaklığı, $g(u)$'nun ise dönme ekseni*nden* uzaklığı ölçtüğüne dikkat edin.



b. $x = y^2$, $y \ge 0$, eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin parametrizasyonunu bulun.

55. a. Bir elipsoidin parametrelenmesi $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ elipsinin $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$, parametrizasyonunu hatırlayın (Bölüm 3.5, Örnek 13). θ ve ϕ açılarını küresel koordinatlarda tanımlandığı gibi kullanarak, $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$ elipsoidinin bir parametrizasyonunun

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (a\cos\theta\cos\phi)\mathbf{i} + (b\sin\theta\cos\phi)\mathbf{j} + (c\sin\phi)\mathbf{k}$$

olduğunu gösterin.

b. Elipsoidin yüzey alanı için bir integral yazın, ama integrali hesaplamayın.

56. Tek parçalı hiperboloid

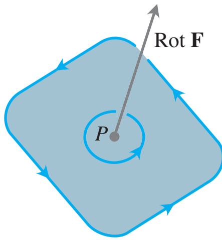
a. Tek parçadan ibaret $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ hiperboloidi için, $x^2 + y^2 = r^2$ çemberi ile ilişkili θ açısı ve $r^2 - z^2 = 1$ hiperbolik fonksiyonuyla ilişkili hiperbolik u parametresi cinsinden bir parametrizasyon bulun. (Bölüm 7.8, Alıştırma 84'e bakın.)

b. (a) şıkkındaki sonucu $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) - (z^2/c^2) = 1$ hiperboloidine genelleştirin.

57. (*Alıştırma 56'nın devamı*) $x^2 + y^2 - z^2 = 25$ hiperboloidine, $x_0^2 + y_0^2 = 25$ olmak üzere, $(x_0, y_0, 0)$ noktasında teğet olan düzlemin Kartezyen denklemini bulun.

58. İki parçalı hiperboloid $(z^2/c^2) - (x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ hiperboloidinin bir parametrizasyonunu bulun.

16.7 Stokes Teoremi



ŞEKİL 16.59 Üç boyutlu bir akışkan akışında bir düzlemin bir P noktasındaki dolaşım vektörü. Dolaşım eğrisiyle sağ el kuralına uygun ilişkisine dikkat edin.

Bölüm 16.4'te gördüğümüz gibi, iki boyutlu bir $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ alanının bir (x, y) noktasındaki dolaşım yoğunluğu veya rotasyonel bileşeni, $(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)$ skaler büyüklüğü ile tanımlanır. Üç boyutta, bir düzlemin bir P noktası etrafındaki dolaşım bir vektörle tanımlanır. Bu vektör dolaşım düzlemine normaldir (Şekil 16.59) ve kendisine, dolaşım eğrisiyle sağ el kuralına uygun bir ilişki sağlayan bir yönü gösterir. Vektörün uzunluğu akışın dönüş hızını verir ve genellikle dolaşım düzleminin P'deki eğikliği ile değişir. $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ alanı ile bir akıştaki en büyük dolaşımlı vektörün

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k} \qquad (1)$$

rotasyonel vektörü olduğu görülür. Bu bilgiyi, Green teoreminin dolaşım–rotasyonel şeklinin uzaya genelleştirilmesi olan Stokes Teoreminden alırız.

(rot $\mathbf{F}$) $\bullet$ $\mathbf{k} = (\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)$ ifadesinin, Bölüm 16.4'te $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ iken yapmış olduğumuz tanımla uyuştuğuna dikkat edin. (1) Denklemindeki rot $\mathbf{F}$ formülü genellikle aşağıdaki sembolik operatör kullanılarak yazılır:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (2)$$

(∇ sembolü "del" olarak okunur.) **F**'nin rotasyoneli $\nabla \times \mathbf{F}$'dir:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$= \text{rot } \mathbf{F}$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} \qquad (3)$$

ÖRNEK 1 Rot F Bulmak

$\mathbf{F} = (x^2 - y)\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$'nin rotasyonelini bulun.

Çözüm

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} \qquad \text{(3) Denklemi}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y & 4z & x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(4z)\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - y)\right)\mathbf{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(4z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y)\right)\mathbf{k}$$

$$= (0 - 4)\mathbf{i} - (2x - 0)\mathbf{j} + (0 + 1)\mathbf{k}$$

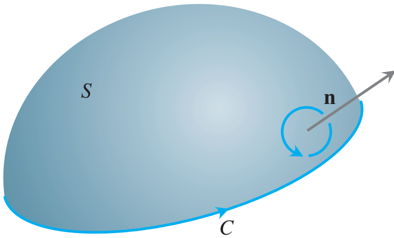
$$= -4\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

■

Göreceğimiz gibi, ∇ operatörünün başka uygulamaları da vardır. Örneğin, skaler bir $f(x, y, z)$ fonksiyonuna uygulandığı zaman, f'nin gradiyentini verir:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Bu artık "grad f" gibi, "del f" olarak da okunabilir.



ŞEKİL 16.60 Sınırlayıcı C eğrisinin yönlenişi **n** normal alanıyla arasında sağ el kuralına dayanan bir ilişki kurar.

Stokes Teoremi

Stokes Teoremi, normalde karşılaşılan koşullar altında, bir vektör alanının uzayda yönlendirilmiş bir yüzeyin sınırı üzerinde, birim normal vektör alanı **n** ye göre saat yönünün tersi yönündeki dolaşımının, alanın rotasyonelinin normal bileşeninin yüzey üzerindeki integraline eşit olduğunu söyler.

TEOREM 5 Stokes Teoremi

$\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$'nin yönlendirilmiş bir S yüzeyinin sınırı C üzerinde yüzeyin birim normal vektörü $\mathbf{n}$'ye göre saat yönünün tersine dolaşımı, $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$'nin S üzerindeki integraline eşittir.

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \tag{4}$$

saat yönünün tersine dolaşım   rotasyonel integrali

(4) denkleminden, iki farklı yönlenmiş S_1 ve S_2 yüzeyi aynı C sınırına sahipse, rotasyonel integrallerinin aynı olduğuna dikkat edin:

$$\iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1\, d\sigma = \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2\, d\sigma$$

İki rotasyonel integrali de, $\mathbf{n}_1$ ve $\mathbf{n}_2$ vektörleri, yüzeyleri doğru olarak yönlendirdiği sürece, (4) denkleminin solundaki saat yönünün tersine dolaşım integraline eşittir.

Doğal olarak, Stokes denklemindeki integrallerin varlığını garantilemek için, $\mathbf{F}$, C ve S üzerinde bazı matematiksel kısıtlamalar olması gerekir. Genel kısıtlamalar bütün fonksiyonların, vektör alanlarının ve türevlerin sürekli olmasıdır.

C, xy-düzleminde, saat yönünün tersine yönlenmiş bir eğri ve R de xy-düzleminde C'nin sınırladığı bölgeyse, $d\sigma = dx\,dy$ olur ve

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

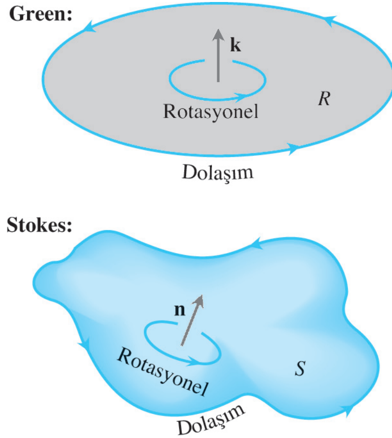
bulunur. Bu koşullar altında, Stokes denklemi, Green teoremindeki denklemin dolaşım–rotasyonel şekli olan

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

halini alır. Tersine, bu adımları geri çevirerek, iki boyutta Green Teoreminin dolaşım–rotasyonel şeklini, del gösteriminde

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA \tag{5}$$

biçiminde tekrar yazabiliriz. Şekil 16.61'e bakın.



ŞEKİL 16.61 Green Teoremi ve Stokes Teoremi'nin karşılaştırılması.

ÖRNEK 2 Bir Yarı Küre İçin Stokes Denklemini Gerçeklemek

(4) Denklemini $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z \geq 0$ yarım küresi, $C: x^2 + y^2 = 9,\ z = 0$ sınır eğrisi ve $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ alanı için hesaplayın.

Çözüm $\mathbf{r}(\theta) = (3\cos\theta)\mathbf{i} + (3\sin\theta)\mathbf{j}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, parametrizasyonunu kullanarak, C etrafında (yukarıdan bakıldığında) saat yönünün tersine dolaşımı hesaplarız:

$$d\mathbf{r} = (-3\sin\theta\, d\theta)\mathbf{i} + (3\cos\theta\, d\theta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} = (3\sin\theta)\mathbf{i} - (3\cos\theta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -9\sin^2\theta\, d\theta - 9\cos^2\theta\, d\theta = -9\, d\theta$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} -9\, d\theta = -18\pi$$

F'nin rotasyonel integrali için,

$$\nabla\times\mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$= (0-0)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{j} + (-1-1)\mathbf{k} = -2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{3}$$ Dış birim normal

$$d\sigma = \frac{3}{z}\, dA$$ $a = 3$ ile, Bölüm 16.5, Örnek 5

$$\nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = -\frac{2z}{3}\frac{3}{z}\, dA = -2\, dA$$

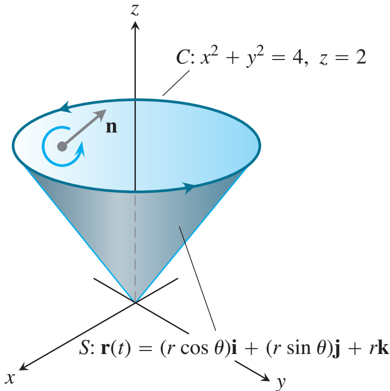
ve

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{x^2+y^2\le 9} -2\, dA = -18\pi$$

buluruz. Çember üzerindeki dolaşım, olması gerektiği gibi, rotasyonelin yarım küre üzerindeki integraline eşittir. ■

ÖRNEK 3 Dolaşım Bulmak

$\mathbf{F} = (x^2 - y)\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ alanının, $z = 2$ düzleminin $z = \sqrt{x^2+y^2}$ konisini kestiği C eğrisi üzerinde, yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine dolaşımını bulun (Şekil 16.62).



ÖRNEK 16.62 Örnek 3'teki C eğrisi ve S konisi.

Çözüm Stokes Teoremi dolaşımı koninin yüzeyi üzerinde integral alarak bulmamızı sağlar. C'yi yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine çevirmek koninin iç normali **n**'yi (ki pozitif bir z-bileşeni vardır) almaya karşılık gelir.

Koniyi

$$\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \qquad 0 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

şeklinde parametize ederiz. Bundan sonra,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_r\times\mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_r\times\mathbf{r}_\theta|} = \frac{-(r\cos\theta)\mathbf{i} - (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}}{r\sqrt{2}}$$ Bölüm 16.6, Örnek 4

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-(\cos\theta)\mathbf{i} - (\sin\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

$$
\begin{aligned}
d\sigma &= r\sqrt{2}\,dr\,d\theta && \text{Bölüm 16.6, Örnek 4}\\
\nabla \times \mathbf{F} &= -4\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \mathbf{k} && \text{Örnek 1}\\
&= -4\mathbf{i} - 2r\cos\theta\mathbf{j} + \mathbf{k} && x = r\cos\theta
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Böylece,

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(4\cos\theta + 2r\cos\theta\sin\theta + 1\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(4\cos\theta + r\sin 2\theta + 1\right)
\end{aligned}
$$

bulunur ve dolaşım

$$
\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \nabla \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma && \text{Stokes Teoremi, Denklem (4)}\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(4\cos\theta + r\sin 2\theta + 1\right)\left(r\sqrt{2}\,dr\,d\theta\right) = 4\pi
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. ■

$\nabla \times$ F'nin Çark Yorumu

Yoğunluğu $\delta(x, y, z)$ olan hareketli bir akışkanın (x, y, z) noktasındaki hızının $\mathbf{v}(x, y, z)$ olduğunu varsayın ve $\mathbf{F} = \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}$ alın. Bu durumda,

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

akışkanın kapalı C eğrisi boyunca dolaşımıdır. Stokes Teoremine göre bu dolaşım $\nabla \times \mathbf{F}$ çarpımının, C eğrisi ile çevrelenen bir S yüzeyi üzerindeki akısına eşittir:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

F'nin tanım bölgesinde bir Q noktası ve Q'da bir **u** yönünü sabitlediğimizi varsayın. Merkezi Q'da ve düzlemi **u**'ya normal olan ρ yarıçaplı çember C olsun. $\nabla \times \mathbf{F}$ alanı Q'da sürekliyse, $\rho \to 0$ iken, $\nabla \times \mathbf{F}$'nin **u**-bileşeninin, C ile sınırlı S dairesindeki ortalama değeri, $\nabla \times \mathbf{F}$'nin Q'daki **u**-bileşenine yaklaşır:

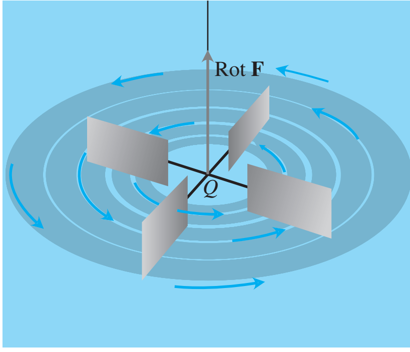
$$(\nabla \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{u})_Q = \lim_{p\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_S \nabla \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}\,d\sigma$$

Bu son denklemdeki yüzey integralini dolaşım ile değiştirirsek,

$$(\nabla \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{u})_Q = \lim_{p\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \tag{6}$$

elde ederiz. **u** vektörü $\nabla \times \mathbf{F}$'nin yönünde iken (6) Denkleminin sol tarafının değeri maksimumdur. ρ küçükse, (6) Denkleminin sağ tarafındaki limit yaklaşık olarak

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

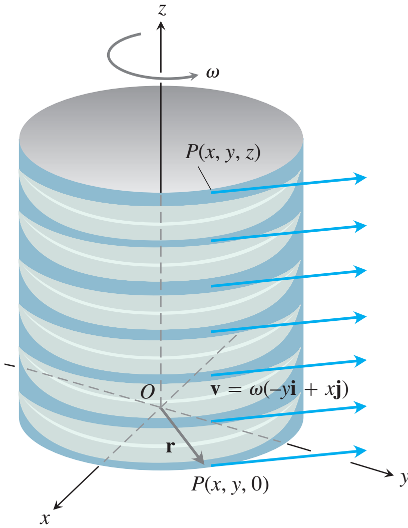


ŞEKİL 16.63 Rot **F**'nin çark yorumu

dir ve bu değer, C üzerindeki dolaşımın, dairenin alanına oranıdır (dolaşım yoğunluğu). ρ yarıçaplı bir çarkın, aks'ı **u** doğrultusunda yönlendirilmiş olmak üzere, Q noktasında akışkana konulduğunu varsayalım. Akışkanın C üzerindeki dolaşımı, çarkın dönüş hızını etkileyecektir. Çark, dolaşım integrali maksimize edildiğinde en hızlı döner; dolayısıyla çarkın aks'ı $\nabla \times \mathbf{F}$ yönündeyken en hızlı şekilde dönecektir (Şekil 16.63).

ÖRNEK 4 $\nabla \times \mathbf{F}$'nin Dolaşım Yoğunluğu İle İlgisi

Sabit yoğunluklu bir akışkan z-ekseni etrafında, $\mathbf{v} = \omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$ hızıyla dönmektedir. Burada ω dönüşün *açısal hızı* denilen pozitif bir sabittir (Şekil 16.64). $\mathbf{F} = \mathbf{v}$ ise, $\nabla \times \mathbf{F}$'yi bulun ve dolaşım yoğunluyla arasında bir ilişki kurun.



ŞEKİL 16.64 Sabit ω açısal hızlı, pozitif (saat yönünün tersi) yönde, xy-düzlemine paralel düzgün bir dönel akış (Örnek 4).

Çözüm $\mathbf{F} = \mathbf{v} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j})$ ile,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$= (0 - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (\omega - (-\omega))\mathbf{k} = 2\omega\mathbf{k}.$$

buluruz. Stokes Teoremine göre $\mathbf{F}$'nin, $\nabla \times \mathbf{F}$'ye normal bir düzlem içindeki, mesela xy-düzlemi, bir S dairesini çevreleyen ρ yarıçaplı bir C çemberi üzerindeki dolaşımı

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_S 2\omega\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}\, dx\, dy = (2\omega)(\pi\rho^2)$$

olur. Böylece, $\mathbf{u} = \mathbf{k}$ ile, (6) denklemine uygun şekilde,

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = 2\omega = \frac{1}{\pi\rho^2}\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

elde edilir. ■

ÖRNEK 5 Stokes Teoremini Uygulamak

$\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}$ ve C, $2x + y + z = 2$ düzleminin birinci sekizde bir bölgedeki parçasının, yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine takip edilen sınırı ise, Stokes Teoremini kullanarak $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 'yi hesaplayın (Şekil 16.65)

Çözüm Düzlem, $f(x, y, z) = 2x + y + z$ fonksiyonunun $f(x, y, z) = 2$ seviye yüzeyidir. Birim normal vektör,

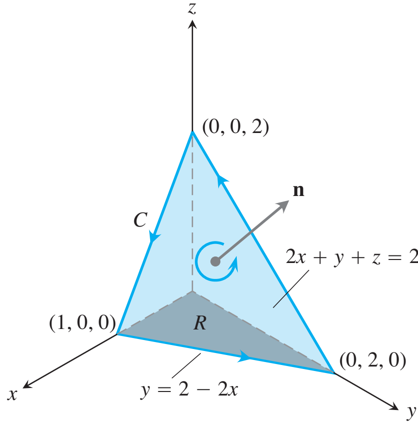
$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})}{|2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

C üzerinde saat yönünün tersine hareketle uyumludur. Stokes Teoremini uygulamak için,

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & 3xz \end{vmatrix} = (x - 3z)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

buluruz. Düzlem üzerinde, $z = 2 - 2x - y$'dir, dolayısıyla

$$\nabla \times \mathbf{F} = (x - 3(2 - 2x - y))\mathbf{j} + y\mathbf{k} = (7x + 3y - 6)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$



ŞEKİL 16.65 Örnek 5'teki düzlemsel yüzey.

ve

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(7x + 3y - 6 + y\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(7x + 4y - 6\right)$$

elde edilir. Yüzey alan elemanı

$$d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{k}|}\, dA = \frac{\sqrt{6}}{1}\, dx\, dy$$

olarak bulunur. Dolaşım ise

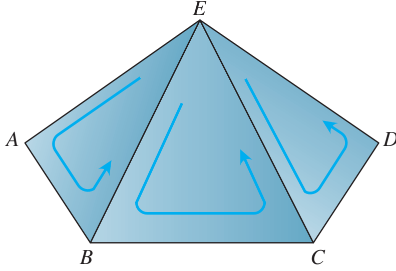
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \qquad \text{Stokes Teoremi, Denklem (4)}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \frac{1}{\sqrt{6}}\left(7x + 4y - 6\right)\sqrt{6}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} (7x + 4y - 6)\, dy\, dx = -1$$

olur. ■

Stokes Teoreminin Çok Yüzlü Yüzeyler İçin İspatı



ŞEKİL 16.66 Çok yüzlü bir yüzeyin parçası.

S, sonu sayıda düzlemsel bölgeden oluşan çok yüzlü bir yüzey olsun (Örnek olarak Şekil 16.66'ya bakın). *S*'nin her ayrı paneline Green Teoremini uygularız. İki tip panel vardır:

1. Her taraftan başka panellerle çevrelenenler ve
2. Bir veya daha fazla kenarı başka panellerle komşu olmayanlar.

S'nin sınırı Δ, diğer panellere komşu olmayan, 2. tip panellerinki gibi, kenarlardan oluşur. Şekil 16.66'da, *EAB, BCE* ve *CDE* üçgenleri *S*'nin bir parçasını temsil ederler. *ABCD* de Δ sınırının bir parçasıdır. Bu üç üçgene sırayla Green Teoremini uygulayıp, sonuçları toplamakla

$$\left(\oint_{EAB} + \oint_{BCE} + \oint_{CDE}\right)\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left(\iint_{EAB} + \iint_{BCE} + \iint_{CDE}\right)\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \qquad (7)$$

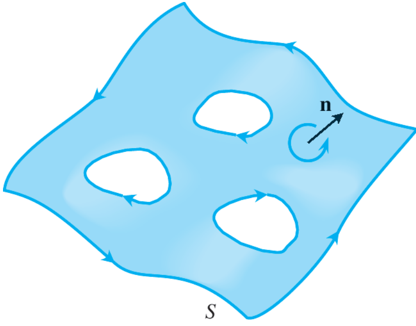
elde ederiz. (7) Denkleminin solundaki üç eğrisel integral, *ABCDE* çevresi üzerinde alınan tek bir eğrisel integrale indirgenir, çünkü iç doğru parçaları üzerinde alınan integraller birbirini götürür. Örneğin, *ABE* üçgeninin *BE* doğru parçası üzerindeki integral, *EBC* üçgeninin aynı doğru parçası üzerindeki integralin ters işaretlisidir. Aynı şey *CE* doğru parçası için de geçerlidir. Dolayısıyla, (7) Denklemi

$$\oint_{ABCDE} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{ABCDE} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

haline gelir. Green Teoremini bütün panellere uygulayıp sonuçları topladığımızda

$$\oint_{\Delta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

elde ederiz.



ŞEKİL 16.67 Stokes Teoremi, delikleri olan yönlendirilmiş yüzeyler için de geçerlidir.

Bu, çok yüzlü bir S yüzeyi için Stokes Teoremidir. Daha genel yüzeyler için ispatları daha ileri analiz kitaplarında bulabilirsiniz.

Delikli Yüzeyler İçin Stokes Teoremi

Stokes Teoremi bir veya daha fazla deliği olan yönlendirilmiş bir S yüzeyine (Şekil 16.67) de, Green Teoreminin genişletilmesine benzer bir şekilde, genişletilebilir: $\nabla \times \mathbf{F}$' nin normal bileşeninin S üzerindeki yüzey integrali, $\mathbf{F}$'nin teğet bileşeninin bütün sınır eğrileri üzerindeki, eğriler S'nin yönlenmesinin belirttiği şekilde izlenmek üzere, eğrisel integrallerinin toplamına eşittir.

Önemli Bir Bağıntı

Aşağıdaki bağıntı matematikte ve fizik bilimlerinde sıklıkla ortaya çıkar.

$$\text{rot grad } f = \mathbf{0} \qquad \text{veya} \qquad \nabla \times \nabla f = 0 \tag{8}$$

Bu bağıntı, ikinci kısmi türevleri sürekli olan her $f(x, y, z)$ fonksiyonu için geçerlidir. İspatı şu şekildedir:

$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz})\mathbf{i} - (f_{zx} - f_{xz})\mathbf{j} + (f_{yx} - f_{xy})\mathbf{k}$$

İkinci kısmi türevler sürekliyse, parantez içindeki karışık ikinci türevler eşittir (Bölüm 14.3, Teorem 2) ve vektör sıfır olur.

Korunmalı Alanlar ve Stokes Teoremi

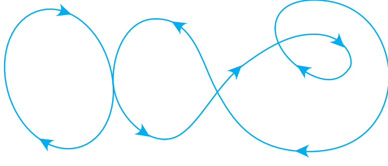
Bölüm 16.3'te, bir $\mathbf{F}$ alanın uzayda açık bir D bölgesinde korunmalı olmasının, $\mathbf{F}$'nin D içindeki her kapalı döngü etrafında integralinin sıfır olmasına eşdeğer olduğunu gördük. Bu da, *basit bağlantılı* açık bölgelerde $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ olduğunu söylemeye eşdeğerdir.

TEOREM 6 Rot F = 0 ile Kapalı-Döngü Özelliği İlişkilidir
Uzayda basit bağlantılı açık bir D bölgesinin her noktasında $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ise, D'deki herhangi parçalı olarak düzgün kapalı bir C yolunda

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

olur.

Bir İspatın Anahatları Teorem 6 genellikle iki adımda ispatlanır. İlk adım basit kapalı eğriler içindir. İleri analizin bir dalı olan topolojiden gelen bir teorem, basit birleşik bir D bölge-



ŞEKİL 16.68 Basit bağlantılı açık bir bölgede, kendilerini kesen türetilebilir eğriler Stokes Teoreminin uygulanabileceği döngülere ayrıştırılabilir.

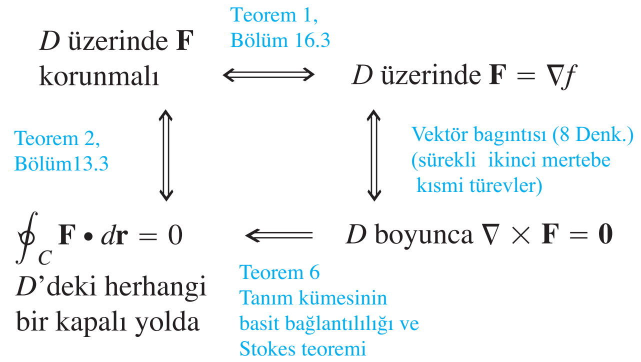
sindeki her türetilebilir basit kapalı C eğrisinin, yine D içinde bulunan düzgün iki-yüzlü bir S bölgesinin sınırı olduğunu söyler. Dolayısıyla, Stokes Teoreminden,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0$$

bulunur.

İkinci adım Şekil 16.68'deki gibi kendilerini kesen eğriler içindir. Amaç, bunları yönlendirilebilir yüzeyleri çevreleyen basit döngülere ayırmak, her seferinde bir döngüye Stokes Teoremini uygulamak ve sonuçları toplamaktır. ■

Aşağıdaki diyagram bağlantılı ve basit bağlantılı açık bölgelerde tanımlı korunmalı alanlar için sonuçları özetler.



ALIŞTIRMALAR 16.7

Stokes Teoremiyle Dolaşım Hesaplamak

1–6 Alıştırmalarında, Stokes Teoremindeki yüzey integralini kullanarak $\mathbf{F}$ alanının C eğrisi üzerinde belirtilen yönde dolaşımını hesaplayın.

1. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$
   C: xy-düzlemindeki $4x^2 + y^2 = 4$ elipsi, yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine.
2. $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$
   C: xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = 9$ çemberi, yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine.
3. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$
   C: $x + y + z = 1$ düzleminden birinci sekizde bir bölgeyle kesilen üçgenin sınırı, yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine.
4. $\mathbf{F} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$
   C: $x + y + z = 1$ düzleminden birinci sekizde bir bölgeyle kesilen üçgenin sınırı, yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine.
5. $\mathbf{F} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$
   C: xy-düzleminde $x = \pm 1$ ve $y = \pm 1$ doğrularıyla sınırlanan kare, yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine.
6. $\mathbf{F} = x^2y^3\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$
   C: $x^2 + y^2 = 4$ silindiriyle $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$, yarım küresinin kesişimi, yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine.

Rotasyonelin Akısı

7. $\mathbf{n}$,

$$S: \quad 4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36, \qquad z \geq 0$$

eliptik kabuğunun dış birim normali ve

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (x^2 + y^4)^{3/2} \sin e^{\sqrt{xyz}}\, \mathbf{k}$$

olsun.

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

integralinin değerini bulun. (*İpucu*: Kabuğun tabanındaki elipsin bir parametrelenişi $x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$'dir.)

8. $\mathbf{n}$,

$$S: \quad 4x^2 + y + z^2 = 4, \qquad y \geq 0$$

eliptik kabuğunun dış birim normali (orijinden uzaklaşan normal)

ve

$$\mathbf{F} = \left(-z + \frac{1}{2+x}\right)\mathbf{i} + (\tan^{-1} y)\mathbf{j} + \left(x + \frac{1}{4+z}\right)\mathbf{k}$$

olsun.

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

integralinin değerini bulun.

9. S, tepesi $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = h$ ile birlikte $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq h$, silindiri ve $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ olsun. Stokes Teoremini kullanarak $\nabla \times \mathbf{F}$'nin S'den dışarı doğru akısını bulun.

10. S, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ yarım küresi olmak üzere,

$$\iint_S \nabla \times (y\mathbf{i}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

integralini hesaplayın.

11. Rotasyonelin Akısı C'nin sınırladığı bütün yönlenmiş ve C üzerinde aynı pozitif yöne neden olan S yüzeyleri için

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

integralinin değerinin aynı olduğunu gösterin.

12. $\mathbf{F}$, düzgün kapalı yönlendirilmiş bir S yüzeyini ve içini kapsayan bir bölgede tanımlı ve türetilebilir bir vektör alanı olsun. $\mathbf{n}$ de S'nin birim normal vektör alanı olsun. S'nin düzgün basit kapalı bir C eğrisiyle birleşen S_1 ve S_2 yüzeylerinin bileşimi olduğunu varsayın.

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

hakkında bir şey söylenebilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

Parametrize Yüzeylerde Stokes Teoremi

13–18 alıştırmalarında, Stokes Teoremindeki yüzey integralini kullanarak, $\mathbf{F}$ alanının rotasyonelinin, dış birim normal $\mathbf{n}$ yönünde, S yüzeyi üzerindeki akısını bulun.

13. $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$

S: $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + (4 - r^2)\mathbf{k}$, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

14. $\mathbf{F} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x + z)\mathbf{k}$

S: $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + (9 - r^2)\mathbf{k}$, $0 \leq r \leq 3$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

15. $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + 2y^3z\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$

S: $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

16. $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$

S: $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + (5 - r)\mathbf{k}$, $0 \leq r \leq 5$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

17. $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} + (5 - 2x)\mathbf{j} + (z^2 - 2)\mathbf{k}$

S: $\mathbf{r}(\phi, \theta) = \left(\sqrt{3}\sin\phi\cos\theta\right)\mathbf{i} + \left(\sqrt{3}\sin\phi\sin\theta\right)\mathbf{j} + \left(\sqrt{3}\cos\phi\right)\mathbf{k}$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

18. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x\mathbf{k}$

S: $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (2\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (2\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (2\cos\phi)\mathbf{k}$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Teori ve Örnekler

19. Sıfır dolaşım $\nabla \times \nabla f = 0$ bağıntısını (metindeki (8) denklemi) ve Stokes Teoremini kullanarak, aşağıdaki alanların uzaydaki herhangi bir düzgün yönlendirilebilir yüzeyin sınırındaki dolaşımlarının sıfır olduğunu gösterin.

a. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$

b. $\mathbf{F} = \nabla(xy^2z^3)$

c. $\mathbf{F} = \nabla \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

d. $\mathbf{F} = \nabla f$

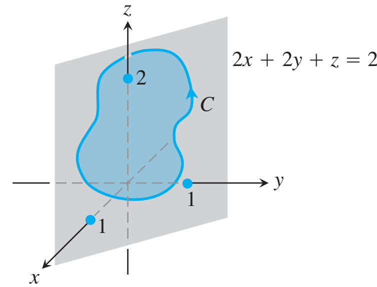
20. Sıfır dolaşım $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ olsun. $\mathbf{F} = \nabla f$ alanının, xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = a^2$ çemberi üzerinde saat yönünde dolaşımının sıfır olduğunu aşağıdaki yollardan bulun:

a. $\mathbf{r} = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ alıp ve $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$'yi çember üzerinde integre ederek

b. Stokes Teoremini uygulayarak

21. C, $2x + 2y + z = 2$ düzleminde, aşağıdaki gibi yönlendirilmiş basit kapalı düzgün bir eğri olsun.

$$\oint_C 2y\,dx + 3z\,dy - x\,dz$$



integralinin, C'nin konumuna veya şeklinde değil, sadece C'nin çevrelediği bölgenin alanına bağlı olduğunu gösterin.

22. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ise, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ olduğunu gösterin.

23. Bileşenleri iki kere türetilebilen ve rotasyoneli $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ olan bir vektör alanı bulun veya böyle bir alan bulunmadığını ispatlayın.

24. Stokes Teoremi, rotasyoneli sıfır olan bir alanın dolaşımı hakkında özel bir şey söyler mi? Yanıtınızı açıklayın.

25. R, xy-düzleminde parçalı olarak düzgün basit kapalı bir C eğrisiyle sınırlı bir bölge olsun ve R'nin x ve y-eksenleri etrafındaki

eylemsizlik momentlerinin I_x ve I_y olduğunu varsayın. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ olmak üzere,

$$\oint_C \nabla(r^4) \cdot \mathbf{n}\, ds$$

integralini I_x ve I_y cinsinden hesaplayın

26. Sıfır rotasyonel, lakin alan korunmalı değil

$$\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

alanının rotasyonelinin sıfır olduğunu, ama C, xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = 1$ çemberiyse

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

integralinin sıfır olmadığını gösterin (Teorem 6 burada geçerli değildir, çünkü **F**'nin tanım bölgesi basit bağlantılı değildir. **F** alanı z-ekseni boyunca tanımlı değildir, dolayısıyla **F**'nin tanım bölgesinden çıkmadan C'yi bir noktaya büzmek mümkün değildir).

16.8 Diverjans Teoremi ve Bir Birleştirilmiş Teori

Düzlemde Green Teoreminin diverjans şekli, bir vektör alanının basit kapalı bir eğriden dışarı doğru net akısının, alanın diverjansının eğrinin çevrelediği bölgede integre edilmesiyle hesaplanabileceğini ifade eder. Buna üç boyutta karşılık gelen ve Diverjans Teoremi denilen teorem, bir vektör alanının uzayda kapalı bir yüzeydeki dışarı doğru net akısının, alanın diverjansının yüzeyin çevrelediği bölgede integre edilerek hesaplanabileceğini ifade eder. Bu bölümde, Diverjans Teoremini ispat edecek ve bunun akının hesaplanmasını nasıl kolaylaştırdığını göstereceğiz. Ayrıca bir elektrik alandaki akı için Gauss yasasını ve hidrodinamikteki süreklilik denklemini türeteceğiz. Son olarak, bölümün vektör integral teoremlerini tek bir temel teoreme indirgeyeceğiz.

Üç Boyutta Diverjans

Bir $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ vektör alanının **diverjansı**

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \tag{1}$$

skaler fonksiyonudur. "div **F**" sembolü "**F**'nin diverjansı" veya "div **F**" olarak okunur. $\nabla \cdot \mathbf{F}$ gösterimi "del nokta **F**" olarak okunur.

Üç boyutta div **F**'nin fiziksel yorumu iki boyuttakiyle aynıdır. **F** bir akışkan akışının hız alanıysa, div **F**'nin bir (x, y, z) noktasındaki değeri akışkanın (x, y, z)'de pompalandığı veya boşaltıldığı hızdır. Diverjans birim hacim başına akı veya o noktadaki akı yoğunluğudur.

ÖRNEK 1 Diverjans Bulmak

$\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} - xy\mathbf{j} - z\mathbf{k}$'nin diverjansını bulun.

Çözüm **F**'nin diverjansı

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-xy) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = 2z - x - 1$$

olarak bulunur. ■

Diverjans Teoremi

Diverjans Teoremi, uygun koşullar altında, bir vektör alanın, kapalı (dışarı doğru yönlendirilmiş) bir yüzeydeki dışarı doğru akısının, yüzeyin çevrelediği bölge üzerinde alanın diverjansının üç katlı integraline eşit olduğunu söyler.

TEOREM 7 Diverjans Teoremi

Bir **F** vektör alanının kapalı yönlendirilmiş bir S yüzeyinde, yüzeyin dışarıya doğru olan **n** birim normal alanı yönündeki akışı $\nabla \cdot \mathbf{F}$'nin yüzeyin çevrelediği D bölgesindeki integraline eşittir.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV \qquad (2)$$

Dışarı doğru akı — Diverjans integrali

ÖRNEK 2 Diverjans Teoremini Desteklemek

$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ alanı için (2) Denkleminin iki tarafını da $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresi üzerinde hesaplayın.

Çözüm $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$ fonksiyonunun gradiyentinden hesaplanan S'nin dış birim normali

$$\mathbf{n} = \frac{2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a}\, d\sigma = \frac{a^2}{a}\, d\sigma = a\, d\sigma$$

bulunur, çünkü yüzey üzerinde $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$'dır. Buradan

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_S a\, d\sigma = a \iint_S d\sigma = a(4\pi a^2) = 4\pi a^3$$

elde edilir.

F'nin diverjansı

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$$

bulunur, böylece

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iiint_D 3\, dV = 3\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = 4\pi a^3$$

elde edilir. ■

ÖRNEK 3 Akı Bulmak

$\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$'nin birinci sekizde bir bölgeden $x = 1$, $y = 1$ ve $z = 1$ düzlemleriyle kesilen küpün yüzeyinden dışarı doğru akısını bulun.

Çözüm Akıyı, altı ayrı integralin toplamı (küpün her yüzü için bir tane) olarak hesaplamak yerine,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = y + z + x$$

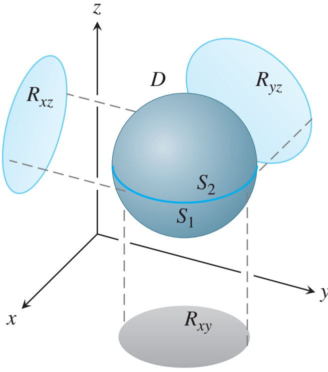
diverjansını küpün içinde integre ederek bulabiliriz:

$$\text{Akı} = \iint_{\substack{\text{Küp}\\\text{yüzeyi}}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_{\substack{\text{Kübün}\\\text{içi}}} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV \qquad \text{Diverjans Teoremi}$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y + z)\, dx\, dy\, dz = \frac{3}{2}. \qquad \text{Normal integrasyon}$$

■

Diverjans Teoreminin Özel Bölgeler İçin İspatı



ŞEKİL 16.69 Diverjans Teoremini önce burada görülenler gibi üç boyutlu bölgeler için ispatlarız. Sonra teoremi başka bölgelere genişletiriz.

Diverjans Teoremini ispat etmek için, **F**'nin bileşenlerinin birinci mertebe kısmi türevlerinin sürekli olduklarını varsayıyoruz. Ayrıca D'nin deliği veya balonu olmayan, küre, küp veya elipsoid gibi bir konveks bir bölge olduğunu ve S'nin de parçalı olarak düzgün bir yüzey olduğunu kabul edeceğiz. Ek olarak, D'nin xy-düzlemindeki izdüşümü olan R_{xy} bölgesinin bir iç noktasında xy-düzlemine dik olan her doğrunun S yüzeyini tam iki noktada keserek, $f_1 \le f_2$ olmak üzere

$$S_1: \quad z = f_1(x, y), \qquad (x, y) \text{ in } R_{xy}$$

$$S_2: \quad z = f_2(x, y), \qquad (x, y) \text{ in } R_{xy}$$

yüzeylerini ürettiğini varsayacağız. D'nin diğer koordinat düzlemleri üzerine izdüşümleri için de benzer varsayımlarda bulunacağız. Şekil 16.69'a bakın.

Birim normal vektör $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$'nin bileşenleri, **n**'nin **i**, **j** ve **k** ile yaptığı α, β ve γ açılarının kosinüsleridir (Şekil 16.70). Bu doğrudur, çünkü söz konusu bütün vektörler birim vektörlerdir. Buradan,

$$n_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{n}||\mathbf{i}| \cos\alpha = \cos\alpha$$

$$n_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{n}||\mathbf{j}| \cos\beta = \cos\beta$$

$$n_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{n}||\mathbf{k}| \cos\gamma = \cos\gamma$$

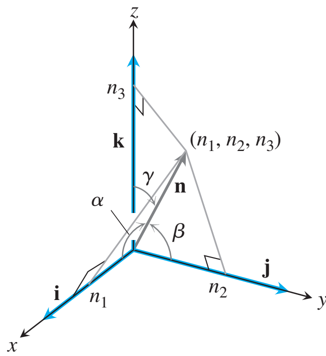
bulunur. Böylece,

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\beta)\mathbf{j} + (\cos\gamma)\mathbf{k}$$

ve

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = M\cos\alpha + N\cos\beta + P\cos\gamma$$

elde edilir.

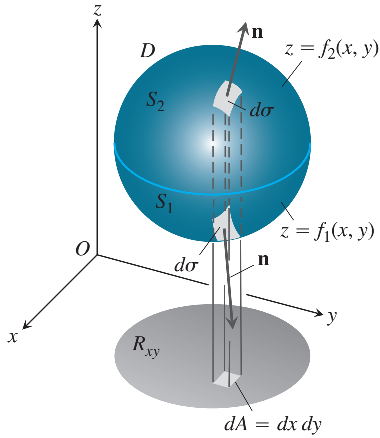


ŞEKİL 16.70 Bir **n** birim normal vektörünün skaler bileşenleri, **i**, **j** ve **k** ile yaptığı α, β ve γ açılarının kosinüsleridir.

Bileşen formunda, Diverjans Teoremi

$$\iint_S (M\cos\alpha + N\cos\beta + P\cos\gamma)\, d\sigma = \iiint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

olduğunu söyler.



ŞEKİL 16.71 Burada görülen S_1 ve S_2 yüzeyleriyle çevrili üç boyutlu D bölgesi, dikey olarak, xy-düzlemindeki iki boyutlu bir R_{xy} bölgesine iz düşer.

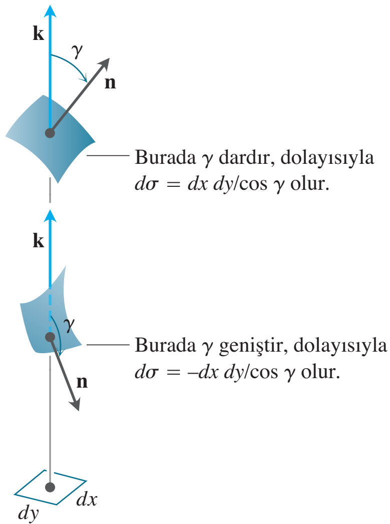


FIGURE 16.72 Şekil 16.71'deki alan parçalarının büyütülmüş bir görüntüsü. $d\sigma = \pm dx\,dy/\cos\gamma$ bağıntıları Bölüm 16.5' te türetilmiştir.

Aşağıdaki üç eşitliği kanıtlayarakw teoremi ispatlayacağız:

$$\iint_S M\cos\alpha\, d\sigma = \iiint_D \frac{\partial M}{\partial x}\,dx\,dy\,dz \tag{3}$$

$$\iint_S N\cos\beta\, d\sigma = \iiint_D \frac{\partial N}{\partial y}\,dx\,dy\,dz \tag{4}$$

$$\iint_S P\cos\gamma\, d\sigma = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z}\,dx\,dy\,dz \tag{5}$$

(5) Denkleminin İspatı (5) Denklemini, soldaki yüzey integralini, D'nin xy-düzlemine izdüşümü R_{xy} üzerinde, iki katlı bir integrale dönüştürerek ispatlayacağız (Şekil 16.71). S yüzeyi, denklemi $z = f_2(x, y)$ olan bir üst S_2 yüzeyi ve denklemi $z = f_1(x, y)$ olan bir alt S_1 yüzeyinden oluşur. S_2 üzerinde, dış nomal **n**'nin pozitif bir **k**-bileşeni vardır ve

$$d\sigma = \frac{dA}{|\cos\gamma|} = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} \quad \text{olduğundan} \quad \cos\gamma\, d\sigma = dx\,dy$$

olur. Şekil 16.72'ye bakın. S_1 üzerinde, dış normal **n**'nin negatif bir **k**-bileşeni vardır ve

$$\cos\gamma\, d\sigma = -dx\,dy$$

olur. Dolayısıyla,

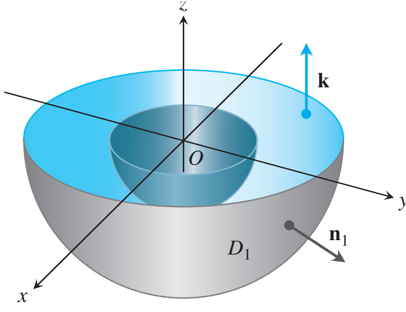
$$\begin{aligned}
\iint_S P\cos\gamma\, d\sigma &= \iint_{S_2} P\cos\gamma\, d\sigma + \iint_{S_1} P\cos\gamma\, d\sigma \\
&= \iint_{R_{xy}} P(x, y, f_2(x, y))\,dx\,dy - \iint_{R_{xy}} P(x, y, f_1(x, y))\,dx\,dy \\
&= \iint_{R_{xy}} [P(x, y, f_2(x, y)) - P(x, y, f_1(x, y))]\,dx\,dy \\
&= \iint_{R_{xy}} \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\right] dx\,dy = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da (5) denklemini ispatlar. ■

(3) ve (4) Denklemlerinin ispatı da aynı şekilde yapılır; sadece sırasıyla x, y, z; M, N, P; α, β, γ'nın permütasyonlarını alın ve (5) Denkleminden sonuçları elde edin.

Başka Bölgeler İçin Diverjans Teoremi

Diverjans Teoremi, yukarıda tartışılan gibi, sonlu sayıda basit bölgeye ayrışabilen bölgelere ve belirli şekillerde basit bölgelerin sınırları olarak tanımlanabilen bölgelere genişletilebilir. Örneğin, D'nin eş-eksenli iki küre arasındaki bölge olduğunu ve **F**'nin bileşenlerinin, D ve sınır yüzeyleri üzerinde sürekli olarak türetilebildiğini varsayın. D'yi bir ekvator düz-



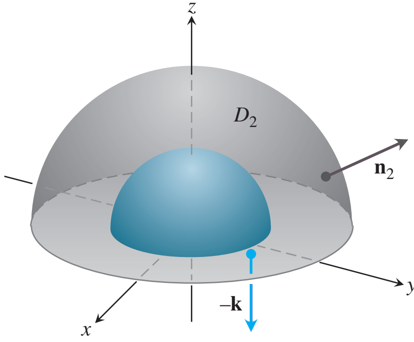
ŞEKİL 16.73 İki eş eksenli küre arasındaki bölgenin alt yarısı.

lemiyle ikiye bölün ve her iki yarıya ayrı ayrı Diverjans Teoremini uygulayın. Alt yarı, D_1, Şekil 16.73'te gösterilmektedir. D_1'i sınırlayan S_1 yüzeyi, bir dış yarım küre, pul şekilli bir taban ve bir iç yarımküreden oluşmaktadır. Diverjans Teoreni

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1\,d\sigma_1 = \iiint_{D_1} \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV_1 \tag{6}$$

olduğunu söyler. D_1'den dışarıyı gösteren birim normal $\mathbf{n}_1$ dış yüzey boyunca orijinden uzağı gösterir, tabanda $\mathbf{k}$'ye eşittir ve iç yüzey boyunca orijini gösterir. Sonra, Diverjans Teoremini, D_2'ye ve sınırı S_2'ye (Şekil 16.74) uygularız:

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2\,d\sigma_2 = \iiint_{D_2} \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV_2 \tag{7}$$



ŞEKİL 16.74 İki eş eksenli küre arasındaki bölgenin üst yarısı.

S_2 üzerinde, D_2'den dışarıyı işaret eden $\mathbf{n}_2$'yi izlersek, $\mathbf{n}_2$'nin xy-düzlemindeki pul şekilli bölgede $-\mathbf{k}$'ye eşit olduğunu, dış küre üzerinde orijinden uzağı, iç küre üzerinde ise orijini gösterdiğini görürüz. (6) ve (7) Denklemlerini toplarsak, $\mathbf{n}_1$ ve $\mathbf{n}_2$'nin ters işaretleri nedeniyle düzlemsel tabandaki integraller birbirini götürür. Dolayısıyla, D küreler arasındaki bölge, S D'nin iki küreden oluşan yüzeyi ve $\mathbf{n}$ de S'nin D'den dışarı bakan birim normali olmak üzere

$$\iint_{S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_{D} \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV$$

sonucuna ulaşırız.

ÖRNEK 4 Dışarıya Doğru Akıyı Bulmak

$$\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\rho^3}, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

alanının D: $0 < a^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le b^2$ bölgesinin sınırındaki dışarı doğru net akısını bulun.

Çözüm Akı, $\nabla\cdot\mathbf{F}$ ifadesi D üzerinde integre edilerek bulunabilir.

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\rho}$$

ve

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\rho^{-3}) = \rho^{-3} - 3x\rho^{-4}\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3x^2}{\rho^5}$$

olduğunu biliyoruz. Benzer şekilde,

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3y^2}{\rho^5} \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3z^2}{\rho^5}$$

buluruz. Böylece

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3}{\rho^5}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3\rho^2}{\rho^5} = 0$$

ve

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = 0$$

elde edilir.

Yani, $\nabla \cdot \mathbf{F}$'nin D üzerindeki integrali sıfırdır ve D'nin sınırındaki dışarı doğru net akı sıfırdır. Ama bu örnekten öğrenilecek başka şeyler de vardır. İç küre S_a boyunca D'den çıkan akı, dıç küre S_b boyunca D'den çıkan akının negatifidir (çünkü bu akıların toplamı sıfırdır). Böylece $\mathbf{F}$'nin S_a üzerinde orijinden dışarı doğru akısı, $\mathbf{F}$'nin S_b üzerinde orijinden dışarı doğru akısına eşittir. Yani, $\mathbf{F}$'nin merkezi orijinde olan bir küre üzerinde akısı kürenin yarıçapından bağımsızdır. Akı nedir?

Bunu bulmak için, akı integralini doğrudan hesaplarız. a yarıçaplı küredeki dışarı doğru birim normal

$$\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a}$$

olur. Dolayısıyla, küre üzerinde,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a^3} \cdot \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^4} = \frac{a^2}{a^4} = \frac{1}{a^2}$$

ve

$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \frac{1}{a^2} \iint_{S_a} d\sigma = \frac{1}{a^2}(4\pi a^2) = 4\pi$$

elde edilir. $\mathbf{F}$'nin herhangi bir küre üzerindeki dışarı doğru akısı 4π'dir. ■

Gauss Yasası : Elektromanyetik Teorinin Dört Büyük Yasasından Biri

Örnek 4'ten öğrenilecek daha çok şey vardır. Elektromanyetik teoride, orijinde bulunan bir q nokta yükünün yarattığı elektrik alan, ϵ_0 fiziksel bir sabit, $\mathbf{r}$ vektörü (x, y, z) noktasının konum vektörü ve $\rho = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ olmak üzere,

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}|^2}\left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\rho^3}$$

ile verilir. Örnek 4'ün gösterimiyle,

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\mathbf{F}$$

olarak yazılır.

Örnek 4'teki hesaplamalar, $\mathbf{E}$'nin, merkezi orijinde olan herhangi bir küreden dışarı doğru, akısının q/ϵ_0 olduğunu gösterir. Ama bu sonuç kürelerle sınırlı değildir. $\mathbf{E}$'nin orijini çevreleyen (ve Diverjans Teoreminin uygulanabildiği) herhangi bir kapalı S yüzeyinden dışarı doğru akısı da q/ϵ_0'dır. Nedenini anlamak için, sadece merkezi orijinde olan ve S yüzeyini çevreleyen büyük bir S_a küresi düşünmemiz yeterlidir. $\rho > 0$ iken,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

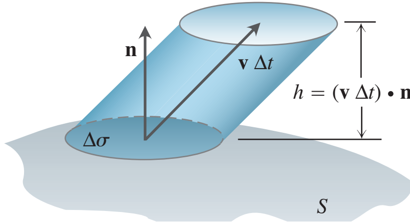
olduğundan, $\nabla \cdot \mathbf{E}$'nin S ile S_a arasındaki D bölgesinde integrali sıfırdır. Dolayısıyla, Diverjans Teoremine göre,

$$\iint_{\substack{D\text{'nin} \\ \text{sınırı}}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0,$$

ve $\mathbf{E}$'nin S üzerinde orijinden uzağa doğru akısı, $\mathbf{E}$'nin S_a üzerindeki orijinden uzağa doğru akısı ile aynı, yani q/ϵ_0 olmalıdır. *Gauss yasası* denilen bu ifade, herhangi bir fizik kitabında görebileceğiniz gibi, burada söz edilenden daha genel yük dağılımları için de geçerlidir.

$$\text{Gauss Yasası:} \quad \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Hidrodinamiğin Süreklilik Denklemi



ŞEKİL 16.75 Kısa bir Δt zamanında $\Delta\sigma$ parçasından yukarı doğru akan akışkan, hacmi yaklaşık olarak taban × yükseklik = $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \Delta\sigma\, \Delta t$ olan bir "silindiri" doldurur.

D, uzayda kapalı, yönlendirilmiş bir S yüzeyiyle sınırlı bir bölge olsun. $\mathbf{v}(x, y, z)$ alanı D'den düzgün olarak geçen bir akışkanın hız alanı, $\delta = \delta(t, x, y, z)$ akışkanın, t anında (x, y, z) noktasındaki yoğunluğu ve $\mathbf{F} = \delta\mathbf{v}$ ise, hidrodinamiğin süreklilik denklemi

$$\nabla \cdot \mathbf{F} + \frac{\partial \delta}{\partial t} = 0$$

olduğunu söyler. Söz konusu fonksiyonların sürekli birinci mertebe kısmi türevleri varsa, denklem, şimdi göreceğimiz gibi, Diverjans teoreminden doğal bir şekilde çıkar.

İlk olarak,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

integrali, kütlenin D'yi S'den geçerek terk ettiği hızdır (terk eder, çünkü $\mathbf{n}$ dış normaldir). Nedenini anlamak için, yüzey üzerinde bir $\Delta\sigma$ alan parçası düşünün (Şekil 16.75). Kısa bir Δt zaman aralığında, parçadan geçen akışkanın hacmi ΔV, yaklaşık olarak taban alanı $\Delta\sigma$ ve yüksekliği $(\mathbf{v}\ \Delta t) \cdot \mathbf{n}$ olan, $\mathbf{v}$, parçanın herhangi bir yerindeki bir hız vektörüdür, bir silindirin hacmine eşittir:

$$\Delta V \approx \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \Delta\sigma\, \Delta t.$$

Hacmi bu olan akışkanın kütlesi yaklaşık olarak

$$\Delta m \approx \delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \Delta\sigma\, \Delta t,$$

olur, dolayısıyla kütlenin D'yi parçadan geçerek terk etme hızı yaklaşık

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \approx \delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \Delta\sigma.$$

olur. Bu, kütlenin S'den geçtiği ortalama hızın bir tahmini olarak

$$\frac{\sum \Delta m}{\Delta t} \approx \sum \delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \Delta\sigma$$

yaklaşımını verir.

Son olarak, $\Delta\sigma \to 0$ ve $\Delta t \to 0$ almak kütlenin D'yi S'den geçerek terk ettiği anlık hızı

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

olarak verir, ki bu da bizim seçtiğimiz akış için

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

halini alır.

Şimdi B, merkezi akıştaki bir Q noktasında olan bir küre olsun. $\nabla \cdot \mathbf{F}$'nin B'deki ortalama değeri

$$\frac{1}{B\text{'nin hacmi}} \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

olur. $\nabla \cdot \mathbf{F}$'nin B'deki bir P noktasında bu değeri alması, diverjansın sürekliliğinin bir sonucudur. Böylece,

$$(\nabla \cdot \mathbf{F})_P = \frac{1}{B\text{'nin hacmi}} \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \frac{\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma}{B\text{'nin hacmi}}$$

$$= \frac{\text{Kütlenin } S \text{ yüzeyinden geçerek } D\text{'yi terk ettiği hız}}{B\text{'nin hacmi}} \qquad (8)$$

elde edilir. Sağ taraftaki kesir azalmayı birim hacim başına kütle olarak tanımlar.

Şimdi, merkez Q sabit kalırken, B'nin yarıçapını sıfıra götürün. (8) denkleminin sol tarafı $(\nabla \cdot \mathbf{F})_Q$'ya, sağ tarafı ise $(-\partial\delta/\partial t)_Q$'ya yakınsar. Bu iki limitin eşitliği süreklilik denklemidir:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\frac{\partial \delta}{\partial t}$$

Süreklilik denklemi $\nabla \cdot \mathbf{F}$'yi "açıklar": $\mathbf{F}$'nin bir noktadaki diverjansı, akışkanın yoğunluğunun o noktada azalma hızıdır.

Diverjans Teoremi

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

artık akışkanın yoğunluğunun D bölgesindeki net azalmasının, S yüzeyinden geçen kütle yerine geçtiğini söyler. Böylece, teorem kütle korunumunun bir ifadesidir (Alıştırma 31).

İntegral Teoremlerini Birleştirmek

İki boyutlu bir $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ alanını, $\mathbf{k}$-bileşeni sıfır olan üç boyutlu bir alan olarak düşünürsek, $\nabla \cdot \mathbf{F} = (\partial M/\partial x) + (\partial N/\partial y)$ ve Green Teoreminin normal şekli

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F}\, dA$$

olarak yazılabilir.

Benzer şekilde, $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = (\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$'dir, dolayısıyla Green Teoreminin teğet şekli

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA$$

olarak yazılabilir. Şimdi, Green Teoreminin denklemlerinin del gösterimleri yardımıyla, bunların Stokes Teoremi ve Diverjans Teoremi denklemleriyle ilişkilerini görebiliriz.

Green Teoremi ve Üç Boyuta Genelleştirilmesi

Green Teoreminin normal şekli: $$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F}\, dA$$

Diverjans Teoremi: $$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

Green Teoreminin teğet şekli: $$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA$$

Stokes Teoremi: $$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

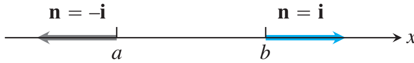
Stokes Teoreminin, Green Teoreminin teğet şeklini (rotasyonel) düzlemdeki bir yüzeyden üç boyutlu uzaydaki bir yüzeye nasıl genelleştirdiğine dikkat edin. Her iki durumda da, rot **F**'nin normal bileşeninin yüzey içindeki integrali **F**'nin sınırdaki dolaşımına eşittir.

Aynı şekilde, Diverjans Teoremi de Green Teoreminin normal (akı) şeklini, düzlemdeki iki boyutlu bir bölgeden uzaydaki üç boyutlu bir bölgeye genelleştirir. Her iki durumda da, $\nabla \cdot \mathbf{F}$'nin bölgenin içindeki integrali, **F** alanının sınırdaki toplam akısına eşittir.

Buradan hala öğrenilecek şeyler vardır. Bu sonuçların hepsi tek bir *temel teoremin* şekilleri olarak düşünülebilir. Bölüm 5.4'teki, Analizin Temel Teoremini düşünün. $f(x)$ (a, b)'de türetilebilirse ve $[a, b]$'de sürekli ise

$$\int_a^b \frac{df}{dx}\, dx = f(b) - f(a)$$

olduğunu söyler.



ŞEKİL 16.76 Bir boyutlu uzayda $[a, b]$'nin sınırındaki dışarı doğru birim normaller.

$[a, b]$ boyunca $\mathbf{F} = f(x)\mathbf{i}$ alırsak, $(df/dx) = \nabla \cdot \mathbf{F}$ olur. $[a, b]$'nin sınırındaki normal birim vektör **n**'yi b'de **i** ve a'da $-\mathbf{i}$ olarak tanımlarsak (Şekil 16.76),

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= f(b)\mathbf{i} \cdot (\mathbf{i}) + f(a)\mathbf{i} \cdot (-\mathbf{i}) \\ &= \mathbf{F}(b) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{F}(a) \cdot \mathbf{n} \\ &= \mathbf{F}\text{'nin } [a, b]\text{'nin sınırındaki toplam dışarı doğru akısı} \end{aligned}$$

olur. Atık Temel Teorem

$$\mathbf{F}(b) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{F}(a) \cdot \mathbf{n} = \int_{[a,b]} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dx$$

olduğunu söyler.

Analizin Temel Teoremi, Green Teoreminin akı formu ve Diverjans Teoreminin hepsi, bir bölgede bir **F** alanına etki eden $\nabla \cdot$ diferansiyel operatörünün integralinin, bölgenin sınırındaki normal alan bileşenlerinin toplamına eşit olduğunu söyler (Burada, Green Teoremindeki eğrisel integrali ve Diverjans Teoremindeki yüzey intergalini, sınır üzerindeki "toplamlar" olarak yorumluyoruz).

Stokes Teoremi ve Green Teoreminin teğet formu, her şey düzgün olarak yönlendirildiğinde, bir alana uygulanan rotasyonelin normal bileşeninin integralinin, yüzeyin sınırındaki teğet alan bileşenlerinin toplamına eşit olduğunu söyler.

Bu yorumların güzelliği, altlarında, aşağıdaki gibi ifade edebileceğimiz harika bir gözlemin yatmasındadır.

> Bir alana etki eden diferansiyel bir operatörün bir bölgedeki integrali, o operatöre uygun, alan bileşenlerinin bölgenin sınırındaki toplamına eşittir.

ALIŞTIRMALAR 16.8

Diverjans Hesaplama

1–4 alıştırmalarında, alanın diverjansını bulun.

1. Şekil 16.14'teki spin alanı.
2. Şekil 16.13'teki radyal alan.
3. Şekil 16.9'daki yerçekimi alanı.
4. Şekil 16.12'deki hız alanı.

Dışarı Doğru Akıyı Hesaplamak İçin Diverjans Teoremini Kullanmak

5–16 alıştırmalarında, Diverjans Teoremini kullanarak, **F**'nin D bölgesinin sınırı üzerinde, dışarı doğru akısını bulun.

5. **Küp** $\mathbf{F} = (y - x)\mathbf{i} + (z - y)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$
   D: $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ ve $z = \pm 1$ düzlemleriyle sınırlı küp
6. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$
   a. **Küp** D: Birinci sekizde bir bölgeden $x = 1$, $y = 1$ ve $z = 1$ düzlemleriyle kesilen küp
   b. **Küp** D: $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ ve $z = \pm 1$ düzlemleriyle sınırlı küp
   c. **Silindirik kutu** D: $x^2 + y^2 \le 4$ silindirinden $z = 0$ ve $z = 1$ düzlemleri ile kesilen bölge
7. **Silindir ve paraboloid** $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - z\mathbf{k}$
   D: $x^2 + y^2 \le 4$ silindirinin içinde $z = 0$ düzlemiyle $z = x^2 + y^2$ paraboloidi arasında kalan bölge
8. **Küre** $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$
   D: $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ küresi
9. **Küre parçası** $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}$
   D: Birinci sekizde bir bölgeden $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresiyle kesilen bölge
10. **Silindirik kutu** $\mathbf{F} = (6x^2 + 2xy)\mathbf{i} + (2y + x^2z)\mathbf{j} + 4x^2y^3\mathbf{k}$
   D: Birinci sekizde bir bölgeden $x^2 + y^2 = 4$ silindiri ve $z = 3$ düzlemiyle kesilen bölge.
11. **Takoz** $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} - xy\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$
   D: Birinci sekizde bir bölgeden $y + z = 4$ düzlemi ve $4x^2 + y^2 = 16$ eliptik silindiriyle kesilen takoz.
12. **Küre** $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$
   D: $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ bölgesi
13. **Kalın küre** $\mathbf{F} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$
   D: $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 2$ bölgesi
14. **Kalın küre** $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
   D: $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ bölgesi
15. **Kalın küre** $\mathbf{F} = (5x^3 + 12xy^2)\mathbf{i} + (y^3 + e^y \sin z)\mathbf{j} + (5z^3 + e^y \cos z)\mathbf{k}$
   D: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ve $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ küreleri arasındaki bölge
16. **Kalın silindir** $\mathbf{F} = \ln(x^2 + y^2)\mathbf{i} - \left(\frac{2z}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)\mathbf{j} + z\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{k}$
   D: Kalın duvarlı $1 \le x^2 + y^2 \le 2$, $-1 \le z \le 2$ silindiri

Rotasyonel ve Diverjansın Özellikleri

17. div (rot G) sıfırdır

a. $G = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ alanının bileşenlerinin gerekli kısmi türevleri sürekliyse, $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{G} = 0$ olduğunu gösterin.

b. $\nabla \times \mathbf{G}$ alanının kapalı bir yüzeydeki akısı hakkında nasıl bir sonuca varırsınız? Yanıtınızı açıklayın.

18. $\mathbf{F}_1$ ile $\mathbf{F}_2$ türetilebilir vektör alanları ve a ile b de keyfi reel sabitler olsun. Aşağıdaki bağıntıları doğrulayın.

a. $\nabla \cdot (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \cdot \mathbf{F}_1 + b\nabla \cdot \mathbf{F}_2$

b. $\nabla \times (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \times \mathbf{F}_1 + b\nabla \times \mathbf{F}_2$

c. $\nabla \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_2$

19. $\mathbf{F}$ türetilebilir bir vektör alanı ve $g(x, y, z)$ de türetilebilir skaler bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki bağıntıları doğrulayın.

a. $\nabla \cdot (g\mathbf{F}) = g\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla g \cdot \mathbf{F}$

b. $\nabla \times (g\mathbf{F}) = g\nabla \times \mathbf{F} + \nabla g \times \mathbf{F}$

20. $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ türetilebilir bir vektör alanıysa, $\mathbf{F} \cdot \nabla$ gösterimini

$$M\frac{\partial}{\partial x} + N\frac{\partial}{\partial y} + P\frac{\partial}{\partial z}$$

olarak tanımlarız. Türetilebilir vektör alanları $\mathbf{F}_1$ ile $\mathbf{F}_2$ için aşağıdaki bağıntıları doğrulayın.

a. $\nabla \times (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 - (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\nabla \cdot \mathbf{F}_2)\mathbf{F}_1 - (\nabla \cdot \mathbf{F}_1)\mathbf{F}_2$

b. $\nabla(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1 \times (\nabla \times \mathbf{F}_2) + \mathbf{F}_2 \times (\nabla \times \mathbf{F}_1)$

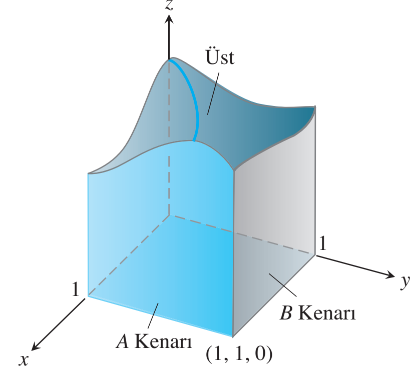
Teori ve Örnekler

21. $\mathbf{F}$, uzayın düzgün kapalı bir S yüzeyiyle sınırlı bir D bölgesini içeren bir parçasında, bileşenlerinin sürekli birinci mertebe kısmi türevleri var olan bir alan olsun. $|\mathbf{F}| \le 1$ ise,

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

integralinin büyüklüğü üzerine bir sınır konulabilir mi? Yanıtınızı açıklayın.

22. Şekilde gösterilen kapalı küpe benzer cismin tabanı xy-düzlemindeki birim karedir. Dört kenar $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ ve $y = 1$ düzlemlerinde bulunur. Üstü, bağıntısı bilinmeyen keyfi bir düzgün yüzeydir. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + (z + 3)\mathbf{k}$ olsun ve $\mathbf{F}$'nin A kenarından dışarı doğru akısının 1 ve B kenarından dışarı doğru akısının –3 olduğunu varsayın. Üst taraftan dışarı doğru akı hakkında bir sonuç çıkarabilir misiniz? Yanıtınızı açıklayın.



23. a. Konum vektör alanı $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$'nin düzgün kapalı bir S yüzeyinden dışarı doğru akısının, yüzeyin çevrelediği bölgenin hacminin üç katı olduğunu gösterin.

b. $\mathbf{n}$, S yüzeyinin dışarı doğru birim normal vektör alanı olsun. $\mathbf{F}$'nin, S'nin her noktasında $\mathbf{n}$'ye ortogonal olmasının mümkün olmadığını gösterin.

24. Maksimum akı $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le 1$ eşitsizlikleriyle tanımlı bütün dikdörtgen şekilli cisimler arasından $\mathbf{F} = (-x^2 - 4xy)\mathbf{i} - 6yz\mathbf{j} + 12z\mathbf{k}$'nin altı yüzeyden dışarı doğru akısının en büyük olduğu cismi bulun. En büyük akı nedir?

25. Bir katı cismin hacmi $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ olsun ve S yüzeyinin, Diverjans Teoreminin koşullarını sağladığını varsayın. D'nin hacminin

$$D\text{'nin hacmi} = \frac{1}{3}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

formülüyle verildiğini gösterin.

26. Sabit bir alanın akısı Sabit bir $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ vektör alanının, Diverjans Teoreminin uygulanabileceği herhangi bir kapalı yüzeyden dışarı doğru akısının sıfır olduğunu gösterin.

27. Harmonik fonksiyonlar Bir $f(x, y, z)$ fonksiyonu bir D bölgesinde

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Laplace denklemini sağlıyorsa, f fonksiyonuna D'de *harmonik* denir.

a. f'nin düzgün bir S yüzeyiyle çevrelenen sınırlı bir D bölgesinde harmonik olduğunu ve $\mathbf{n}$'nin S üzerinde seçilen birim normal vektör olduğunu varsayın. $\nabla f \cdot \mathbf{n}$, yani f'nin $\mathbf{n}$ yönündeki türevinin S üzerindeki integralinin sıfırı olduğunu gösterin.

b. f, D üzerinde harmonik ise,

$$\iint_S f\, \nabla f \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D |\nabla f|^2\, dV.$$

olduğunu gösterin.

28. Bir gradiyent alanın akısı S, $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ küresinin birinci

sekizde bir bölgede bulunan kısmının yüzeyi ve $f(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. olsun.

$$\iint_S \nabla f \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

akısını hesaplayın ($\nabla f \cdot \mathbf{n}$, f'nin $\mathbf{n}$ yönündeki türevidir).

29. Green'in birinci formülü f ve g'nin, parçalı olarak düzgün bir S yüzeyiyle sınırlı, kapalı bir D bölgesinde birinci ve ikinci mertebe kısmi türevleri sürekli olan skaler fonksiyonlar olduklarını varsayın.

$$\iint_S f\,\nabla g \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D (f\,\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV. \qquad (9)$$

olduğunu gösterin. (9) Denklemi **Green'in birinci formülüdür.** (*İpucu:* $\mathbf{F} = f\,\nabla g$ alanına Diverjans Teoremini uygulayın.)

30. Green'in ikinci formülü (*Alıştırma 29'un devamı.*) (9) Denkleminde f ve g'nin yerlerini değiştirerek benzer bir formül elde edin. Sonra bu formülü (9) Denkleminden çıkararak,

$$\iint_S (f\,\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D (f\,\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dV. \qquad (10)$$

olduğunu gösterin. Bu denklem **Green'in ikinci formülüdür.**

31. Kütle korunumu $\mathbf{v}(t, x, y, z)$ uzayda bir D bölgesinde sürekli olarak türetilebilen bir vektör alanı ve $p(t, x, y, z)$ de sürekli olarak türetilebilen skaler bir fonksiyon olsun. t değişkeni zaman aralığını gösterir. Kütle Korunumu Yasası, D'yi çevreleyen yüzey S olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}\iiint_D p(t, x, y, z)\, dV = -\iint_S p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma,$$

olduğunu söyler.

a. $\mathbf{v}$ bir hız akış alanı ise ve p de akışkanın t anında (x, y, z) noktasındaki yoğunluğunu temsil ediyorsa, kütle korunumunun fiziksel bir yorumunu yapın.

b. Diverjans Teoremini ve Leibniz kuralını,

$$\frac{d}{dt}\iiint_D p(t, x, y, z)\, dV = \iiint_D \frac{\partial p}{\partial t}\, dV$$

kullanarak, Kütle Korunumu Yasasının

$$\nabla \cdot p\mathbf{v} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

(süreklilik denklemine eşdeğer olduğunu gösterin (Birinci terim $\nabla \cdot p\mathbf{v}$'de t değişkeninin, ikinci terim $\partial p/\partial t$'de ise D'deki (x, y, z) noktasının sabit tutulduğu varsayılmaktadır).

32. Isı difüzyon denklemi İkinci mertebe kısmi türevleri sürekli olan $T(t, x, y, z)$'nin, uzayda bir D bölgesini kaplayan bir cismin, t anında (x, y, z) noktasındaki sıcaklığını veren bir fonksiyon olduğunu varsayın. Cismin özgül ısısı ve kütle yoğunluğu sırasıyla c ve ρ ile gösteriliyorsa, $c\rho T$ büyüklüğüne cismin **birim hacimdeki ısı enerjisi** denir.

a. $-\nabla T$'nin neden ısı akışı yönünde olduğunu açıklayın.

b. $-k\nabla T$ **enerji akı vektörünü** göstersin. (k sabitine **iletkenlik** denir.) Alıştırma 31'deki Kütle korunum Yasasında $-k\nabla T = \mathbf{v}$ ve $c\rho T = p$ olduğunu varsayarak, $K = k/(c\rho) > 0$ *yayılma* sabiti olmak üzere,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\nabla^2 T$$

difüzyon (ısı) denklemini Türetin ($T(t, x)$ kenarları mükemmel şekilde yalıtılmış düzgün iletken bir çubukta t anında x konumundaki sıcaklığı temsil ediyorsa, $\nabla^2 T = \partial^2 T/\partial x^2$ olacağına ve difüzyon denkleminin Bölüm 14 Ek Alıştırmalardaki bir-boyutlu ısı denklemine indirgeneceğine dikkat edin).

Bölüm 16 Bölüm Tekrar Soruları

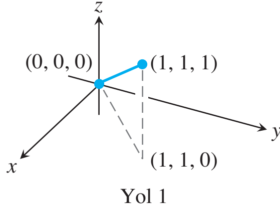
1. Eğrisel integraller nedir? Nasıl hesaplanırlar? Örnekler verin.
2. Yayların kütle merkezini bulmak için eğrisel integralleri nasıl kullanabilirsiniz? Açıklayın.
3. Bir vektör alanı ve bir gradiyent alanı nedir? Örnekler verin.
4. Bir parçacığı bir eğri boyunca hareket ettirmek için bir kuvvetin yaptığı işi nasıl hesaplarsınız? Bir örnek verin.
5. Akış, dolaşım ve akı nedir?
6. Yoldan bağımsız alanların özelliği nedir?
7. Bir alanın korunmalı olduğunu nasıl söylersiniz?
8. Bir potansiyel fonksiyon nedir? Örnek vererek, korunmalı bir alanın potansiyel fonksiyonunun nasıl bulunacağını gösterin.
9. Diferansiyel form nedir? Böyle bir formun tam olması ne anlama gelir? Tamlığı nasıl test edersiniz? Örnekler verin.
10. Bir vektör alanının diverjansı nedir? Bunu nasıl yorumlarsınız?
11. Bir vektör alanının rotasyoneli nedir? Bunu nasıl yorumlarsınız?
12. Green Teoremi nedir? Bunu nasıl yorumlarsınız?
13. Uzaydaki eğri bir yüzeyin alanını nasıl hesaplarsınız? Bir örnek verin.

14. Yönlendirilmiş bir yüzey nedir? Üç-boyutlu bir vektör alanının yönlendirilmiş bir yüzeydeki akısını nasıl hesaplarsınız? Bir örnek verin.
15. Yüzey integralleri nedir? Bunlarla ne hesaplayabilirsiniz? Bir örnek verin.
16. Parametrize bir yüzey nedir? Böyle bir yüzeyin alanını nasıl bulabilirsiniz? Örnekler verin.
17. Bir fonksiyonu parametrize bir yüzeyde nasıl integre edersiniz? Bir örnek verin.
18. Stokes teoremi nedir? Bunu nasıl yorumlarsınız?
19. Bölümün korunmalı alanlar üzerine çıkardığı sonuçları özetleyin.
20. Diverjans Teoremi nedir? Bunu nasıl yorumlarsınız?
21. Diverjans Teoremi, Green Teormini nasıl genelleştirir?
22. Stokes Teoremi, Green Teoremini nasıl genelleştirir?
23. Green Teoremi, Stokes Teoremi ve Diverjans Teoremi tek bir temel teoremin şekilleri olarak nasıl düşünülebilir?

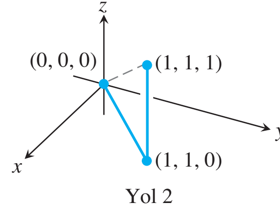
Bölüm 16 Problemler

Eğrisel İntegralleri Hesaplamak

1. Şekil, uzayda orijini (1, 1, 1) noktasına bağlayan iki çok kenarlı yol göstermektedir. $f(x, y, z) = 2x - 3y^2 - 2z + 3$ fonksiyonunu her yol üzerinde integre edin.

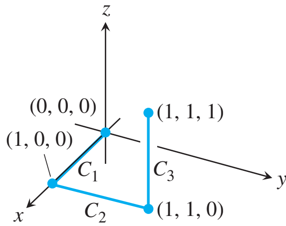


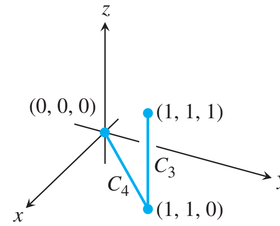
Yol 1

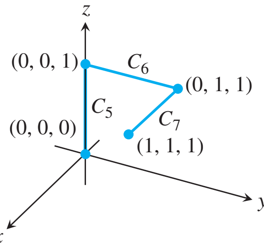


Yol 2

2. Şekil, uzayda orijini (1, 1, 1) noktasına bağlayan üç çok kenarlı yol göstermektedir. $f(x, y, z) = x^2 + y - z$ fonksiyonunu her yol üzerinde integre edin.







3. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$'yi

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{j} + (a\sin t)\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

çember üzerinde integre edin.

4. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$'yi

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j}, \qquad 0 \le t \le \sqrt{3}.$$

involut eğrisi üzerinde integre edin.

5 ve 6 problemlerindeki integralleri hesaplayın.

5. $\displaystyle\int_{(-1,1,1)}^{(4,-3,0)} \frac{dx + dy + dz}{\sqrt{x + y + z}}$

6. $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(10,3,3)} dx - \sqrt{\frac{z}{y}}\,dy - \sqrt{\frac{y}{z}}\,dz$

7. $\mathbf{F} = -(y\sin z)\mathbf{i} + (x\sin z)\mathbf{j} + (xy\cos z)\mathbf{k}$'yi $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ küresinden $z = -1$ düzlemiyle kesilen çember üzerinde, yukarıdan bakıldığında saat yönünde integre edin.

8. $\mathbf{F} = 3x^2y\mathbf{i} + (x^3 + 1)\mathbf{j} + 9z^2\mathbf{k}$'yi $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ küresinden $x = 2$ düzlemiyle kesilen çember üzerinde integre edin.

9 ve 10 problemlerindeki eğrisel integrallerini hesaplayın.

9. $\displaystyle\int_C 8x\sin y\,dx - 8y\cos x\,dy$

C, birinci dörtte bir bölgeden $x = \pi/2$ ve $y = \pi/2$ doğruları ile kesilen karedir.

10. $\displaystyle\int_C y^2\,dx + x^2\,dy$

C, $x^2 + y^2 = 4$ çemberidir.

Yüzey İntegrallerini Hesaplamak

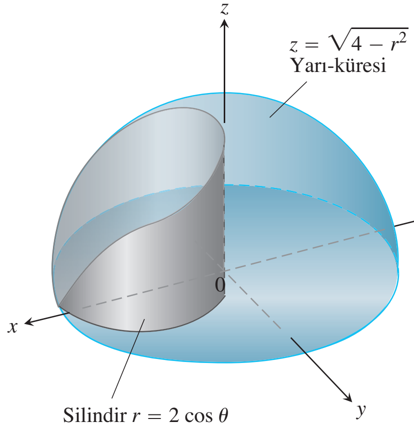
11. **Eliptik bir bölgenin alanı** $x + y + z = 1$ düzleminden $x^2 + y^2 = 1$ silindiriyle kesilen eliptik bölgenin alanını bulun.

12. **Parabolik bir kapağın alanı** alanı $y^2 + z^2 = 3x$ paraboloidinden $x = 1$ düzlemiyle kesilen kapağın alanını bulun.

13. **Küresel bir kapağın alanı** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresinden $z = \sqrt{2}/2$ düzlemiyle kesilen kapağın alanını bulun.

14. a. Silindirle kesilen yarı-küre $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, yarı-küresinden $x^2 + y^2 = 2x$ silindiriyle kesilen yüzeyin alanını bulun.

b. Silindirin yarı-küre içinde kalan kısmının alanını bulun (*İpucu:* xz-düzlemi üzerinde izdüşümü alın. Veya h silindirin yüksekliği ve ds de xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = 2x$ çemberinin yay uzunluğu elemanı olmak üzere, $\int h\, ds$ integralini hesaplayın).



15. Bir üçgenin alanı $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ $(a, b, c > 0)$ düzleminin birinci sekizde bir bölgeyle kesişimi olan üçgenin alanını bulun. Yanıtınızı uygun bir vektör hesabıyla doğrulayın.

16. Düzlemlerle kesilen parabolik silindir $y^2 - z = 1$ parabolik silindirinden $x = 0$, $x = 3$ ve $z = 0$ düzlemleriyle kesilen yüzey üzerinde

a. $g(x, y, z) = \dfrac{yz}{\sqrt{4y^2 + 1}}$ **b.** $g(x, y, z) = \dfrac{z}{\sqrt{4y^2 + 1}}$

fonksiyonlarını integre edin.

17. Düzlemlerle kesilen dairesel silindir $g(x, y, z) = x^4y(y^2 + z^2)$'yi $y^2 + z^2 = 25$ silindirinin birinci sekizde bir bölgede $x = 0$ ve $x = 1$ düzlemlerinin arasında ve $z = 3$ düzleminin üst tarafında kalan kısmı üzerinde integre edin.

18. Wyoming'in alanı Wyoming eyaleti $111°3'$ ve $104°3'$ batı meridyenleri ile $41°$ ve $45°$ kuzey paralelleri arasındadır. Dünyanın, $R = 3959$ mil yarıçaplı bir küre olduğunu varsayarak, Wyoming'in alanını bulun.

Parametrize Yüzeyler

19–24 problemlerindeki yüzeylerin parametrizasyonlarını bulun (Bunu yapmanın bir çok yolu vardır, dolayısıyla yanıtlarınız kitabın arkasındakilerle aynı olmayabilir).

19. Silindirik şerit $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ küresinin $z = -3$ ve $z = 3\sqrt{3}$ düzlemleri arasında kalan kısmı.

20. Parabolik kapak $z = -(x^2 + y^2)/2$ paraboloidinin $z = -2$ düzleminin üst tarafında kalan kısmı.

21. Koni $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \leq 3$ konisi

22. Kare üzerinde düzlem $4x + 2y + 4z = 12$ düzleminin birinci dörtte bir bölgedeki $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ karesinin üzerindeki kısmı

23. Paraboloid parçası $y = 2(x^2 + z^2)$, $y \leq 2$, paraboloidinin xy-düzleminin üstünde kalan kısmı

24. Yarı-küre parçası $x^2 + y^2 + z^2 = 10$, $y \geq 0$, yarı-küresinin birinci sekizde bir bölgede kalan kısmı

25. Yüzey alanı Aşağıdaki yüzeyin alanını bulun.

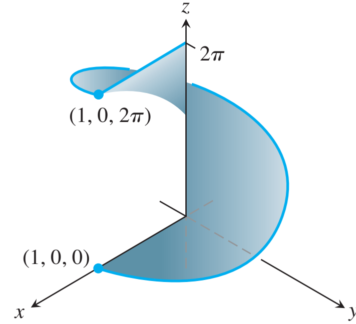
$$\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + v\mathbf{k},$$
$$0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1$$

26. Yüzey integrali $f(x, y, z) = xy - z^2$'yi Problem 25'teki yüzey üzerinde integre edin.

27. Helikoid alanı Aşağıdaki şekilde görülen

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \theta\mathbf{k}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1$$

helikoidinin yüzey alanını bulun.



28. Yüzey integrali $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, d\sigma$ integralini, S yüzeyi Problem 27'deki helikoid olmak üzere, hesaplayın.

Korunmalı Alanlar

29–32 Problemlerindeki alanların hangileri korunmalı, hangileri değildir?

29. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

30. $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$

31. $\mathbf{F} = xe^y\mathbf{i} + ye^z\mathbf{j} + ze^x\mathbf{k}$

32. $\mathbf{F} = (\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k})/(x + yz)$

33 ve 34 Problemlerindeki alanların potansiyel fonksiyonlarını bulun.

33. $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + (2y + z)\mathbf{j} + (y + 1)\mathbf{k}$

34. $\mathbf{F} = (z\cos xz)\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + (x\cos xz)\mathbf{k}$

İş ve Dolaşım

35 ve 36 Problemlerinde, Alıştırma 1'deki (0, 0, 0)'dan (1, 1, 1)'e giden yollar üzerinde, her bir alanın yaptığı işi bulun.

35. $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + \mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ **36.** $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

37. İş'i iki yoldan bulmak $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j}$ düzlem eğrisi üzerinde (1, 0) noktasından $(e^{2\pi}, 0)$ noktasına kadar

$$\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

kuvvetinin yaptığı işi iki farklı yoldan bulun:

a. İş integralini hesaplamak için eğrinin parametrizasyonunu kullanarak,

b. **F**'nin bir potansiyel fonkisyonunu hesaplayarak.

38. Farklı yollar üzerinde akış $\mathbf{F} = \nabla(x^2ze^y)$ alanının akışını aşağıdaki gibi bulun.

a. $x + y + z = 1$ düzleminin $x^2 + z^2 = 25$ silindirini kestiği C elipsi boyunca, pozitif y-ekseninden bakıldığında saat yönünde bir tur,

b. Problem 27'deki helikoidin eğri sınırında (1, 0, 0)'dan $(1, 0, 2\pi)$'ye kadar.

39 ve 40 Problemlerinde, Stokes Teoremindeki yüzey integralini kullanarak **F**'nin C eğrisi üzerinde belirtilen yöndeki dolaşımını bulun.

39. Bir elips üzerinde dolaşım $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}$

C: $2x + 6y - 3z = 6$ düzleminin $x^2 + y^2 = 1$ silindirini kestiği elips, yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine

40. Bir çember üzerinde dolaşım $\mathbf{F} = (x^2 + y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (4y^2 - z)\mathbf{k}$

C: $z = -y$ düzleminin $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresini kestiği çember, yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine

Kütle ve Momentler

41. Farklı yoğunluklarda tel t'deki yoğunluğu **(a)** $\delta = 3t$ ve **(b)** $\delta = 1$ ise, $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + \sqrt{2}t\mathbf{j} + (4 - t^2)\mathbf{k}$, eğrisi üzerinde bulunan ince bir telin kütlesini bulun.

42. Değişken yoğunluklu tel t'deki yoğunluğu $\delta = 3\sqrt{5 + t}$ ise, $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (2/3)t^{3/2}\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$, eğrisi üzerinde bulunan ince bir telin kütlesini bulun.

43. Değişken yoğunluklu tel t'deki yoğunluğu $\delta = 1/(t + 1)$ ise,

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2,$$

eğrisi üzerinde bulunan ince bir telin kütle merkezini, koordinat eksenleri etrafındaki eylemsizlik momentlerini ve jirasyon yarıçaplarını bulun.

44. Bir yayın kütle merkezi İnce bir metal yay xy-düzlemindeki $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarım çemberi üzerinde bulunmaktadır. Yay üzerindeki (x, y) noktasında yoğunluk $\delta(x, y) = 2a - y$'dir. Kütle merkezini bulun.

45. Sabit yoğunluklu tel Sabit $\delta = 1$ yoğunluklu bir tel, $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + e^t\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le \ln 2$, eğrisi üzerindedir. $\overline{z}$, I_z ve R_z'yi bulun.

46. Sabit yoğunluklu helisel tel $\mathbf{r}(t) = (2 \sin t)\mathbf{i} + (2 \cos t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$, helisi üzerinde bulunan sabit δ yoğunluklu telin kütlesini ve kütle merkezini bulun.

47. Bir kabuğun eylemsizliği, jirasyon yarıçapı, kütle merkezi $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ küresinin üst kısmından $z = 3$ düzlemiyle kesilen ve yoğunluğu $\delta(x,y,z) = z$ olan ince kabuğun kütle merkezini, I_z'yi ve R_z'yi bulun.

48. Bir küpün eylemsizlik momenti Yoğunluğu $\delta = 1$ ise, birinci sekizde bir bölgeden $x = 1$, $y = 1$ ve $z = 1$ düzlemleriyle kesilen küp yüzeyinin z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentini bulun.

Düzlemsel Bir Eğri veya Yüzeydeki Akı

Green Teoremini kullanarak, 49 ve 50 Problemlerindeki alan ve eğriler için saat yönünün tersine dolaşımı ve dışarı doğru akıyı bulun.

49. Kare $\mathbf{F} = (2xy + x)\mathbf{i} + (xy - y)\mathbf{j}$

C: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ ile sınırlı kare

50. Üçgen $\mathbf{F} = (y - 6x^2)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j}$

C: $y = 0$, $y = x$ ve $x = 1$ doğrularıyla oluşturulan üçgen

51. Sıfır eğrisel integral Green Teoreminin uygulanabildiği herhangi kapalı bir C eğrisi için

$$\oint_C \ln x \sin y\, dy - \frac{\cos y}{x}\, dx = 0$$

olduğunu gösterin.

52. a. Dışarıya akı ve alan $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ konum vektör alanının, Green Teoreminin uygulanabildiği herhangi bir kapalı eğriden dışarı doğru akısının, eğrinin çevrelediği bölgenin alanının iki katı olduğunu gösterin.

b. **n**, Green Teoreminin uygulanabildiği kapalı bir eğrinin dışarı doğru birim normal vektörü olsun. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ alanının C'nin her noktasında **n**'ye ortogonal olmasının mümkün olmadığını gösterin.

53–56 Problemlerinde, **F** alanının, D'nin sınırından dışarı doğru akısını bulun.

53. Küp $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$

D: Birinci sekizde bir bölgeden $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ düzlemleriyle kesilen küp

54. Küresel kapak $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + \mathbf{k}$

D: $x^2 + y^2 + z^2 \le 25$ küresinden $z = 3$ düzlemiyle kesilen üst kapağın bütün yüzeyi

55. Küresel kapak $\mathbf{F} = -2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

D: $x^2 + y^2 + z^2 \le 2$ küresinden $z = x^2 + y^2$ paraboloidiyle kesilen üst bölge

56. Koni ve silindir $\mathbf{F} = (6x + y)\mathbf{i} - (x + z)\mathbf{j} + 4yz\mathbf{k}$

D: Birinci sekizde bir bölgede $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi, $x^2 + y^2 = 1$ silindiri ve koordinat düzlemleriyle sınırlanan bölge

57. Yarı-küre, silindir ve düzlem S, soldan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y \leq 0$, yarım küresi, ortadan $x^2 + z^2 = a^2$, $0 \leq y \leq a$ silindiri ve sağdan $y = a$ düzlemiyle sınırlı yüzey olsun. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ alanının S'den dışarı doğru akısını bulun.

58. Silindir ve düzlemler $\mathbf{F} = 3xz^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z^3\mathbf{k}$ alanının, birinci sekizde bir bölgede $x^2 + 4y^2 = 16$ silindiri ve $y = 2z$, $x = 0$ ve $z = 0$ düzlemleri ile sınırlı cismin yüzeyinden dışarı doğru akısını bulun.

59. Silindirik kutu Diverjans Teoremini kullanarak, $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ alanının $x^2 + y^2 = 1$ silindiri, $z = 1$ ve $z = -1$ düzlemleriyle çevrili bölgeden dışarı doğru akısını bulun.

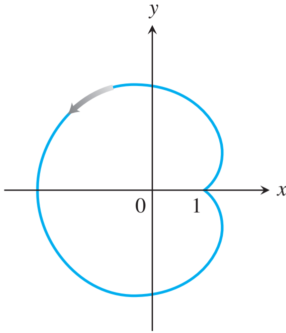
60. Yarı-küre $\mathbf{F} = (3z + 1)\mathbf{k}$'nin $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, yarı-küresinden dışarı doğru akısını **(a)** Diverjans Teoremiyle ve **(b)** integrali doğrudan hesaplayarak bulun.

Bölüm 16 Ek ve İleri Alıştırmalar

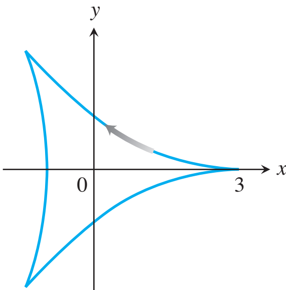
Green Teoremiyle Alan Bulmak

Green Teoremi alan formülünü kullanarak, Alıştırmalar 16.4'teki (13) Denklemi, 1–4 alıştırmalarındaki eğrilerle sınırlı bölgelerin alanlarını bulun.

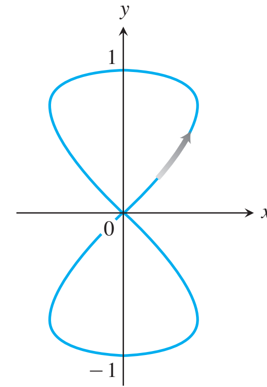
1. $x = 2\cos t - \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ limaçonu



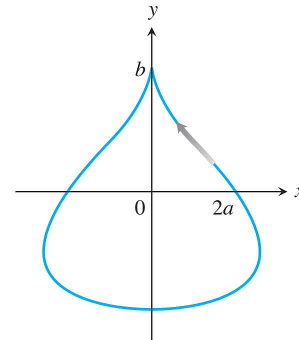
2. $x = 2\cos t + \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ deltoidi



3. $x = (1/2)\sin 2t, \ y = \sin t, \ 0 \leq t \leq \pi$ (bir çevrim) sekiz eğrisi



4. $x = 2a\cos t - a\sin 2t, y = b\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ gözyaşı damlası



Teori ve Uygulamalar

5. a. Sadece bir noktada **0** değerini alan ve rot **F** her yerde sıfırdan farklı olan bir $\mathbf{F}(x, y, z)$ vektör alanına bir örnek verin. Noktayı belirlemeyi ve rotasyoneli hesaplamayı unutmayın.

b. Sadece bir doğru üzerinde **0** değerini alan ve rot **F** her yerde sıfırdan farklı olan bir $\mathbf{F}(x, y, z)$ vektör alanına bir örnek verin. Doğruyu belirlemeyi ve rotasyoneli hesaplamayı unutmayın.

c. Bir yüzeyde **0** değerini alan ve rot **F** her yerde sıfırdan farklı olan bir $\mathbf{F}(x, y, z)$ vektör alanına bir örnek verin. Yüzeyi belirlemeyi ve rotasyoneli hesaplamayı unutmayın.

6. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ küresi üzerinde $\mathbf{F} = yz^2\mathbf{i} + xz^2\mathbf{j} + 2xyz\mathbf{k}$ vektör alanının yüzeye normal olduğu ve $\mathbf{F}(a, b, c) \neq \mathbf{0}$ olduğu bütün (a, b, c) noktalarını bulun.

7. Yüzeydeki her (x, y, z) noktasında kütle yoğunluğu $\delta(x, y, z)$, yüzey üzerindeki sabit bir (a, b, c) noktasına uzaklık olmak üzere R yarıçaplı bir küresel kabuğun kütlesini bulun.

8. Yoğunluk fonksiyonu $\delta(x, y, z) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ ise,

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \theta\mathbf{k}$$

$0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, helikoidinin kütlesini bulun. Şekil için Problem 27'ye bakın.

9. $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ dikdörtgen bölgeleri arasından, $\mathbf{F} = (x^2 + 4xy)\mathbf{i} - 6y\mathbf{j}$ alanının, dört kenardan dışarı doğru akısı en küçük olanını bulun. En küçük akı nedir?

10. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresiyle kesişim çemberi üzerinde, $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ akış alanının dolaşımı maksimum olacak şekilde, orijinden geçen bir düzlem denklemi bulun.

11. Birinci bölgede, $x^2 + y^2 = 4$ çemberi üzerinde $(2, 0)$'dan $(0, 2)$'ye kadar bir ip bulunmaktadır. İpin yoğunluğu $\rho(x, y) = xy$'dir.

a. İpi sonlu sayıda alt yaya bölerek, g yerçekimi sabiti olmak üzere, yerçekiminin ipi x-eksenine indirmek için yapacağı işin,

$$\text{İş} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g\, x_k y_k^2 \Delta s_k = \int_C g\, xy^2\, ds$$

olduğunu gösterin.

b. (a) şıkkındaki eğrisel integrali hesaplayarak yapılan toplam işi bulun.

c. Yapılan toplam işin, ipin kütle merkezi $(\bar{x}, \bar{y})$'yi x-eksenine indirmek için yapılması gereken işe eşit olduğunu gösterin.

12. İnce bir tabaka, birinci sekizde bir bölgede $x + y + z = 1$ düzleminde bulunmaktadır. Tabakanın yoğunluğu $\delta(x, y, z) = xy$'dir.

a. Tabakayı sonlu sayıda alt parçalara bölerek, yerçekiminin tabakayı xy-düzlemine indirmek için yapacağı işin, g yerçekimi sabiti olmak üzere,

$$\text{İş} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g\, x_k y_k z_k\, \Delta\sigma_k = \iint_S g\, xyz\, d\sigma$$

olduğunu gösterin.

b. (a) şıkkındaki yüzey integralini hesaplayarak yapılan toplam işi bulun.

c. Yapılan toplam işin, tabakanın kütle merkezi $((\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$'yi xy-düzlemine indirmek için yapılması gereken işe eşit olduğunu gösterin.

13. Arşimet prensibi Top gibi bir cisim bir sıvıya yerleştirilirse, ya dibe çökecek, ya yüzecek ya da belirli bir mesafe batacak ve sıvı içinde asılı kalacaktır. Bir sıvının sabit bir w ağırlık yoğunluğu olduğunu ve sıvının yüzeyinin $z = 4$ düzlemiyle çakıştığını varsayın. Küresel bir top sıvı içinde asılı kalır ve $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \le 1$ bölgesini kaplar.

a. Sıvının basıncından dolayı top üzerine etkiyen toplam kuvvetin büyüklüğünü veren yüzey integralinin

$$\text{Kuvvet} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} w(4 - z_k)\, \Delta\sigma_k = \iint_S w(4 - z)\, d\sigma$$

olduğunu gösterin.

b. Top hareket etmediği için, sıvının kaldırma kuvveti tarafından tutuluyor olmalıdır. Küre üzerindeki kaldırma kuvvetinin büyüklüğünün, $\mathbf{n}\,(x, y, z)$'de dış birim normal olmak üzere,

$$\text{Kaldırma kuvveti} = \iint_S w(z - 4)\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$$

olduğunu gösterin. Bu, su altındaki bir cismin üzerine etkiyen kaldırma kuvvetinin büyüklüğünün yerdeğiştiren suyun ağırlığına eşit olduğunu söyleyen Arşimet prensibinin bir gösterimidir.

c. Diverjans Teoremini kullanarak (b) şıkkındaki kaldırma kuvvetinin büyüklüğünü bulun.

14. Eğri bir yüzeyde akışkan kuvveti $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 2$ yüzeyi şeklindeki bir koni sabit w ağırlık yoğunluklu bir sıvıyla doldurulmuştur. xy-düzleminin "taban seviyesi" olduğunu varsayarak, koninin $z = 1$'den $z = 2$'ye kadar olan kısmı üzerinde, sıvı basıncından dolayı, toplam kuvvetin

$$F = \iint_S w(2 - z)\, d\sigma$$

yüzey integrali olduğunu gösterin. İntegrali hesaplayın.

15. Faraday yasası $\mathbf{E}(t, x, y, z)$ ve $\mathbf{B}(t, x, y, z)$, t anında (x, y, z) noktasındaki elektrik ve manyetik alanları temsil ediyorlarsa, elektromanyetik teorinin temel bir prensibi $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ olduğunu söyler. Bu ifadede, $\nabla \times \mathbf{E}$, t sabit tutularak ve $\partial\mathbf{B}/\partial t$ de (x, y, z) sabit tutularak hesaplanır. Stokes Teoremini kullanarak, Faraday yasasını,

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$$

türetin. Burada C eğrisi, akımın, yüzeyin birim normali $\mathbf{n}$'ye göre, saat yönünün tersine aktığı ve C etrafında

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

gerilimine yol açan tel bir döngüyü temsil etmektedir. Denklemin sağ tarafındaki yüzey integraline *manyetik akı* denir ve S de sınırı C olan herhangi bir yönlendirilmiş yüzeydir.

16.

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$$

$\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ için tanımlı çekim kuvvet alanı olsun. Bölüm 16.8' deki Gauss Yasasını kullanarak, $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{H}$ denklemini sağlayan sürekli olarak türetilebilir bir $\mathbf{H}$ vektör alanı bulunmadığını gösterin.

17. $f(x, y, z)$ ve $g(x, y, z)$ sınırı C eğrisi olan yönlendirilmiş bir S yüzeyi üzerinde tanımlı sürekli olarak türetilebilen skaler fonksiyonlarsa,

$$\iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \oint_C f\, \nabla g \cdot d\mathbf{r}$$

olduğunu ispatlayın.

18. Dışarı doğru birim normal vektörü $\mathbf{n}$ olan yönlendirilmiş S yüzeyiyle sınırlı bir D bölgesinde $\nabla \cdot \mathbf{F}_1 = \nabla \cdot \mathbf{F}_2$ ve $\nabla \times \mathbf{F}_1 = \nabla \times \mathbf{F}_2$ olduğunu ve S üzerinde $\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n}$ olduğunu varsayın. D üzerinde $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$ olduğunu gösterin.

19. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ ve $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ ise, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ olduğunu ispatlayın veya olmadığını gösterin.

20. S, $\mathbf{r}(u, v)$ ile parametrize edilen yönlendirilmiş bir yüzey olsun. $d\boldsymbol{\sigma}$ yüzeye normal bir vektör olmak üzere $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r}_u\, du \times \mathbf{r}_v\, dv$ gösterimini tanımlayın. Ayrıca, $d\sigma = |d\boldsymbol{\sigma}|$ büyüklüğü yüzey alanı elemanıdır (Bölüm 16.6'daki 5 Denkleminden dolayı).

$$d\sigma = (EG - F^2)^{1/2}\, du\, dv$$

olmak üzere,

$$E = |\mathbf{r}_u|^2, \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \quad \text{ve} \quad G = |\mathbf{r}_v|^2$$

bağıntısını türetin.

21. Uzayda dışarı doğru birim normal vektörü $\mathbf{n}$ olan yönlendirilmiş bir S yüzeyiyle sınırlı bir D bölgesinin hacmi V'nin, D üzerindeki (x, y, z) noktasının konum vektörü $\mathbf{r}$ olmak üzere,

$$V = \frac{1}{3}\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

bağıntısını sağladığını gösterin.

Bölüm 16 Teknoloji Uygulama Projeleri

Mathematica / Maple Module

Korunmalı ve Korunmalı Olmayan Kuvvet Alanlarında İş

Vektör alanları üzerinde integrali araştırın ve alan içinde farklı yollar boyunca, korunmalı ve korunmalı olmayan kuvvet fonksiyonları ile deneyler yapın.

Mathematica / Maple Module

Green Teoremini Gözünüzde Nasıl Canlandırırsınız?

Vektör alanları üzerinde integrasyonu araştırın ve eğrisel integralleri hesaplamak için parametrizasyonlar kullanın. Green Teoreminin her iki şekli inceleniyor.

Mathematica / Maple Module

Diverjans Teoremini Göz Önüne Getirmek ve Yorumlamak

Belirli diverjansları ve yüzey integrallerini formüle edip hesaplayarak Diverjans Teoremini gerçekleyin.

EKLER

E.1 Matematik İndüksiyon

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

gibi bir çok formülün her n pozitif tamsayısı için doğru olduğu *matematiksel indüksyon prensibi* denilen bir aksiyom uygulanarak gösterilebilir. Bu aksiyomu kullanan bir ispata *matematiksel indüksiyonla ispat* veya *indüksiyonla ispat* denir.

Bir formülü indüksiyona ispatlamanın adımları aşağıdadır.

1. Formülün $n = 1$ için doğruluğunu kontrol edin.

2. Formül herhangi bir pozitif $n = k$ tamsayısı için doğru ise, bundan sonraki tamsayı, $n = k + 1$, için de doğru olduğun gösterin.

İndüksiyon aksiyomu şunu söyler: bu adımlar tamamlandığında, formül bütün pozitif n tamsayıları için doğrudur. Adım 1'den, formül $n = 1$ için doğrudur. Adım 2' den $n = 2$ ve dolayısıyla Adım 2'den $n = 3$ ve yine Adım 2'den $n = 4$ için, vb. doğrudur. İlk domino taşı düşerse, ve k. domino taşı düşerken her zaman $(k + 1)$. taşa vuruyorsa, bütün domino taşları düşer.

Başka bir bakış açısıyla, her pozitif tamsayı için bir tane olmak üzere, elimizde $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, ifadelerinin bulunduğunu varsayalım. İfadelerin herhangi birinin doğru olduğun varsaymanın sıradaki diğer ifadenin doğru olduğu anlamına geldiğini gösterebildiğimizi varsayalım. Ayrıca S_1'in de doğru olduğunu gösterdiğimizi düşünelim. Bu durumda S_1'den sonraki bütün ifadelerin doğru olduğu sonucunu çıkarabiliriz.

ÖRNEK 1 Her pozitif n sayısı için

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

eşitliğinin doğruluğunu matematiksel indüksiyonla gösterin.

Çözüm İspatı yukarıdaki iki adımı kullanarak yapacağız.

1. Formü $n = 1$ için doğrudur, çünkü

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

bulunur.

2. Formül $n = k$ için doğru ise, $n = k + 1$ için de doğru mudur? Yanıt evettir ve nedeni şudur: Eğer

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k + 1)}{2}$$

ise, bu durumda,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) &= \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} \\ &= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} = \frac{(k + 1)((k + 1) + 1)}{2} \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikler zincirindeki son ifade $n = (k + 1)$ için $n(n + 1)/2$ ifadesidir.

Matematiksel indüksiyon prensibi artık orijinal formülü her n pozitif tamsayısı için garantiler. ■

Bölüm 5.2, Örnek 4'te ilk n tamsayının toplamını veren formül için başka bir ispat verdik. Ancak, matematiksel indüksiyonla ispat daha geneldir. Matematiksel indüksiyon, ilk n tamsayının karelerinin, küplerinin toplamını bulmak için kullanılabilir (Alıştırmalar 9 ve 10).

İşte başka bir örnek

ÖRNEK 2 Her pozitif n tamsayısı için,

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

olduğunu gösterin.

Çözüm İspatı matematiksel indüksiyonun iki adımını kullanarak gerçekleştiririz.

1. Formül $n = 1$ için doğrudur, çünkü

$$\frac{1}{2^1} = 1 - \frac{1}{2^1}$$

doğrudur.

2.

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$$

ise, bu durumda,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} &= 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1 \cdot 2}{2^k \cdot 2} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, orijinal formül $n = k$ için geçerliyse, $n = (k + 1)$ için de geçerli olur.

Bu adımlar doğrulandığı için, matematiksel indüksiyon prensibi formülü her pozitif n tamsayısı için garantiler. ■

Diğer Başlangıç Tamsayıları

$n = 1$ ile başlamak yerine, bazı indüksiyon tartışmaları başka bir tamsayıyla başlar. Böyle bir tartışmanın adımları aşağıdaki gibidir.

1. Formülün $n = n_1$ (ilk uygun tamsayı) için doğru olduğunu kontrol edin.
2. Formül herhangi bir $n = k \geq n_1$ tamsayısı için doğru ise, $n = (k + 1)$ için de doğru olduğunu gösterin.

Bu adımlar tamamlandığında, matematiksel indüksiyon prensibi formülü her $n \geq n_1$ tamsayısı için garantiler.

ÖRNEK 3 n yeterince büyükse, $n! > 3^n$ olduğunu gösterin.

Çözüm Ne kadar büyük, yeterince büyüktür? Deneriz:

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040
3^n	3	9	27	81	243	729	2187

Sanki $n \geq 7$ için $n! > 3^n$ gibidir. Emin olmak için matematiksel indüksiyon uygularız. Adım 1'de $n_1 = 7$ alırız ve Adım 2'yi tamamlarız.

Herhangi bir $k \geq 7$ için $k! > 3^k$ olduğunu varsayın. Bu durumda

$$(k + 1)! = (k + 1)(k!) > (k + 1)3^k > 7 \cdot 3^k > 3^{k+1}$$

olur. Böylece, $k \geq 7$ için

$$k! > 3^k \text{ olması } (k+1)! > 3^{k+1} \text{ olmasını}$$

gerektirir. Matematiksel indüksiyon artık her $n \geq 7$ için $n! > 3^n$ olduğunu garantiler. ■

ALIŞTIRMALAR E.1

1. $|a + b| \leq |a| + |b|$ üçgen eşitsizliğinin her pozitif a ve b sayısı için geçerli olduğunu varsayarak, n tane sayı için

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

olduğunu gösterin.

2. $r \neq 1$ ise, her pozitif n tamsayısı için

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

olduğunu gösterin.

3. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ Çarpım Kuralı ve $\frac{d}{dx}(x) = 1$ olduğunu kullanarak, her pozitif n sayısı için

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

olduğunu gösterin.

4. Bir $f(x)$ fonksiyonunun herhangi iki pozitif x_1 ve x_2 sayısı için, $f(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ özelliğine sahip olduğunu varsayın. Her pozitif n tamsayısı için

$$f(x_1x_2\cdots x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$

olduğunu gösterin.

5. Her pozitif n tamsayısı için

$$\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$$

olduğunu gösterin.

6. Yeterince büyük n'ler için, $n! > n^3$ olduğunu gösterin.
7. Yeterince büyük n'ler için, $2^n > n^2$ olduğunu gösterin.
8. $n \geq -3$ ise, $2^n \geq 1/8$ olduğunu gösterin.
9. **Kareler toplamı** İlk n pozitif tamsayının kareleri toplamının

$$\frac{n\left(n + \frac{1}{2}\right)(n + 1)}{3}$$

olduğunu gösterin.

10. **Küpler toplamı** İlk n pozitif tamsayının küpleri toplamının $(n(n+1)/2)^2$ olduğunu gösterin.
11. **Sonlu toplam kuralları** Aşağıdaki sonlu toplam kuralları-nın her pozitif n tamsayısı için geçerli olduğunu gösterin.

a. $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

b. $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

c. $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$ (Her hangi bir c sayısı)

d. $\sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot c$ (a_k'nin değeri sabit ve c ise)

12. Her pozitif n tamsayısı ve her x reel sayısı için, $|x^n| = |x|^n$ olduğunu gösterin.

E.2 Limit Teoremlerinin İspatı

Bu ek Bölüm 2.2'deki Teorem 1, Kısım 2–5 ve Teorem 4'ü ispatlamaktadır.

TEOREM 1 Limit Kuralları

L, M, c ve k reel sayılar ve

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to c} g(x) = M$$

ise aşağıdaki kurallar geçerlidir.

1. *Toplam Kuralı:* $\lim_{x\to c}\left(f(x) + g(x)\right) = L + M$
2. *Fark Kuralı:* $\lim_{x\to c}\left(f(x) - g(x)\right) = L - M$
3. *Çarpım Kuralı:* $\lim_{x\to c}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = L \cdot M$
4. *Sabitle Çarpım Kuralı* $\lim_{x\to c}\left(kf(x)\right) = kL$ (herhangi bit k sayısı)
5. *Bölüm Kuralı:* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$ ise
6. *Kuvvet Kuralı:* r ve s ortak çarpanı bulunmayan tamsayılar ve $s \neq 0$ ise, $L^{r/s}$ bir reel sayı olmak üzere

$$\lim_{x\to c}\left(f(x)\right)^{r/s} = L^{r/s}$$

dir. (s çift ise $L > 0$ kabul ediyoruz.)

Toplam kuralını Bölüm 2.3'te ispatladık ve Kuvvet Kuralı daha ileri metinlerde ispatlanır. Fark Kuralını, Toplam Kuralında $g(x)$ yerine $-g(x)$ ve M yerine $-M$ yazarak elde ederiz. Sabitle Çarpım Kuralı Çarpım Kuralının $g(x) = k$ olduğu özel durumudur. Böylece geriye Çarpım Kuralı ile Bölüm Kuralı kalır.

Limit Çarpım Kuralının İspatı Herhangi bir $\epsilon > 0$'a karşılık bir $\delta > 0$ sayısının var olduğunu göstereceğiz, öyle ki; x sayısı f ve g'nin tanım aralıklarının kesişimi D de olmak üzere

$$0 < |x - c| < \delta$$

koşulunu sağlayan her x için

$$|f(x)g(x) - LM| < \epsilon$$

sağlansın. Bu durumda ϵ'nun pozitif bir sayı olduğunu varsayın ve $f(x)$ ile $g(x)$'i

$$f(x) = L + (f(x) - L), \qquad g(x) = M + (g(x) - M)$$

şeklinde yazın.

Bu ifadeleri çarpın ve LM çıkarın:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) - LM &= (L + (f(x) - L))(M + (g(x) - M)) - LM \\ &= LM + L(g(x) - M) + M(f(x) - L) \\ &\quad + (f(x) - L)(g(x) - M) - LM \\ &= L(g(x) - M) + M(f(x) - L) + (f(x) - L)(g(x) - M). \end{aligned} \quad (1)$$

$x \to c$ iken f ve g'nin limitleri L ve M olduğundan, x sayısı D de olmak üzere

$$\begin{aligned} 0 < |x - c| < \delta_1 &\quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \sqrt{\epsilon/3} \\ 0 < |x - c| < \delta_2 &\quad \Rightarrow \quad |g(x) - M| < \sqrt{\epsilon/3} \\ 0 < |x - c| < \delta_3 &\quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon/(3(1 + |M|)) \\ 0 < |x - c| < \delta_4 &\quad \Rightarrow \quad |g(x) - M| < \epsilon/(3(1 + |L|)) \end{aligned} \quad (2)$$

olacak şekilde δ_1, δ_2, δ_3 ve δ_4 pozitif sayıları vardır. δ'yı δ_1'den δ_4'e kadar giden sayıların en küçüğü olarak alırsak, (2) koşullarında sağ taraftaki eşitsizliklerin hepsi $0 < |x - c| < \delta$ için aynı anda geçerli olacaklardır. Dolayısıyla, x sayısı D de olmak üzere, $0 < |x - c| < \delta$ olması

$$|f(x) \cdot g(x) - LM| \qquad \text{(1) Denklemine üçgen eşitsizliği uygulanır.}$$

$$\leq |L||g(x) - M| + |M||f(x) - L| + |f(x) - L||g(x) - M|$$

$$\leq (1 + |L|)|g(x) - M| + (1 + |M|)|f(x) - L| + |f(x) - L||g(x) - M|$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}\sqrt{\frac{\epsilon}{3}} = \epsilon \qquad \text{(2)'deki değerler}$$

olduğu anlamına gelir. Bu, Limit Çarpım Kuralının ispatını tamamlar. ■

Limit Bölüm Kuralının İspatı $\lim_{x\to c} (1/g(x)) = 1/M$ olduğunu göstereceğiz. Bu durumda Limit Çarpım kuralından

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

olduğu sonucunu çıkarırız.

$\epsilon > 0$ verilmiş olsun. $\lim_{x\to c} (1/g(x)) = 1/M$ olduğunu göstermek için,

$$0 < |x - c| < \delta$$

koşulunu sağlayan her x için

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunduğunu göstermemiz gerekir.

$|M| > 0$ olduğundan,

$$0 < |x - c| < \delta_1$$

koşulunu sağlayan her x için

$$|g(x) - M| < \frac{M}{2} \quad (3)$$

olacak şekilde pozitif bir δ_1 sayısı vardır. Herhangi A ve B sayıları için, $|A| - |B| \leq |A - B|$ ve $|B| - |A| \leq |A - B|$ olduğu gösterilebilir ve buradan $\big||A| - |B|\big| \leq |A - B|$ olduğu anlaşılır. $A = g(x)$ ve $B = M$ alırsak, bu

$$||g(x)| - |M|| \leq |g(x) - M|$$

haline gelir.
Bu (3) denkleminin sağ tarafındaki eşitsizlikle birleştirilerek

$$||g(x)| - |M|| < \frac{|M|}{2}$$

$$-\frac{|M|}{2} < |g(x)| - |M| < \frac{|M|}{2}$$

$$\frac{|M|}{2} < |g(x)| < \frac{3|M|}{2}$$

$$|M| < 2|g(x)| < 3|M|$$

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|} < \frac{3}{|g(x)|} \tag{4}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $0 < |x - c| < \delta_1$ olması

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M - g(x)}{Mg(x)}\right| \leq \frac{1}{|M|} \cdot \frac{1}{|g(x)|} \cdot |M - g(x)|$$

$$< \frac{1}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} \cdot |M - g(x)| \qquad \text{(4) eşitsizliği} \tag{5}$$

olmasını gerektirir. $(1/2)|M|^2 \epsilon > 0$ olduğundan,

$$0 < |x - c| < \delta_2$$

koşulunu sağlayan her x için

$$|M - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}|M|^2 \tag{6}$$

olacak şekilde bir $\delta_2 > 0$ sayısı vardır. δ'yı δ_1 ve δ_2'nin küçük olanı olarak seçersek, (5) ve (6) denklemlerindeki sonuçların ikisi de $0 < |x - c| < \delta$ koşulunu sağlayan her x için gerçeklenir. Bu sonuçları bir araya getirmek

$$0 < |x - c| < \delta$$

koşulunu sağlayan her x için

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterir. Bu da Limit Bölüm Kuralının ispatını tamamlar. ■

TEOREM 4 Sandöviç Teoremi
c'yi içeren bir açık aralıktaki (muhtemelen $x = c$ dışındaki) her x için $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ olduğunu varsayın. Ayrıca, $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$ olduğunu da varsayın. Bu durumda, $\lim_{x\to c} f(x) = L$ olur.

Sağdan limitler için ispat $\lim_{x\to c^+} g(x) = \lim_{x\to c^+} h(x) = L$ olduğunu varsayın. Bu durumda her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık, $c < x < c + \delta$ aralığı I içinde olacak şekilde ve bu eşitsizliği sağlayan her x için

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \qquad \text{ve} \qquad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu eşitsizlikler $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ile birleştiğinde,

$$L - \epsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \epsilon,$$
$$L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon,$$
$$-\epsilon < f(x) - L < \epsilon.$$

elde edilir. Dolayısıyla, $c < x < c + \delta$ eşitsizliği $|f(x) - L| < \epsilon$ olmasını gerektirir. ■

Soldan limitler için ispat $\lim_{x\to c^-} g(x) = \lim_{x\to c^-} h(x) = L$ olduğunu varsayın. Bu durumda her $\epsilon > 0$ değerine karşılık, $c - \delta < x < c$ aralığı I içinde olacak şekilde ve bu eşitsizliği sağlayan her x için

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \qquad \text{ve} \qquad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$$

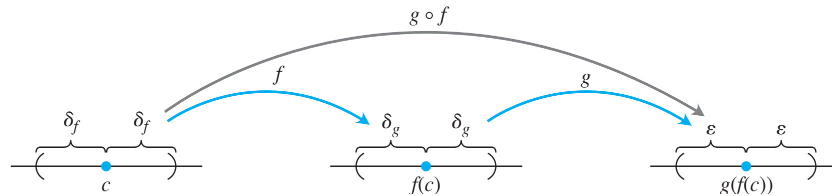
olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Daha önce olduğu gibi, $c - d < x < c$ eşitsizliği $|f(x) - L| < \epsilon$ olmasını gerektirir. ■

İki taraflı limitler için ispat $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$ ise, $x \to c^+$ ve $x \to c^-$ iken, hem $g(x)$ hem de $h(x)$ L'ye yaklaşırlar; dolayısıyla $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ ve $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ olur. Yani, $\lim_{x\to c} f(x)$ vardır ve L'ye eşittir. ■

ALIŞTIRMALAR E.2

1. $x \to c$ iken, $f_1(x)$, $f_2(x)$ ve $f_3(x)$ fonksiyonlarının limitlerinin sırasıyla L_1, L_2 ve L_3 olduğunu varsayın. Toplamlarının limitinin $L_1 + L_2 + L_3$ olduğunu gösterin. Matematiksel indüksiyon (Ek 1) kullanarak bu sonucu sonlu sayıda fonksiyonun toplamına genelleştirin.
2. Matematiksel indüksiyon ve Teorem 1'deki Çarpım Kuralını kullanarak, $x \to c$ iken, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ fonksiyonlarının limitlerinin sırasıyla $L_1, L_2, \ldots, L_n$ ise,
$$\lim_{x\to c} f_1(x)f_2(x)\cdot\cdots\cdot f_n(x) = L_1\cdot L_2\cdot\cdots\cdot L_n$$
olduğunu gösterin.
3. $\lim_{x\to c} x = c$ olduğunu ve Alıştırma 2'nin sonucunu kullanarak, herhangi bir $n > 1$ tamsayısı için $\lim_{x\to c} x^n = c^n$ olduğunu gösterin.
4. **Polinomların limiti** Herhangi bir k sayısı için $\lim_{x\to c}(k) = k$ olduğunu ve Alıştırma 1 ve 3'ün sonuçlarını kullanarak, herhangi bir
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
polinomu için, $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ olduğunu gösterin.
5. **Rasyonel fonksiyonların limitleri** Teorem 1'i ve Alıştırma 4'ün sonucunu kullanarak, $f(x)$ ve $g(x)$ polinomlar ise ve $g(c) \neq 0$ ise,
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}$$
olduğunu gösterin.
6. **Sürekli fonksiyonların bileşkeleri** Şekil E.1, iki sürekli fonksiyonun bileşkesinin sürekli olduğunun ispatı için bir diyagram göstermektedir. Diyagramdan ispatı oluşturun. İspatlanacak ifade şudur: f, $x = c$'de sürekliyse ve g $f(c)$'de sürekliyse, $g \circ f$ de c'de süreklidir.

   c'nin f'nin tanım aralığının bir iç noktası ve $f(c)$'nin de g'nin tanım raalığının bir iç noktası olduğunu varsayın. Bu, hesaplanacak limitleri iki taraflı yapar. (Tek taraflı limitleri içeren durumlar için de yapılacaklar aynıdır.)



ŞEKİL E.1 İki sürekli fonksiyonun bileşkesinin sürekli olduğunun ispatı için diyagram

E.3 Sık Karşılaşılan Limitler

Bu ek Bölüm 11.1, Teorem 5'teki (4)-(6) limitlerini gerçeklemektedir.

Limit 4: If $|x| < 1$, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ Her $\epsilon > 0$'a, N'den büyük her n sayısı için $|x^n| < \epsilon$

olacak kadar büyük bir N tamsayısı karşılık geldiğini göstermemiz gerekir.

$|x| < 1$ iken $\epsilon^{1/n} \to 1$ olduğundan, $\epsilon^{1/N} \to |x|$ olmasını sağlayacak, başka bir deyişle,

$$|x^N| = |x|^N < \epsilon \tag{1}$$

olmasını sağlayacak bir N tamsayısı vardır. Aradığımız tamsayı budur, çünkü, $|x| < 1$ ise,

$$\text{her } n > N \text{ için } |x^n| < |x^N| \tag{2}$$

olur. (1) ve (2) denklemlerini birleştirmek, her $n > N$ için $|x^n| < \epsilon$ verir ve bu da ispatı tamamlar. ■

Limit 5: Herhangi bir x için, x, $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$'dir.

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

olsun. Bu durumda,

$$\ln a_n = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \to x$$

bulunur. Bunu n'ye göre türev aldığımız l'Hôpial kuralının aşağıdaki uygulaması ile elde edebiliriz:

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1 + x/n)}{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{1 + x/n}\right)\cdot\left(-\dfrac{x}{n^2}\right)}{-1/n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{1 + x/n} = x$$

$f(x) = e^x$ ile Bölüm 11.1'deki Teorem 4'ü uygulayarak,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = a_n = e^{\ln a_n} \to e^x$$

olduğu sonucuna varabilirsiniz. ■

Limit 6: Herhangi bir x için, x, $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$'dir.

$$-\frac{|x|^n}{n!} \le \frac{x^n}{n!} \le \frac{|x|^n}{n!}$$

olduğundan, bütün göstermemiz gereken $|x|^n/n! \to 0$ olduğudur. Sonra, Diziler için Sandviç Teoremini (Bölüm 11.1, Teorem 2) uygulayarak $x^n/n! \to 0$ olduğu sonucuna varırız.

$|x|^n/n! \to 0$ olduğunu göstermedeki ilk adım, $(|x|/M) < 1$ olacak şekilde bir $M > |x|$ tamsayısı seçmektir. Yukarıda ispatladığımız Limit 4'ten, $(|x|/M)^n \to 0$ olduğunu görürüz. Artık ilgimizi $n > M$ değerlerine çevirebiliriz. Bu n değerleri için,

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^n}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot M\cdot \underbrace{(M+1)(M+2)\cdot \cdots \cdot n}_{(n-M)\text{ çarpan}}}$$

$$\le \frac{|x|^n}{M!M^{n-M}} = \frac{|x|^n M^M}{M!M^n} = \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n$$

yazabiliriz.

Böylece,

$$0 \le \frac{|x|^n}{n!} \le \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n$$

olur. Artık, $M^M/M!$ sabiti n arttıkça değişmez. Yani Sandöviç Teoremi bize, $(|x|/M)^n \to 0$ olduğundan, $|x|^n/n! \to 0$ olduğunu söyler. ■

E.4 Reel Sayıların Teorisi

Analizin özenli gelişmesinin temelinde reel sayıların özellikleri vardır. Fonksiyonlar, türevler ve integraller hakkındaki bir çok sonuç, sadece rasyonel sayılar üzerinde tanımlı fonksiyonlar için söylenseydi, yanlış olurdu. Bu ek'te reel sayılar teorisinin bazı temel kavramlarını kısaca inceliyoruz. Bu kavramlar, analizin daha derin, daha teorik bir incelenmesinde neler öğrenilebileceğini işaret etmektedir.

Reel sayıları, oldukları şey yapan üç tip özelik vardır. Bunlar, **cebirsel, sıra** ve **tamlık** özellikleridir. Cebirsel özellikler toplama ve çarpma, çıkarma ve bölmeyi içerir. Bunlar, reel sayılara olduğu kadar rasyonel ve kompleks sayılara da uygulanırlar.

Sayıların yapısı, toplama ve çarpma işlemleri ile bir küme üzerine inşa edilir. Toplama ve çarpmanın aşağıdaki özellikleri gereklidir.

A1 $a + (b + c) = (a + b) + c$ her a, b, c için.

A2 $a + b = b + a$ her a, b, c için.

A3 Bir "0" sayısı vardır ve her a için $a + 0 = a$ dır.

A4 Her a sayısı için $a + b = 0$ olacak şekilde bir b sayısı vardır.

M1 $a(bc) = (ab)c$ her a, b, c için.

M2 $ab = ba$ her a, b için.

M3 Bir "1" sayısı vardır ve her a için $a \cdot 1 = a$'dır.

M4 Her sıfırdan farklı a sayısı için $ab = 1$ olacak şekilde bir b sayısı vardır.

D $a(b + c) = ab + bc$ her a, b, c için.

A1 ve M1 *birleşme kuralları*, A2 ve M2 *değişme kuralları*, A3 ve M3 *birim kuralları*, A4 ve M4 *ters eleman kuralları* ve D de *dağılma kuralı* dır. Bu cebirsel özelliklerin bulunduğu kümeler **cisim** örnekleridir ve soyut cebir denen teorik matematik alanında derinlemesine incelenirler.

Sıra özellikleri, herhangi iki sayının büyüklüğünü karşılaştırmamızı sağlar. Sıra özellikleri şunlardır:

O1 Herhangi a ve b için ya $a \le b$ veya $b \le a$ dır (veya ikisi de)

O2 $a \le b$ ve $b \le a$ ise $a = b$ dir.

O3 $a \le b$ ve $b \le c$ ise $a \le c$ dir.

O4 $a \le b$ ise $a + c \le b + c$'dir.

O5 $a \le b$ ve $0 \le c$ ise $ac \le bc$'dir.

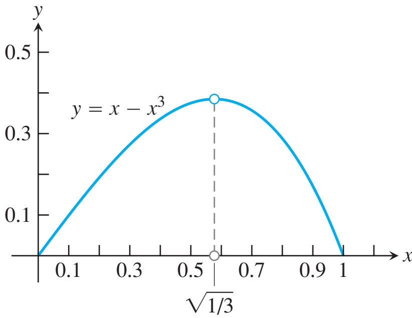
O3 *Geçişme kuralı* dır, O4 ve O5 sıralamayı toplama ve çarpma ile bağdaştırır.

Reel sayıları, tam sayıları ve rasyonel sayıları sıralayabiliriz, fakat kompleks sayıları sıralayamayız (Ek E.5'e bakın). $i = \sqrt{-1}$ gibi bir sayının sıfırdan büyük yada küçük olduğuna karar verecek makul bir yol yoktur. Herhangi iki elemanının büyüklüklerinin karşılaştırılabildiği, yukarıdaki gibi, bir cisim'e bir **sıralı cisim** denir. Hem rasyonel sayılar ve hem de reel sayılar sıralı cisimlerdir ve başka pek çok vardır.

Reel sayıları, bir doğru üzerine noktalar olarak dizmekle, geometrik olarak düşünebiliriz. **Tamlık özelliği**, "delikler" veya "boşluklar" olmadan, doğru üzerindeki bütün noktalara reel sayılar karşı geldiğini söyler. Bunun aksine, rasyonel sayılar $\sqrt{2}$ ve π gibi noktaları atlar. Tam sayılar ise $1/2$ gibi kesirleri bile içermez. Tamlık özelliği bulunan reel sayılar hiçbir noktayı atlamaz.

Bu üstü kapalı kayıp delikler fikri ile tam olarak ne demek istiyoruz? Bunu cevaplamak için tamlığın daha kesin bir açıklamasını vermeliyiz. Bir sayı kümesindeki bütün sayılar bir M sayısından küçük veya eşit ise M sayısına bu sayı kümesinin bir **üst sınırı** denir. Üst sınırların en küçüğüne **en küçük üst sınır** denir. Örneğin, $M = 2$, negatif sayılar için bir üst sınırdır. $M = 1$ de öyledir ve 2'nin en küçük üst sınır olmadığını gösterir. Negatif sayılar kümesi için en küçük üst sınır $M = 0$ dır. Boş olmayan ve üstten sınırlı her alt kümesinin bir en küçük üst sınırı var olan bir cismi, bir sıralı **tam** cisim olarak tanımlarız.

Sadece rasyonel sayılarla çalışırsak, $\sqrt{2}$'den küçük sayılar kümesi üstten sınırlıdır. Fakat, herhangi bir rasyonel M üst sınırı, biraz daha büyük olan fakat hala $\sqrt{2}$'den küçük olan bir rasyonel sayı ile değiştirilebileceğinden, rasyonel bir en küçük üst sınır yoktur. Dolayısıyla rasyonel sayılar tam değildir. Reel sayılar içinde üstten sınırlı her kümenin bir en küçük üst sınırı daima vardır. Reel sayılar bir sıralı tam cisim dir.



ŞEKİL E.2 $y = x - x^3$'ün $[0, 1]$ üzerindeki maksimum değeri $x = \sqrt{1/3}$ irrasyonel sayısında gözükür.

Tamlık özelliği, analizdeki bir çok sonucun tam kalbindedir. Bir örnek, Bölüm 4.1'deki gibi, bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde bir fonksiyonun maksimum değerinin aranmasında ortaya çıkar. $y = x - x^3$ fonksiyonunun $[0, 1]$'de $1 - 3x^2 = 0$ veya $x = \sqrt{1/3}$ eşitliğini sağlayan x noktasında bir maksimum değeri vardır. Düşüncemizi, sadece rasyonel sayılar üzerinde tanımlı fonksiyonlarla sınırlasaydık, $\sqrt{1/3}$ irrasyonel olduğundan (Şekil E.2) fonksiyonun bir maksimum değerinin bulunmadığı sonucuna varırdık. Bir $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli olan fonksiyonların bir maksimum değerlerinin var olmasını gerektiren Ekstremum Değer Teoremi (Bölüm 4.1), sadece rasyonel sayılar üzerinde tanımlı fonksiyonlar için doğru değildir.

Ara Değer Teoremi, bir $[a, b]$ aralığı üzerinde $f(a) < 0$ ve $f(b) < 0$ ile sürekli olan bir fonksiyonun aralığın bir yerinde sıfır olmasını gerektirir. Fonksiyonun değerleri, aralığın içindeki bir x noktası için $f(x) = 0$ olmadan, negatiften pozitife atlayamazlar. Ara Değer Teoremi de reel sayıların tamlığına dayanır ve sadece rasyonel sayılar üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar için doğru değildir. $f(x) = 3x^3 - 1$ fonksiyonu için $f(0) = -1$ ve $f(1) = 2$'dir. f'i sadece rasyonel sayılar üzerinde düşünürsek hiçbir zaman sıfır değerini almaz. $f(x) = 0$'ı sağlayan tek x değeri, irrasyonel olan $x = \sqrt{1/3}$ sayısıdır.

Reel sayılar bir sıralı tam cisimdir diyerek reel sayıların istenen özelliklerini yakaladık. Fakat, henüz bitirmedik. Pisagor (Pythagoras) okulundan Yunan matematikçiler, reel sayılar doğrusu üzerine başka bir özellik koymayı denediler: bütün sayılar tamsayıların bir kesridir özelliği. $\sqrt{2}$ gibi irrasyonel sayıları keşfettiklerinde çabalarının boşa olduğunu anladılar. Reel sayıları belirtmek için bizim çabalarımızın da, görülmemiş sebeplerden dolayı, hatalı olmadıklarını nasıl anlayacağız? Sanatçı Escher, kendileri ile tekrar alttan birleşene kadar yükselen merdivenlerden oluşan optik illüzyonlar çizdi. Böyle bir merdiveni inşa etmeye çalışan bir mühendis, mimarın çizmiş olduğu planları gerçekleyecek bir yapının olamayacağını görür. Bu, reel sayıların dizaynının, zor fark edilir bazı çelişkiler içerdiği ve böyle sayı sistemlerinin kurulamayacağı anlamında mıdır?

Reel sayıların özel bir tanımlamasını vererek ve bu modelin sağladığı cebirsel, sıralama ve tamlık özelliklerini gerçekleyerek bu meseleyi çözüyoruz.

Buna reel sayıların **kuruluşu** denir ve aynı merdivenlerin ağaçtan, taştan veya demirden yapılabilmesi gibi reel sayıların kuruluşu için de farklı yaklaşımlar vardır. Bir kuruluş, reel sayıları

$$a.d_1d_2d_3d_4\ldots$$

gibi sonsuz ondalıklar olarak ele alır. Bu yaklaşımda bir reel sayı bir a tamsayısını takip eden $d_1, d_2, d_3, \ldots$ gibi her biri 0 ile 9 arasında olan ondalıklardan oluşan bir dizidir. Bu dizi durabilir, periyodik bir şekilde tekrar edebilir veya hiçbir kalıba uymadan sürüp gidebilir. Bu formda, 2.00, 0.3333333… ve 3.1415926535898… ifadeleri bilinen üç reel sayıyı temsil ederler. Bu ondalıkları takip eden "…" noktalarının gerçek anlamı, Bölüm 11'deki gibi dizi ve serilerin geliştirilmesini gerektirir. Her reel sayı, kendisine sonlu ondalık yaklaşımlar ile tanımlanan bir rasyonel sayılar dizisinin limiti olarak kurulur. Bu durumda sonsuz bir ondalık

$$a + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \cdots$$

serisi gibidir.

Reel sayıların bu ondalık kuruluşu, tam olarak açık değildir. Kuruluş, tamlık ve sıralama özelliklerini sağlayan sayılar verdiğini kontrol etmeye yetecek kadar kolaydır fakat cebirsel özellikleri gerçeklemek oldukça karışıktır. İki sayıyı toplamak veya çarpmak bile sonsuz sayıda işlem gerektirir. Bölmeye bir anlam kazandırabilmek için, sonsuz ondalıklara rasyonel yaklaşımların limitlerini içeren dikkatli bir tartışma gerekir.

Reel sayıların ilk titiz bir kuruluşunu 1872 de veren Alman matematikçi Richard Dedekind (1831-1916) farklı bir yaklaşım ele almıştır. Herhangi bir x reel sayısı verildiğinde rasyonel sayıları iki kümeye ayırabiliriz: x'ten küçük veya eşit olanlar ve büyük olanlar. Dedekind bu fikir yürütmeyi akıllıca tersine çevirdi ve bir reel sayıyı, rasyonel sayıları bu şekilde iki kümeye ayırmak olarak tanımladı. Bu oldukça garip bir yaklaşım olarak gözüküyor fakat yeni yapıların, eskilerinden bu dolaylı yöntemlerle kuruluşları teorik matematikte yaygındır.

Bunlar ve diğer yaklaşımlar (Ek 5'e bakın), istenen cebirsel, sıralama ve tamlık özelliklerini sağlayan bir sayılar sistemi kurmak için kullanılabilirler. Ortaya çıkan son bir mesele, bütün bu kuruluşların aynı şeyi verip vermedikleridir. Farklı kuruluşlar, istenen bütün özellikleri sağlayan farklı sayı sistemlerine yol açabilirler mi? Evet ise, bunlardan hangisi reel sayılardır. Neyse ki cevap hayır dır. Reel sayılar, cebirsel, sıralama ve tamlık özelliklerini sağlayan tek sayı sistemidir.

Reel sayıların doğası hakkındaki ve limitler hakkındaki karışıklık, analizin ilk gelişiminde önemli anlaşmazlıklara neden olmuştur. Newton, Leibniz ve onları takipçileri gibi analizin öncüleri, Δx ve Δy'nin her ikisi de sıfıra yaklaşırken

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

fark oranına ne olduğuna baktıklarında, bu oranın sonucu olan türev hakkında iki sonsuz küçüğün oranı olarak konuşuyorlardı. dx ve dy olarak yazılan bu "sonsuz küçük" ler her sabit sayıdan küçük olan fakat sıfır olmayan, yeni bir çeşit sayı olarak düşünülüyorlardı. Benzer şekilde, bir belirli integral de, x kapalı bir aralık üzerinde değişirken

$$f(x) \cdot dx$$

gibi sonsuz küçüklerin bir sonsuz toplamı olarak düşünülüyordu. Bugünkü gibi iyi anlaşılana kadar, yakınsayan $\Delta y/\Delta x$ fark oranları, türevin anlamını özetlediği düşünülen bir limitten çok bir sonsuz küçükler oranı idi. Bu düşünce yolu, sonsuz küçüklerin girişilen tanımlamalarının ve işlemlerinin çelişkilere ve tutarsızlıklara yol açması gibi mantıksal zorluklara neden oluyordu. Daha somut ve hesaplanabilir fark oranları böyle zorluklara neden olmazlar, daha ziyade kullanışlı hesaplama araçları olarak düşünülürler. Fark oranları, türevin sayısal değerleri ile çalışmada ve hesaplama için genel formüller türetmede kullanılmışlardır fakat bir türevin aslında ne olduğu sorusunun kalbinde oldukları düşünülmemişlerdir. Bu gün, sonsuz küçüklerle ilgili mantıksal problemlerden, yakınsayan fark oranlarının limitini türev olarak tanımlamakla kaçınabileceğimizin farkına varıyoruz. Bu gün artık eski yaklaşımların belirsizlikleri yoktur ve analizin standart teorisi içinde sonsuz küçüklere ne gerek vardır ne de kullanılmaktadırlar.

E.5 Kompleks Sayılar

Kompleks sayılar $a + ib$ şeklinde ifadelerdir. Burada a ve b reel sayılar, i de $\sqrt{-1}$'in bir ifadesidir. Ne yazık ki, "reel" ve "sanal" (kompleks) kelimelerinin $\sqrt{-1}$'i zihnimizde $\sqrt{2}$'den daha az istenilen bir konuma getirmek gibi kötü bir etkisi vardır. Aslında, analizin temelini oluşturan *reel* sayı sistemini oluşturmak için, *yaratıcılık* anlamında, oldukça fazla hayal gücü gerekmiştir (Ek 4'e bakın). Bu ekte, bu yaratıcılığın birkaç evresini gözden geçireceğiz. Böylece bir kompleks sayı sisteminin yaratılması o kadar garip görünmeyecektir.

Reel Sayıların Gelişimi

Sayı gelişiminin en eski evresi, şimdi **doğal sayılar** veya **pozitif tamsayılar** dediğimiz 1, 2, 3,… gibi **sayma sayılarının** tanınmasıdır. Bu sayılarla, sistemin dışına çıkmadan bazı basit aritmetik işlemler yapılabilir. Yani, pozitif tamsayılar sistemi toplama ve çarpma işlemleri altında **kapalı**dır. Bununla, m ve n herhangi iki pozitif tamsayıysa,

$$m + n = p \qquad \text{ve} \qquad mn = q \tag{1}$$

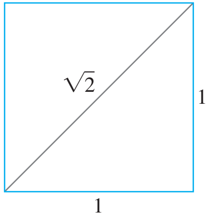
sayılarının da pozitif tamsayılar olduklarını söylüyoruz. (1) denklemindeki eşitliklerden herhangi birinin sol tarafındaki iki pozitif tamsayı verilmişse, sağda buna karşılık gelen pozitif tamsayıyı bulabiliriz. Dahası, bazen m ve p pozitif tamsayılarını belirleyerek $m + n = p$ olmasını sağlayan n pozitif tamsayısını bulabiliriz. Örneğin, bildiğimiz sayılar sadece pozitif tamsayılar ise, $3 + n = 7$ çözülebilir. Ama sayı sistemi genişletilmeden, $7 + n = 3$ denklemi çözülemez.

$7 + n = 3$ gibi denklemleri çözebilmek için sıfır ve negatif sayılar yaratılmıştır. Bütün **tamsayıları**,

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

tanıyan bir toplumda, eğitimli birisi, denklemdeki iki tamsayı verilince, $m + n = p$ denklemini tamamlayacak eksik tamsayıyı her zaman bulabilir.

Eğitimli kişilerimizin (2)'deki tamsayılardan herhangi ikisini çarpmayı da bildiklerini varsayalım. Eğer, (1) denklemlerinde, m ve q verilmişse, n'yi bazen bulabildiklerini, bazen de bulamadıklarını keşfedeceklerdir. Hayal güçleri hala iyi şekilde çalışıyorsa, daha fazla sayı yaratmayı düşünebilir ve m ve n sayılarının m/n sıralı çiftleri olan kesirleri tanımlayabilirler. Sıfır sayısının onları bir süre rahatsız edecek özellikleri vardır, ama sonunda sadece



ŞEKİL E.3 Bir cetvel ve pergel ile irrasyonel uzunlukta bir doğru parçası çizilebilir.

paydasında sıfır bulunanları dışarıda tutacak şekilde bütün tamsayı oranları m/n'leri el altında bulundurmanın yararlı olduğunu anlayacaklardır. **Rasyonel sayılar** kümesi denilen bu sistem artık, sistemdeki herhangi iki sayı üzerinde aritmetiğin **rasyonel işlemleri** denen şeyleri:

1. (a) toplama
(b) çıkartma

2. (a) çarpma
(b) bölme

gerçekleştirebilecekleri kadar zenginleşmiştir, *ama sıfırla bölme yapamazlar* çünkü bu anlamsızdır.

Birim karenin geometrisi (Şekil E.3) ve Pisagor teoremi, bir temel uzunluk birimiyle, uzunluğu $\sqrt{2}$ olan bir doğru parçası oluşturabileceklerini göstermiştir. Böylece, geometrik bir oluşumla

$$x^2 = 2$$

gibi bir denklemi çözebileceklerdir. Ancak sonra $\sqrt{2}$'yi temsil eden doğru parçası ile 1'i temsil eden doğru parçasının kıyaslanamaz büyüklükler olduklarını keşfederler. Bu, $\sqrt{2}$'nin, bir uzunluk biriminin iki *tamsayı* katının oranı olarak ifade edilemeyeceği anlamına gelir. Yani, eğitimli insanlarımız $x^2 = 2$ denkleminin bir rasyonel sayı çözümünü bulamayacaklardır.

Karesi 2 olan bir rasyonel sayı *yoktur*. Nedeni için, böyle bir rasyonel sayı olduğunu varsayın. Bu durumda, 1'den başka ortak çarpanları olmayan ve

$$p^2 = 2q^2 \tag{3}$$

denklemini sağlayan p ve q tamsayıları bulabilirdik. p ve q tamsayı oldukları için, p çift olmalıdır; aksi halde kendisi ile çarpımı tek olurdu. Sembolik olarak, p_1 bir tamsayı olmak üzere, $p = 2p_1$ yazılır. Bu $2p_1^2 = q^2$ olmasına yol açar, ki bu q'nun çift, mesela $q = 2q_1$, olmasına yol açar. Böylece 2 sayısı p ve q'nun ortak çarpanı haline gelir, bu da başlangıçta p ve q'yu 1'den başka ortak çarpanları olmayan tamsayılar olarak seçişimize ters düşer. Dolayısıyla, karesi 2 olan bir rasyonel sayı yoktur.

Eğitimli insanlarımız $x^2 = 2$ denkleminin rasyonel bir çözümünün bulamasalar da bir rasyonel sayı dizisi

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{41}{29}, \quad \frac{239}{169}, \quad \ldots, \tag{4}$$

bulabilirler ve bunların kareleri

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{49}{25}, \quad \frac{1681}{841}, \quad \frac{57{,}121}{28{,}561}, \quad \ldots, \tag{5}$$

limit olarak 2'ye yakınsar. Bu sefer hayal güçleri bir rasyonel sayı dizisinin limiti kavramına gerek duyduklarını gösterir. Üstten sınırlı artan bir dizinin her zaman bir limite yaklaştığını (Bölüm 11.1, Teorem 6) kabul eder ve (4)'teki dizinin bu özelliğinin bulunduğunu gözlersek, dizinin bir L limitinin olmasını bekleriz. Bu ayrıca, (5) dizisinden, $L^2 = 2$ olduğunu ve dolayısıyla L'nin rasyonel sayılarımızdan biri olmadığı anlamına gelir. Rasyonel sayılara, bütün sınırlı artan rasyonel sayı dizilerinin limitlerini de eklersek, bütün "reel" sayı sistemine varırız. Reel kelimesi tırnak içine alınmıştır, çünkü bu sistemde diğer matematiksel sistemlerden "daha fazla reel" veya "daha az reel" hiçbir şey yoktur.

Kompleks Sayılar

Reel sayı sisteminin oluşturulmasının bir çok evresinde hayal gücünden söz edildi. Aslında, icat sanatına şimdiye kadar tartıştığımız sistemlerde en azından üç kere gerek duyulmuştur:

1. İlk *icat edilen* sistem: Sayma sayılarından oluşturulan *bütün tamsayıla*r kümesi.

2. *İkinci icat edilen* sistem: Tamsayılardan oluşturulan m/n rasyonel sayılar kümesi.

3. *Üçüncü icat edilen* sistem. Rasyonel sayılardan oluşturulan bütün *x reel sayıları* kümesi.

Bu icat edilmiş sistemler, her sistemin kendisinden öncekini kapsadığı bir hiyerarşi oluştururlar. Ayrıca her sistem, sistemin dışına çıkmadan ek işlemlerin yapılabilmesini sağlamak açısından, bir öncekinden daha zengindir:

1. Bütün tamsayılar sisteminde, a herhangi bir tamsayı olmak üzere

$$x + a = 0 \tag{6}$$

şeklindeki bütün denklemleri çözebiliriz.

2. Rasyonel sayılar sisteminde, a ve b rasyonel sayılar ve $a \neq 0$ olmak koşuluyla,

$$ax + b = 0 \tag{7}$$

şeklindeki bütün denklemleri çözebiliriz.

3. Bütün reel sayılar sisteminde, (6) ve (7)'deki denklemlerin yanında,

$$ax^2 + bx + c = 0,\ \ a \neq 0 \qquad \text{ve} \qquad b^2 - 4ac > 0 \tag{8}$$

şeklindeki bütün kuadratik denklemleri çözebiliriz.

Muhtemelen, (8) denkleminin çözümlerini veren formülü, yani

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{9}$$

formülünü biliyorsunuz ve $b^2 - 4ac$ diskriminantı negatif olduğunda, (9)'daki çözümlerin yukarıda tartışılan sistemlerden hiçbirine ait olmadığına yabancı değilsiniz. Aslında,

$$x^2 + 1 = 0$$

gibi çok basit bir kuadratik denklemi çözmek, kullanabileceğimiz tek sayı sistemleri yukarıda bahsettiğimiz üç sistemse imkansızdır.

Böylece *dördüncü icat edilmiş* sisteme, bütün $a + ib$ kompleks sayıları kümesine geliriz. i sembolünü tamamen ortadan kaldırarak (a, b) gibi bir sıralı çift gösterimi kullanabilirdik. Cebirsel işlemler altında, a ve b sayılarına biraz farklı davranıldığı için, sırayı doğru tutmak önemlidir. Dolayısıyla, **kompleks sayı sisteminin** bütün (a, b) sıralı reel sayı çiftleri ve bunların eşitlenecekleri, toplanacakları, çarpılacakları, vb. kurallardan oluştuğunu söyleyebiliriz. Aşağıdaki tartışmada hem (a, b) hem de $a + ib$ gösterimlerini kullanacağız. a'ya (a, b) kompleks sayısının **reel kısmı**, b'ye de **sanal (imajiner) kısmı** diyeceğiz.

Aşağıdaki tanımları yapıyoruz.

Eşitlik	
Ancak ve yalnız $a = c$ ve $b = d$ ise $a + ib = c + id$ olur.	İki kompleks sayı, (a, b) ve (c, d) ancak ve yalnız $a = c$ ve $b = d$ ise eşittir.
Addition	
$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$	İki kompleks sayı, (a, b) ve (c, d)'nin *toplamı* $(a + c, b + d)$ kompleks sayısıdır.
Çarpma	
$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$	İki kompleks sayı, (a, b) ve (c, d)'nin çarpımı $(ac - bd, ad + bc)$ kompleks sayısıdır.
$c(a + ib) = ac + i(bc)$	Bir c reel sayısı ile bir (a, b) kompleks sayısının çarpımı (ac, bc) kompleks sayısıdır.

İkinci sayı b'nin sıfır olduğu bütün (a, b) kompleks sayılarının kümesi a reel sayılarının kümesinin bütün özelliklerine sahiptir. Örneğin, $(a, 0)$ ve $(c, 0)$'ın toplaması ve çarpılması, sanal kısımları sıfır olan aynı cinsten sayılar,

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0),$$

$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0)$$

verir. Ayrıca, bir $(a, 0)$ "reel sayısı" ile bir (c, d) kompleks sayısını çarparsak,

$$(a, 0) \cdot (c, d) = (ac, ad) = a(c, d)$$

elde ederiz. Özel olarak, $(0, 0)$ kompleks sayısı kompleks sayı sisteminde sıfır rolü oynarken, $(1, 0)$ kompleks sayısı da birim veya bir rolünü oynar.

Reel kısmı sıfır ve sanal kısmı 1 olan $(0, 1)$ sayısı, karesinin

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$$

reel kısmının eksi bire, sanal kısmınınsa sıfıra eşit olması özelliğine sahiptir. Bu nedenle (a, b) kompleks sayılar sisteminde, karesi birim $= (1, 0)$ ile toplanınca sıfır $= (0, 0)$ veren bir $x = (0, 1)$ vardır; yani

$$(0, 1)^2 + (1, 0) = (0, 0)$$

Dolayısıyla,

$$x^2 + 1 = 0$$

denkleminin bu yeni sayı sisteminde bir çözümü vardır.

Muhtemelen, (a, b) gösteriminden ziyade, $a + ib$ gösterimine alışıksınızdır. $(1, 0)$ sayısı birim ve $(0, 1)$ sayısı da eksi birin karekökü gibi davranırken, sıralı ikililer cebrinin kuralları

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

yazmamızı sağladığı için, (a, b) yerine $a + ib$ yazmakta tereddüt etmeye gerek yoktur. b'nin başındaki i, $a + ib$'nin sanal kısmını belirten bir elemandır.

İstediğimiz zaman (a, b) sıralı ikilileri bölgesinden $a + ib$ ifadeleri bölgesine geçebiliriz. Ama, (a, b) sıralı çiftlerinden oluşan kompleks sayılar sistemindeki cebir kurallarını öğrendiğimizde, $(0, 1) = i$ sembolünde $(1, 0) = 1$ sembolünden daha az "gerçek" olan bir şey olmadığını görürüz.

Kompleks sayıların herhangi bir rasyonel ifadesini tek bir kompleks sayıya indirgemek için, her gördüğümüz yerde i^2 yerine -1 yazarak elemanter cebir kurallarını uygularız. Elbette, $(0, 0) = 0 + i0$ kompleks sayısıyla bölme yapamayız. Ama $a + ib \neq 0$ ise, bir bölmeyi aşağıdaki gibi gerçekleştiririz:

$$\frac{c + id}{a + ib} = \frac{(c + id)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{(ac + bd) + i(ad - bc)}{a^2 + b^2}.$$

Sonuç,

$$x = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2},$$

ile bir $x + iy$ kompleks sayısıdır ve $a + ib = (a, b) \neq (0, 0)$ olduğu için $a^2 + b^2 \neq 0$ olur.

Paydadan i'yi kaldırmak için çarpan olarak kullanılan $a - ib$ sayısına $a + ib$'nin **kompleks eşleniği** denir. z'nin kompleks eşleniğini göstermek için $\bar{z}$ (z çizgi okunur) kullanılır; böylece

$$z = a + ib, \qquad \bar{z} = a - ib$$

olur. $(c + id)/(a + ib)$ kesrinin payını ve paydasını, paydanın kompleks eşleniğiyle çarpmak her zaman paydada bir reel sayı bulunmasını sağlayacaktır.

ÖRNEK 1 **Kompleks Sayılarla Aritmetik İşlemler**

(a) $(2 + 3i) + (6 - 2i) = (2 + 6) + (3 - 2)i = 8 + i$

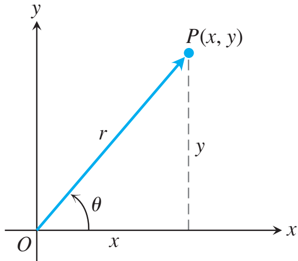
(b) $(2 + 3i) - (6 - 2i) = (2 - 6) + (3 - (-2))i = -4 + 5i$

(c) $(2 + 3i)(6 - 2i) = (2)(6) + (2)(-2i) + (3i)(6) + (3i)(-2i)$

$$= 12 - 4i + 18i - 6i^2 = 12 + 14i + 6 = 18 + 14i$$

(d) $$\frac{2 + 3i}{6 - 2i} = \frac{2 + 3i}{6 - 2i}\frac{6 + 2i}{6 + 2i} = \frac{12 + 4i + 18i + 6i^2}{36 + 12i - 12i - 4i^2} = \frac{6 + 22i}{40} = \frac{3}{20} + \frac{11}{20}i$$

■



ŞEKİL E.4 Bu Argand diyagramı $z = x + iy$'yi hem bir $P(x, y)$ noktası, hem de bir $\overrightarrow{OP}$ vektörü olarak temsil eder.

Argand Diyagramları

$z = x + iy$ kompleks sayısının iki geometrik temsili vardır:

1. xy-düzlemindeki $P(x, y)$ noktası olarak
2. Orijinden P'ye giden $\overrightarrow{OP}$ vektörü olarak.

Her temsilde, x-eksenine reel eksen, y-eksenine de **sanal eksen** denir. İki temsil de $x + iy$'nin Argand diyagramlarıdır (Şekil E.4).

x ve y'nin kutupsal koordinatları cinsinden

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

ve

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{10}$$

yazabiliriz.

Bir $x + iy$ kompleks sayısının mutlak değerini orijinden $P(x, y)$ noktasına giden bir $\overrightarrow{OP}$ vektörünün uzunluğu r olarak tanımlarız. Mutlak değeri dikey çizgilerle gösteririz:

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

r ve θ kutupsal koordinatlarını r negatif olmayacak şekilde seçersek,

$$r = |x + iy|$$

elde ederiz. Kutupsal θ açısına z'nin argümanı denir ve $\theta = \arg z$ olarak yazılır. Elbette, θ'ya 2π'nin herhangi bir tamsayı katı eklenerek uygun başka bir açı üretilebilir.

Aşağıdaki denklem bir z kompleks sayısını, kompleks eşleniği $\bar{z}$ 'yi ve mutlak değeri $|\bar{z}|$'yi birleştiren yararlı bir formül verir:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

Euler Formülü

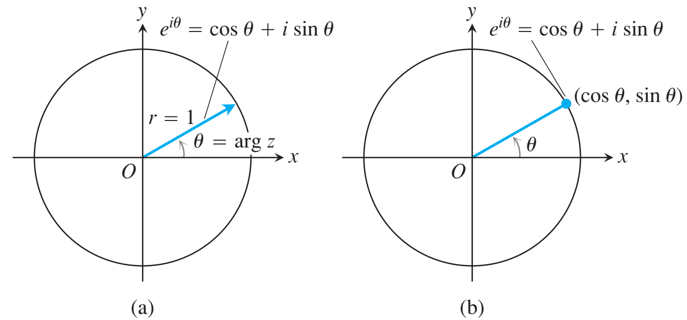
Euler Formülü olarak bilinen

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

bağıntısı (10) denklemini

$$z = re^{i\theta}$$

şeklinde yazmamızı sağlar. Bu formül, sırasıyla kompleks sayıların çarpımlarını, bölümlerini, kuvvetlerini ve köklerini hesaplamak için aşağıda verilen kurallara yol açar. Ayrıca, $e^{i\theta}$ için Argand diyagramına da yol açar. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$'yı (10) denkleminde $r = 1$ alarak elde ettiğimiz için, $e^{i\theta}$'nın, Şekil E.5'te gösterildiği gibi, pozitif x-ekseniyle θ açısı yapan bir birim vektörle temsil edildiğini söyleyebiliriz.

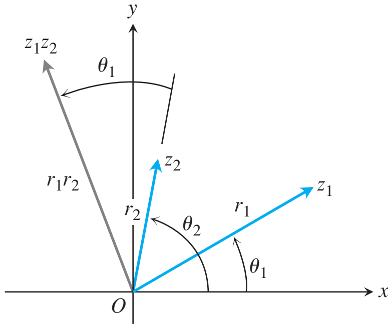


ŞEKİL E.5 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$'nın (a) bir vektör, (b)bir nokta olarak Argand diyagramı.

Çarpımlar

İki kompleks sayıyı çarpmak için, mutlak değerlerini çarpar ve açılarını toplarız.

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}, \tag{11}$$



ŞEKİL E.6 z_1 ve z_2 çarpıldıklarında, $|z_1z_2| = r_1 \cdot r_2$ ve $\arg(z_1z_2) = \theta_1 + \theta_2$ olur.

ve dolayısıyla

$$|z_1| = r_1, \qquad \arg z_1 = \theta_1; \qquad |z_2| = r_2, \qquad \arg z_2 = \theta_2.$$

olsun. Bu durumda,

$$z_1z_2 = r_1e^{i\theta_1} \cdot r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

ve buradan da

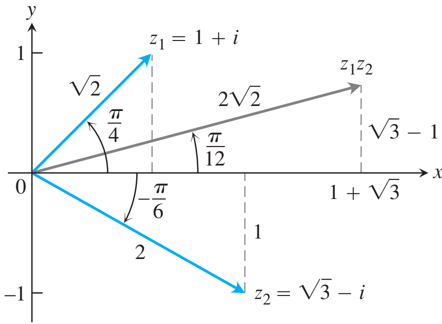
$$\begin{aligned} |z_1z_2| &= r_1r_2 = |z_1| \cdot |z_2| \\ \arg(z_1z_2) &= \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \end{aligned} \tag{12}$$

bulunur. Böylece iki kompleks sayının çarpımı, uzunluğu iki çarpanın uzunlukları çarpımı olan ve argümanı da argümanlarının toplamı olan bir vektör ile temsil edilir (Şekil E.6). Özel olarak, (12) Denkleminden, bir vektör $e^{i\theta}$ ile çarpılarak saat yönünün tersine bir θ açısı kadar çevrilebilir. i ile çarpmak 90°, –1 ile çarpmak 180°, $-i$ ile çarpmak 270° döndürür.

ÖRNEK 2 Kompleks Sayıların Bir Çarpımını Bulmak

$z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$ olsun. Bu kompleks sayıları bir Argand diyagramı (Şekil E.7) olarak çizer ve bu diyagramdan

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}, \qquad z_2 = 2e^{-i\pi/6}$$



ŞEKİL E.7 İki kompleks sayıyı çarpmak için, mutlak değerlerini çarpın ve argümanlarını toplayın.

buluruz. Bu durumda

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{i\pi}{4} - \frac{i\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{i\pi}{12}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \approx 2.73 + 0.73i \end{aligned}$$

elde ederiz. exp (A) notasyonu e^A yerinedir. ■

Bölümler

(11) Denkleminde $r_2 \neq 0$ olduğunu varsayın. Bu durumda

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{ve} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2.$$

olur. Yani, iki kompleks sayının oranı için uzunlukları böler ve açıları çıkarırız.

ÖRNEK 3 Örnek 2'deki gibi, $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \frac{1 + i}{\sqrt{3} - i} &= \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi i/12} \approx 0.707\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) \\ &\approx 0.183 + 0.683i \end{aligned}$$

bulunur. ■

Kuvvetler

n pozitif bir tamsayıysa, (12) Denklemindeki çarpım formüllerini uygulayarak

$$z^n = z \cdot z \cdot \cdots \cdot z. \qquad n \text{ çarpan}$$

buluruz. $z = re^{i\theta}$ ile,

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{i(\theta+\theta+\cdots+\theta)} \qquad n \text{ toplam}$$
$$= r^n e^{in\theta}. \tag{13}$$

elde ederiz. $r = |z|$ uzunluğunun n. kuvveti alınır ve $\theta = \arg z$ açısı n ile çarpılır.

(13) Denkleminde $r = 1$ alırsak, De Moivre Teoremini elde ederiz.

De Moivre Teoremi

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta. \tag{14}$$

De Moivre denkleminin sol tarafını binom teoremine göre açar ve $a + ib$ şekline gelecek şekilde sadeleştirirsek, $\cos n\theta$ ve $\sin n\theta$ için $\cos\theta$ ve $\sin\theta$'nın n. dereceden polinomları şeklinde formüller elde ederiz.

ÖRNEK 4 (14) Denkleminde $n = 3$ ise,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

olur. Bu denklemin sol tarafı

$$\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$

gelir. Bunun reel kısmı $\cos 3\theta$'ya, sanal kısmı da $\sin 3\theta$'ya eşit olmalıdır. Dolayısıyla,

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta,$$
$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

bulnur. ■

Kökler

$z = re^{i\theta}$ sıfırdan farklı bir kompleks sayı ve n pozitif bir tamsayı ise, z'nin n. kökü olan tam n tane farklı $w_0, w_1, \ldots, w_n$ kompleks sayısı vardır. Nedenini anlamak için, $w = \rho e^{i\alpha}$ $z = re^{i\theta}$'nın n. köklerinden biri olsun, böylece

$$w^n = z$$

veya

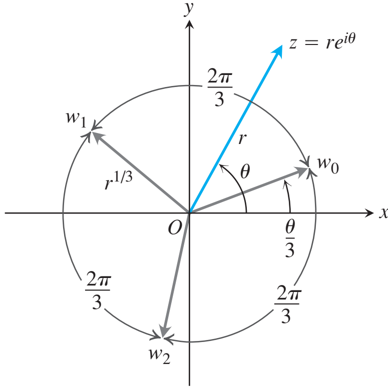
$$\rho^n e^{in\alpha} = re^{i\theta}$$

olur. Bu durumda,

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

r'nin reel, pozitif n. köküdür. Açıya gelince, $n\alpha$ ile θ'nın aynı olduğunu söyleyemesek bile, aralarında sadece 2π'nin tamsayı bir katı kadar fark olduğunu söyleyebiliriz. Yani,

$$n\alpha = \theta + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$



ŞEKİL E.8 $z = re^{i\theta}$'nın üç küp kökü.

Dolayısıyla,

$$\alpha = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$$

olur. Böylece $z = re^{i\theta}$'nın n. köklerinin hepsi aşağıdaki formülle verilir.

$$\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\exp i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \qquad (15)$$

k'nin olası sonsuz değrine karşılık gelen sonsuz farklı yanıt var gibi görülebilir. Ama (15) Denkleminde $k = n + m$, $k = n$ ile aynı yanıtı verir. Dolayısıyla z'nin bütün farklı n. köklerini bulmak için k için sadece birbirini izleyen n tane değeri almamız yeterlidir. Kolaylık için,

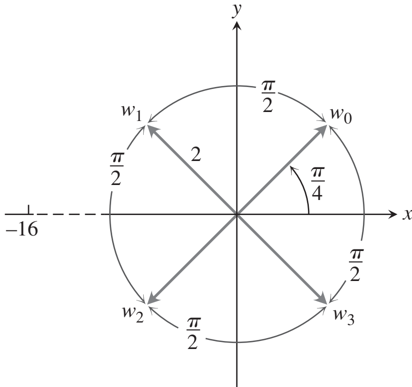
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$$

alabiliriz.

$re^{i\theta}$'nın bütün n. kökleri, merkezi O orijininde olan ve yarıçapı r'nin reel, pozitif n. köküne eşit olan bir çemberin üzerinde bulunurlar. Bunlardan birinin argümanı $\alpha = \theta/n$'dir. Diğerleri, komşularıyla aralarında $2\pi/n$ açısı bulunacak şekilde çember üzerinde düzgün bir şekilde yerleşmişlerdir. Şekil E.8, $z = re^{i\theta}$ kompleks sayısının üç küp kökü w_0, w_1 ve w_2'nin yerleşimlerini göstermektedir.

ÖRNEK 5 Dördüncü Kökleri Bulmak

–16'nın dört tane dördüncü kökünü bulun.



ŞEKİL E.9 –16'nın dört tane dördüncü kökü

Çözüm İlk adım olarak, –16'yı bir Argand diyagramında işaretler (Şekil E.9) ve kutupsal temsili $re^{i\theta}$'yı belirleriz. Burada, $z = -16$, $r = +16$ ve $\theta = \pi$'dir. $16e^{i\pi}$'nin dördüncü köklerinden biri $2e^{i\pi/4}$'tür. Diğerlerini, ilk değerin argümanına arka arkaya $2\pi/4 = \pi/2$ ekleyerek buluruz. Yani,

$$\sqrt[4]{16\exp i\pi} = 2\exp i\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$$

ve dört tane dördüncü kök

$$w_0 = 2\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(1 + i)$$

$$w_1 = 2\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(-1 + i)$$

$$w_2 = 2\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(-1 - i)$$

$$w_3 = 2\left[\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(1 - i)$$

olarak bulunur. ■

Cebrin Temel Teoremi

$\sqrt{-1}$'in icadının iyi ve güzel olduğu ve reel sayı sisteminden daha zengin bir sayı sistemine yol açtığı söylenebilir, ama bu proses nerede sona erecektir? $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[6]{-1}$, ve

diğerlerini bulmak için de sayı sistemleri icat edecek miyiz? Şimdiye kadar bunun gerekli olmadığı belirlenmiş olmalıdır. Bu sayılar $a + ib$ kompleks sayı sistemi cinsinden ifade edilebilmektedir. Aslında, Cebrin Temel Teoremi, kompleks sayıların tanıtılmasıyla her polinomu lineer çarpanların bir çarpımı olarak çarpanlarına ayırabileceğimizi ve dolayısıyla her olası polinomu çözmeye yetecek kadar sayımız olduğunu söyler.

Cebrin Temel Teoremi

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ katsayıları herhangi kompleks sayılar, derecesi n, 1'e eşit veya 1'den büyük olan ve ilk katsayısı a_0 sıfır olmayan

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

şeklindeki her polinom denkleminin, kompleks sayı sisteminde tam n kökü vardır. Burada katlılığı m olan her kök m tane kök olarak sayılmaktadır.

Bu teoremin bir ispatı kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisi üzerine yazılmış her metinde bulunabilir.

ALIŞTIRMALAR E.5

Kompleks Sayılarla İşlemler

1. **Bilgisayarlar kompleks sayıları nasıl çarpar?** $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$'yi bulun.
   a. $(2, 3) \cdot (4, -2)$ b. $(2, -1) \cdot (-2, 3)$
   c. $(-1, -2) \cdot (2, 1)$
   (Bilgisayarlar kompleks sayıları bu şekilde çarpar.)
2. Aşağıdaki denklemlerden x ve y reel sayılarını çözün.
   a. $(3 + 4i)^2 - 2(x - iy) = x + iy$
   b. $\left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^2 + \dfrac{1}{x + iy} = 1 + i$
   c. $(3 - 2i)(x + iy) = 2(x - 2iy) + 2i - 1$

Grafik Çizme ve Geometri

3. Aşağıdaki kompleks sayılar $z = x + iy$'den geometrik olarak nasıl elde edilebilir? Çizin.
   a. $\bar{z}$ b. $\overline{(-z)}$
   c. $-z$ d. $1/z$
4. Bir Argand diyagramında, iki z_1 ve z_2 noktası arasındaki mesafenin $|z_1 - z_2|$ olduğunu gösterin.

5–10 alıştırmalarında, verilen koşulları sağlayan $z = x + iy$ noktalarının grafiklerini çizin.

5. a. $|z| = 2$ b. $|z| < 2$ c. $|z| > 2$
6. $|z - 1| = 2$
7. $|z + 1| = 1$
8. $|z + 1| = |z - 1|$
9. $|z + i| = |z - 1|$
10. $|z + 1| \geq |z|$

11–14 alıştırmalarındaki kompleks sayıları $r \geq 0$ ve $-\pi < \theta \leq \pi$ olmak üzere $re^{i\theta}$ şeklinde ifade edin. Her hesaplama için bir Argand diyagramı çizin.

11. $\left(1 + \sqrt{-3}\right)^2$
12. $\dfrac{1 + i}{1 - i}$
13. $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$
14. $(2 + 3i)(1 - 2i)$

Kuvvetler ve Kökler

15 ve 16 alıştırmalarındaki trigonometrik fonksiyonları, $\cos\theta$ ve $\sin\theta$ cinsinden ifade etmek için De Moivre Teoremini kullanın.

15. $\cos 4\theta$
16. $\sin 4\theta$
17. 1'in üç küp kökünü bulun

18. i'nin iki tane karekökünü bulun.

19. $-8i$'nin üç tane küp kökünü bulun.

20. 64'ün altı tane altıncı kökünü bulun.

21. $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$ denkleminin dört çözümünü bulun.

22. $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$ denkleminin altı çözümünü bulun.

23. $x^4 + 4x^2 + 16 = 0$ denkleminin bütün çözümlerini bulun.

24. $x^4 + 1 = 0$ denklemini çözün.

Teori ve Örnekler

25. Kompleks sayılar ve düzlemde vektörler Kompleks sayıları toplama kuralının Argand diyagramının, vektörleri toplamak için paralelkenar kuralıyla aynı olduğunu gösterin.

26. Eşleniklerle kompleks aritmetik z_1 ve z_2 kompleks sayıların toplamının (çarpımının veya bölümünün) eşleniğinin, bu sayıların eşleniklerinin toplamına (çarpımına veya bölümüne) eşit olduğunu gösterin.

27. Reel katsayılı polinomların kompleks kökleri kompleks - eşlenik çiftleri şeklindedir.

a. Alıştırma 26'nın sonuçlarını genişleterek,

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

$a_0, \ldots, a_n$ katsayıları reel olan bir polinom ise $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ olduğunu gösterin.

b. $f(z)$, *a* şıkkındaki gibi katsayıları reel olan bir polinom olmak üzere, $f(z) = 0$ denkleminin bir kökü z ise, eşleniği $\bar{z}$'nin de denklemin bir kökü olduğunu gösterin (*İpucu*: $f(z) = u + iv = 0$ alın; bu durumda hem u hem de v sıfır olur. Şimdi, $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} = u - iv$ olduğunu kullanın).

28. Bir eşleniğin mutlak değeri $|\bar{z}| = |z|$ olduğunu gösterin.

29. $z = \bar{z}$ iken z ve $\bar{z}$ eşitse, z noktasının kompleks düzlemdeki konumu hakkında ne söyleyebilirsiniz?

30. Reel ve sanal kısımlar Re(z) z'nin reel kısmını, Im(z) de z'nin sanal kısmını belirtsin. Aşağıdaki bağıntıların her z, z_1 ve z_2 sayıları için geçerli olduğunu gösterin.

a. $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ **b.** $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$

c. $|\text{Re}(z)| \le |z|$

d. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\text{Re}(z_1\bar{z}_2)$

e. $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

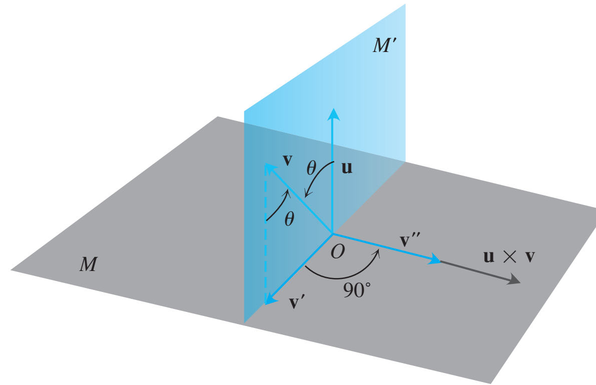
E.6 Vektörel Çarpımlar İçin Dağılma Kuralı

Bu ekte, Bölüm 12.4'teki 2 Özelliği olan

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$$

dağılma kuralını ispatlayacağız.

İspat Dağılma Kuralını türetmek için, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$'yi yeni bir şekilde kurarız. **u** ve **v**'yi ortak noktaları olan O noktasından başlayarak çizer ve **u**'ya O noktasında dik olan bir M düzlemi oluştururuz (Şekil E.10). Sonra, uzunluğu $|\mathbf{v}| \sin\theta$ olan bir $\mathbf{v}'$ vektörü oluşturacak şe-



ŞEKİL E.10 Metinde açıklandığı gibi, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\ \mathbf{v}''$'dür.

kilde, **v**'nin M üzerine dik izdüşümünü alırız. $\mathbf{v}'$'nü **u** etrafında pozitif yönde 90° döndürerek bir $\mathbf{v}''$ vektörü oluştururuz. Son olarak $\mathbf{v}''$'nü **u**'nın uzunluğuyla çarparız.

$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}''| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}'| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|.$$

olur. Bu üç işlemin her biri, yani

1. M üzerine izdüşüm,
2. **u** etrafında 90°'lik dönme,
3. $|\mathbf{u}|$ skaleri ile çarpma,

düzlemi **u**'ya dik olmayan bir üçgene uygulandıklarında, başka bir üçgen oluştururlar. Kenarları **v**, **w** ve **v** + **w** olan bir üçgenle işe başlar (Şekil E. 11) ve bu üç adımı uygularsak, sırasıyla şunları elde ederiz:

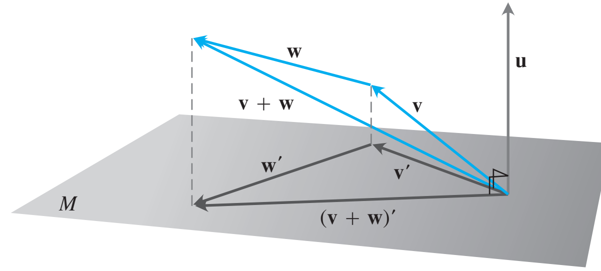
1. Kenarları $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ ve $(\mathbf{v}+\mathbf{w})'$ olan ve aşağıdaki vektör denklemini sağlayan bir üçgen

$$\mathbf{v}' + \mathbf{w}' = (\mathbf{v} + \mathbf{w})'$$

2. Kenarları $\mathbf{v}''$, $\mathbf{w}''$ ve $(\mathbf{v}+\mathbf{w})''$ olan ve aşağıdaki vektör denklemini sağlayan bir üçgen

$$\mathbf{v}'' + \mathbf{w}'' = (\mathbf{v} + \mathbf{w})''$$

(Vektörlerdeki çitf üst işareti Şekil E.10'dakiyle aynı anlamdadır);



ŞEKİL E.11 **v**, **w**, **v** + **w** vektörleri ve bunların **u**'ya dik bir düzlemdeki izdüşümleri.

3. Kenarları $|\mathbf{u}|\mathbf{v}''$, $|\mathbf{u}|\mathbf{w}''$ ve $|\mathbf{u}|(\mathbf{v}+\mathbf{w})''$ olan ve aşağıdaki vektör denklemini sağlayan bir üçgen

$$|\mathbf{u}|\mathbf{v}'' + |\mathbf{u}|\mathbf{w}'' = |\mathbf{u}|(\mathbf{v} + \mathbf{w})''$$

Yukarıda tartışırken bulunan $|\mathbf{u}|\mathbf{v}'' = \mathbf{u} \times \mathbf{v}, |\mathbf{u}|\mathbf{w}'' = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ ve $|\mathbf{u}|(\mathbf{v} + \mathbf{w})'' = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$'nü bu son denklemde yerine koymak

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}),$$

verir, ki bu da gerçeklemek istediğimiz kuraldır. ■

E.7 Karışık Türev Teoremi ve Artım Teoremi

Bu ek Karışık Türev Teoremini (Bölüm 14.3, Teorem 2) ve İki Değişkenli Fonksiyonlar için Artım Teoremini (Bölüm 14.3, Teorem 2) türetir. Euler, Karışık Türev Teoremini ilk defa hidrodinamik üzerine yazdığı bir makaleler dizisinde 1734'te yayınlamıştır.

TEOREM 2 Karışık Türev Teoremi

$f(x, y)$ ve kısmi türevleri, f_x, f_y, f_{xy} ve f_{yx} bir (a, b) noktasını içeren bir açık bölgede tanımlıysa ve hepsi (a, b) noktasında sürekliyse, $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ olur.

İspat $f_{xy}(a, b)$ ile $f_{yx}(a, b)$'nin eşit oldukları Ortalama Değer Teoremi (Bölüm 4.2, Teorem 4) dört kere uygulanarak gösterilebilir. Hipoteze göre, (a, b) noktası xy-düzleminde, f_x, f_y, f_{xy} ve f_{yx}'in hepsinin tanımlı olduğu bir R dikdörtgeninin içinde bulunmaktadır. h ve k sayılarını, $(a + h, b + k)$ noktası da R dikdörtgeni içinde bulunacak şekilde seçer ve

$$\Delta = F(a + h) - F(a) \tag{1}$$

olmak üzere,

$$F(x) = f(x, b + k) - f(x, b) \tag{2}$$

farkını inceleriz. F'ye (türetilebilir olduğu için süreklidir) Ortalama Değer Teoremini uygularız ve (2) denklemi, c_1 sayısı a ile $a + h$ arasında bulunmak üzere,

$$\Delta = hF'(c_1) \tag{3}$$

halini alır. (1) denkleminden,

$$F'(x) = f_x(x, b + k) - f_x(x, b),$$

bulunur, böylece (3) denklemi

$$\Delta = h[f_x(c_1, b + k) - f_x(c_1, b)] \tag{4}$$

halini alır. Şimdi Ortalama Değer Teoremini $g(y) = f_x(c_1, y)$ fonksiyonuna uygular ve, b ile $b + k$ arasındaki bir d_1 değeri için,

$$g(b + k) - g(b) = kg'(d_1),$$

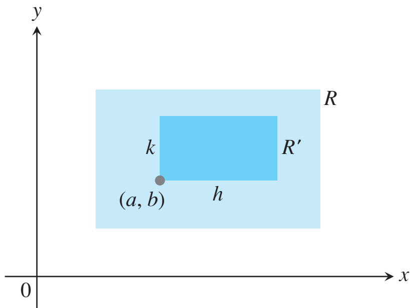
veya

$$f_x(c_1, b + k) - f_x(c_1, b) = kf_{xy}(c_1, d_1)$$

elde ederiz. Bunu (4) denklemine yerleştirerek, uç noktaları (a, b), $(a + h, b)$, $(a + h, b + k)$ ve $(a, b + k)$ olan R' dikdörtgeninde bulunan bir (c_1, d_1) noktası için

$$\Delta = hkf_{xy}(c_1, d_1) \tag{5}$$

elde ederiz (Şekil E.12'ye bakın).



ŞEKİL E.12 $f_{xy}(a,b)$'nin $f_{yx}(a, b)$'ye eşit olduğunu göstermenin anahtarı, R' ne kadar küçük olursa olsun, f_{xy} ve f_{yx}'nin R''nün içindeki bir yerde aynı değeri almalarıdır (aynı noktada olmasa bile).

(1) Denklemini (2) Denklemine yerleştirirsek,

$$\begin{aligned}\Delta &= f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)\\ &= [f(a + h, b + k) - f(a, b + k)] - [f(a + h, b) - f(a, b)]\\ &= \phi(b + k) - \phi(b)\end{aligned} \tag{6}$$

olmak üzere,

$$\phi(y) = f(a + h, y) - f(a, y) \tag{7}$$

elde ederiz. (7) denklemine Ortalama Değer Teoreminin uygulanması, b ile $b + k$ arasındaki bir d_2 için,

$$\Delta = k\phi'(d_2) \tag{8}$$

verir.
(6) Denkleminden

$$\phi'(y) = f_y(a + h, y) - f_y(a, y). \tag{9}$$

bulunur. (9) denklemini (8) denklemine yerleştirmek

$$\Delta = k[f_y(a + h, d_2) - f_y(a, d_2)].$$

verir. Son olarak, köşeli parantezin içindeki ifadeye Ortalama Değer Teoremini uygulayarak, a ile $a + h$ arasındaki bir c_2 değeri için,

$$\Delta = khf_{yx}(c_2, d_2) \tag{10}$$

elde ederiz.

(5) ve (10) Denklemleri birlikte, hem (c_1, d_1) hem de (c_2, d_2) R' dikdörtgeninin içinde bulunmak üzere (Şekil E.12)

$$f_{xy}(c_1, d_1) = f_{yx}(c_2, d_2), \tag{11}$$

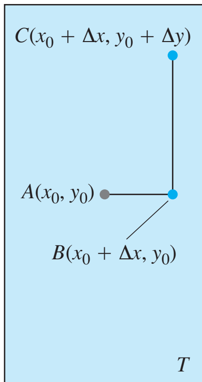
olduğunu gösterir. (11) Denklemi tam olarak istediğimiz sonuç değildir, çünkü sadece f_{xy}'nin (c_1, d_1)'de, f_{yx}'in (c_2, d_2)'deki değerine eşit olduğunu söyler. Ama tartışmamızdaki h ve k sayıları istediğimiz kadar küçük yapılabilir. f_{xy} ve f_{yx}'in ikisinin de (a, b)'de sürekli oldukları hipotezi, h ve $k \to 0$ iken $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ olmak koşuluyla, $f_{xy}(c_1, d_1) = f_{xy}(a, b) +$ e1 ve $f_{yx}(c_2, d_2) = f_{yx}(a, b) + \epsilon_2$ olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla, h ve k'yi sıfıra götürürsek, $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ elde ederiz. ■

TEOREM 3 İki Değişkenli Fonksiyonların Artım Teoremi

$z = f(x, y)$'nin birinci kısmi türevlerinin (x_0, y_0) noktasını içeren bir açık R bölgesinde tanımlı olduklarını ve f_x ile f_y'nin (x_0, y_0)'da sürekli olduklarını varsayın. Bu durumda, (x_0, y_0)'dan R'deki başka bir $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ noktasına ilerlemekten kaynaklanan f'nin değerindeki $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ değişimi, $\Delta x, \Delta y \to 0$ iken $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ koşuluyla,

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

şeklinde bir denklemi sağlar.



ŞEKİL E.13 Artım Teoreminin ispatındaki dikdörtgen T bölgesi. Şekil, pozitif Δx ve Δy için çizilmiştir, ama her iki artım sıfır veya negatif de olabilir.

İspat Merkezi $A(x_0, y_0)$'da olan ve R'nin içinde bulunan bir T dikdörtgeninin içinde çalışacak ve Δx ve Δy'nin de A'yı $B(x_0 + \Delta x, y_0)$'ye bağlayan doğru parçası ile B'yi $C(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$'ye bağlayan doğru parçasının T'nin içinde olmasını sağlayacak kadar küçük olduklarını varsayacağız (Şekil E.13).

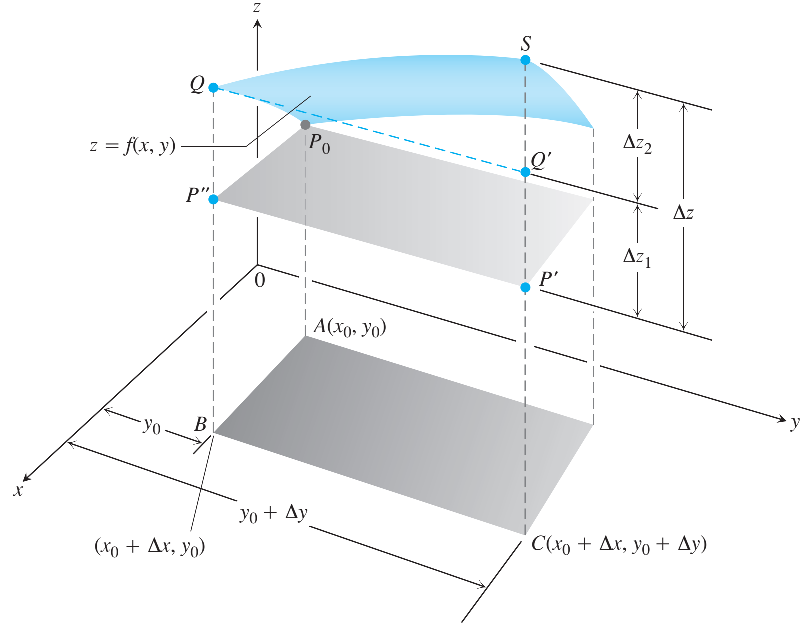
Δz'yi,

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

A'dan B'ye kadar f'nin değerindeki değişim ve

$$\Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

B'den C'ye kadar f'nin değerindeki değişim (Şekil E.14) olmak üzere, iki artımın toplamı olarak $\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2$ şeklinde yazabiliriz.



ŞEKİL E.14 $z = f(x, y)$ yüzeyinin $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ civarındaki parçası. P_0, P' ve P'' noktalarının xy-düzleminin üzerindeki yükseklikleri aynıdır. z'deki değişiklik $\Delta z = P'S$'dir. $P''Q = P'Q'$ olarak gösterilen

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

değişimi y'yi y_0'a eşit tutarken, x'i x_0'dan $x_0 + \Delta x$'e değiştirmekten kaynaklanmaktadır. Sonra, x'i $x_0 + \Delta x$'e eşit tutarak elde edilen z'deki

$$\Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

değişimi, y'yi y_0'dan $y_0 + \Delta y$'ye değiştirmekten kaynaklanmaktadır. Bu $Q'S$ ile temsil edilmektedir. z'deki toplam değişim Δz_1 ile Δz_2'nin toplamıdır.

x_0'ı $x_0 + \Delta x$'e bağlayan kapalı x-değerleri aralığında, $F(x) = f(x, y_0)$ fonksiyonu x'in türetilebilir (ve dolayısıyla sürekli) bir fonksiyonudur ve türevi

$$F'(x) = f_x(x, y_0)$$

olarak bulunur. Ortalama Değer Teoremine göre (Bölüm 4.2, Teorem 4), x ile $x_0 + \Delta x$ arasında, x'in

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = F'(c)\Delta x$$

veya

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = f_x(c, y_0)\Delta x$$

veya

$$\Delta z_1 = f_x(c, y_0)\Delta x \qquad (12)$$

olmasını sağlayan bir c değeri vardır.

Benzer şekilde, $G(y) = f(x_0 + \Delta x, y)$ fonksiyonu y_0 ile $y_0 + \Delta y$'yi birleştiren kapalı y aralığında y'nin türetilebilir (ve dolayısıyla sürekli) bir fonksiyonudur ve türevi,

$$G'(y) = f_y(x_0 + \Delta x, y)$$

olarak bulunur.

Böylece, y ile $y_0 + \Delta y$ arasında, y'nin

$$G(y_0 + \Delta y) - G(y_0) = G'(d)\Delta y$$

veya

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y) = f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y$$

veya

$$\Delta z_2 = f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y \tag{13}$$

olmasını sağlayan bir d değeri vardır.

Artık, Δx ve $\Delta y \to 0$ iken, $c \to x_0$ ve $d \to y_0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, f_x ve f_y (x_0, y_0)'da sürekli olduklarından, Δx ve $\Delta y \to 0$ iken,

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= f_x(c, y_0) - f_x(x_0, y_0), \\ \epsilon_2 &= f_y(x_0 + \Delta x, d) - f_y(x_0, y_0) \end{aligned} \tag{14}$$

büyüklüklerinin ikisi de sıfıra yaklaşır.

Son olarak, Δx ve $\Delta y \to 0$ iken ϵ_1 ve $\epsilon_2 \to 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Delta z &= \Delta z_1 + \Delta z_2 \\ &= f_x(c, y_0)\Delta x + f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y && \text{(12) ve (13)'ten denklemler} \\ &= [f_x(x_0, y_0) + \epsilon_1]\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \epsilon_2]\Delta y && \text{(14)'ten denklemler} \\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y, \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da ispatlamak istediğimiz şeydir. ■

Benzer sonuçlar herhangi sonlu sayıda değişkenli fonksiyonlar için de geçerlidir.

$w = f(x, y, z)$ fonksiyonunun birinci mertebe kısmi türevlerinin (x_0, y_0, z_0) noktasını içeren bir açık bölgede tanımlı olduklarını ve f_x, f_y ve f_z'nin (x_0, y_0, z_0)'da sürekli olduklarını varsayın. Bu durumda,

$$\Delta x, \Delta y \text{ ve } \Delta z \to 0 \quad \text{iken} \quad \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \to 0$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Delta w &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \\ &= f_x\Delta x + f_y\Delta y + f_z\Delta z + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y + \epsilon_3\Delta z, \end{aligned} \tag{15}$$

olur. Bu formüldeki f_x, f_y, f_z kısmi türevleri (x_0, y_0, z_0) noktasında hesaplanabilirler.

(15) Denklemi, Δw değişimi

$$\Delta w_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) \tag{16}$$

$$\Delta w_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) \tag{17}$$

$$\Delta w_3 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0), \tag{18}$$

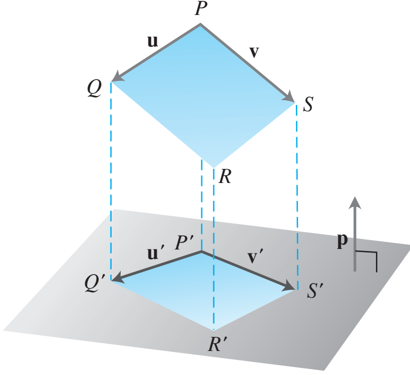
artımlarının toplamı olarak alınıp, Ortalama Değer Teoreminin bunların her birine ayrı ayrı uygulanmasıyla ispatlanabilir. Bu $\Delta w_1, \Delta w_2, \Delta w_3$ kısmi artımlarının her birinde, iki koordinat sabit tutulmakta ve biri değişmektedir. (17) Denkleminde, örneğin x, $x_0 + \Delta x$'e ve z de z_0'a eşit tutulduğu için, y değişmektedir. $f(x_0 + \Delta x, y, z_0)$ y'nin türevi f_y olan sürekli bir fonksiyonu olduğu için, Ortalama Değer Teoremi uygulanabilir ve y_0 ile $y_0 + \Delta y$ arasındaki bir y_1 değeri için

$$\Delta w_2 = f_y(x_0 + \Delta x, y_1, z_0)\Delta y$$

elde ederiz.

E.8 Bir Paralelkenarın Bir Düzlem Üzerine İzdüşümünün Alanı

Bu ek, Bölüm 16.5'te gerek duyulan, kenarları **u** ve **v** ile belirlenen paralelkenarın, normali **p** olan herhangi bir düzlem üzerine dik izdüşümünün alanının $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}|$ olduğu sonucunu ispatlamaktadır. (Şekil 15.A'ya bakın.)



Şekil E.15 Uzayda **u** ve **v** vektörleri tarafından belirlenen paralelkenar ve paralelkenarın bir düzlem üzerine dik izdüşümü. Düzleme ortogonal izdüşüm doğruları, birim normal vektör **p**'ye paraleldirler.

TEOREM

Kenarları, uzayda **u** ve **v** vektörleri ile belirlenen paralelkenarın, birim normal vektörü **p** olan herhangi bir düzlem üzerine dik izdüşümünün alanı

$$\text{Alan} = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}|$$

dir.

İspat **u** ve **v** vektörleri ile belirlenen tipik bir paralelkenarı ve birim normal vektörü **p** olan bir düzlem üzerine dik izdüşümünü gösteren Şekil 15.A'daki gösterimde,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \overrightarrow{PP}' + \mathbf{u}' + \overrightarrow{Q'Q} \\ &= \mathbf{u}' + \overrightarrow{PP}' - \overrightarrow{QQ}' && (\overrightarrow{Q'Q} = -\overrightarrow{QQ}') \\ &= \mathbf{u}' + s\mathbf{p}. && \text{(Bir } s \text{ skaleri için, çünkü } (\overrightarrow{PP}' - \overrightarrow{QQ}')\ \mathbf{p}\text{'ye paraleldir)} \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde, bir t skaleri için

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + t\mathbf{p}$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (\mathbf{u}' + s\mathbf{p}) \times (\mathbf{v}' + t\mathbf{p}) \\ &= (\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') + s(\mathbf{p} \times \mathbf{v}') + t(\mathbf{u}' \times \mathbf{p}) + st\underbrace{(\mathbf{p} \times \mathbf{p})}_{0}. \end{aligned} \quad (1)$$

bulunur.

$\mathbf{p} \times \mathbf{v}'$ ve $\mathbf{u}' \times \mathbf{p}$ vektörlerinin ikisi de **p** vektörüne ortogonaldir. Dolayısıyla, (1) Denkleminin her iki tarafını **p** ile skaler (·) çarptığımızda, sağ tarafta sıfırdan farklı tek terim $(\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') \cdot \mathbf{p}$ olur. Yani,

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p} = (\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') \cdot \mathbf{p}.$$

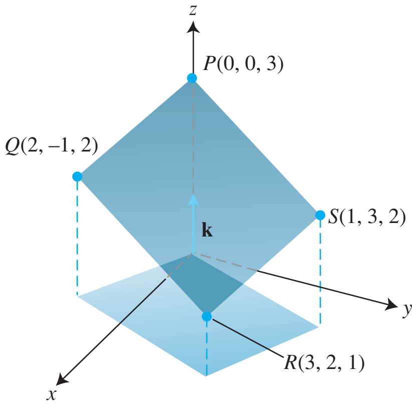
bulunur. Özel olarak,

$$|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}| = |(\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') \cdot \mathbf{p}|. \quad (2)$$

olur. Sağdaki mutlak değer, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ ve **p** tarafından belirlenen kutunun hacmidir. Bu özel kutunun yüksekliği $|\mathbf{p}| = 1$ dir ve kutunun hacmi sayısal olarak tabanının alanına, $P'Q'R'S'$ paralelkenarının alanına, eşittir. Bu gözlemi (2) Denklemi ile bireştirmek

$$\text{Area of } P'Q'R'S' = |(\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') \cdot \mathbf{p}| = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}|,$$

verir. Bu da, **u** ve **v** vektörleri ile belirlenen paralelkenarın, birim normal vektörü **p** olan herhangi bir düzlem üzerine dik izdüşümünün alanının $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}|$ olduğunu söylemektedir. ∎



ŞEKİL E.16 Örnek 1, *PQRS* paralelkenarının *xy*-düzlemine dik izdüşümünün alanını hesaplamaktadır.

ÖRNEK 1 Bir İzdüşümün Alanını Bulmak

$P(0, 0, 3)$, $Q(2, -1, 2)$, $R(3, 2, 1)$ ve $S(1, 3, 2)$ noktaları tarafından belirlenen paralelkenarın *xy*-düzlemine dik izdüşümünün alanının bulun (Şekil E.16).

Çözüm

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}, \qquad \mathbf{v} = \overrightarrow{PS} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}, \qquad \text{ve} \qquad \mathbf{p} = \mathbf{k}$$

ile

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

buluruz. dolayısıyla alan $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}| = |7| = 7$ bulunur. ■

E.9 Temel Cebir, Geometri ve Trigonometri Formülleri

Cebir

Aritmetik İşlemler

$$a(b + c) = ab + ac, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

İşaret Kuralları

$$-(-a) = a, \qquad \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Sıfır Sıfırla bölme tanımlı değildir.

$$a \neq 0 \text{ ise: } \frac{0}{a} = 0, \quad a^0 = 1, \quad 0^a = 0$$

$$\text{Herhangi bir } a \text{ için : } a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Kuvvet Kuralları

$$a^m a^n = a^{m+n}, \qquad (ab)^m = a^m b^m, \qquad (a^m)^n = a^{mn}, \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$a \neq 0$ ise

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a^0 = 1, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Binom Teoremi

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \cdots + nab^{n-1} + b^n.$$

Örneğin,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (a - b)^3 = a^2 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Tam Sayı Kuvvet Farklarının Çarpanlara Ayrılışı, $n > 1$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Örneğin,

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$$

Tam Kareye Tamamlama, $a \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + a\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\ &= \underbrace{a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right)}_{\text{Bu } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \text{ dir}} + \underbrace{c - \frac{b^2}{4a}}_{\text{Bu kısma } C \text{ deyin}} \\ &= au^2 + C \qquad (u = x + (b/2a)) \end{aligned}$$

Kuadratik Formül $\quad a \neq 0$ ve $ax^2 + bx + c = 0$ ise,

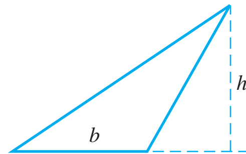
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dır.

Geometri

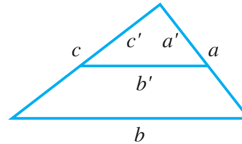
Alan, çevre ve hacim formülleri : (A = Alan, B = taban alanı, C = çevre, S = yanal alan veya yüzey alanı, V = hacim)

Üçgen



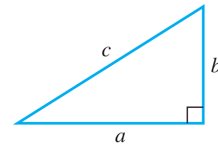
$A = \frac{1}{2}bh$

Benzer Üçgenler



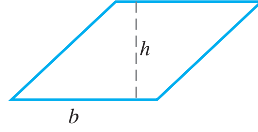
$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$

Pisagor Teoremi



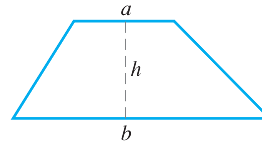
$a^2 + b^2 = c^2$

Paralelkenar



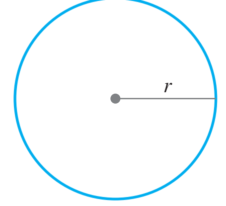
$A = bh$

Trapezoid



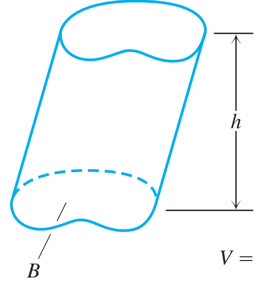
$A = \frac{1}{2}(a + b)h$

Çember

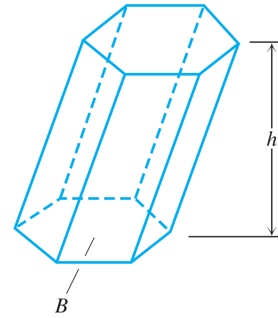


$A = \pi r^2,$
$C = 2\pi r$

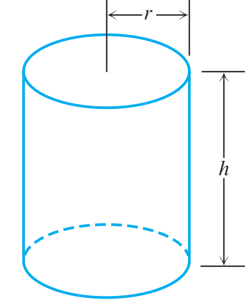
Paralel Tabanlı Herhangi bir Silindir veya Prizma



$V = Bh$

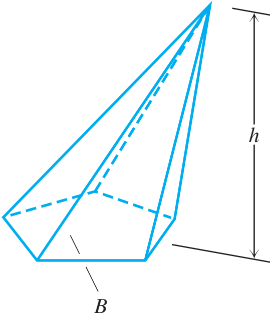


Dik Dairesel Silindir

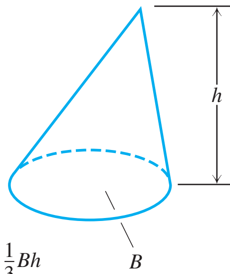


$V = \pi r^2 h$
$S = 2\pi rh =$ Yan alan

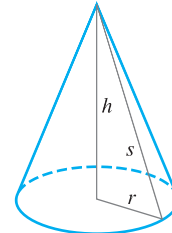
Herhangi bir Koni veya Piramit



$V = \frac{1}{3}Bh$

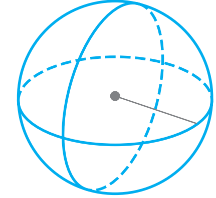


Dik Dairesel Koni



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
$S = \pi rs =$ Yan alan

Küre



$V = \frac{4}{3}\pi r^3, S = 4\pi r^2$

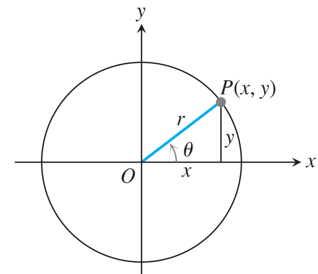
Trigonometri Formülleri

Tanımlar ve Temel Özdeşlikler

Sinüs: $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\csc\theta}$

Cosinüs: $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sec\theta}$

Tanjant: $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{\cot\theta}$



Özdeşlik

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta, \quad \csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}, \qquad \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

$$\sin\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos A, \qquad \cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \sin A$$

$$\sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \cos A, \qquad \cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin A$$

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}\cos(A - B) - \frac{1}{2}\cos(A + B)$$

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\cos(A - B) + \frac{1}{2}\cos(A + B)$$

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\sin(A - B) + \frac{1}{2}\sin(A + B)$$

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$$

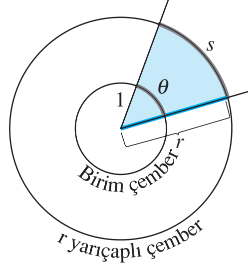
$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\sin\frac{1}{2}(A - B)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A + B)\sin\frac{1}{2}(A - B)$$

Trigonometrik Fonksiyonlar

Radyan Ölçü

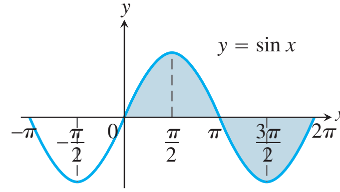


$$\frac{s}{r} = \frac{\theta}{1} = \theta \quad \text{veya} \quad \theta = \frac{s}{r},$$

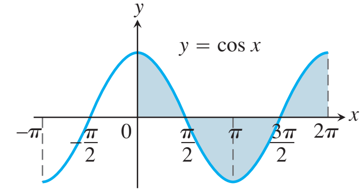
$180° = \pi$ radyan

Derece	Radyan
Kenarlar: $\sqrt{2}$, 1, 1; açılar: 45, 45, 90	Kenarlar: $\sqrt{2}$, 1, 1; açılar: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$
Kenarlar: 2, $\sqrt{3}$, 1; açılar: 30, 60, 90	Kenarlar: 2, $\sqrt{3}$, 1; açılar: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$

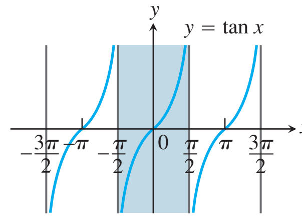
Eş iki üçgenin derece ve radyan cinsinden açıları



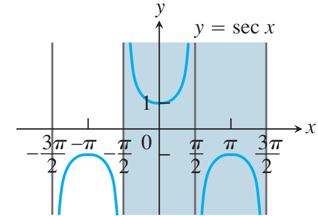
Tanım Kümesi: $(-\infty, \infty)$
Değer Kümesi: $[-1, 1]$



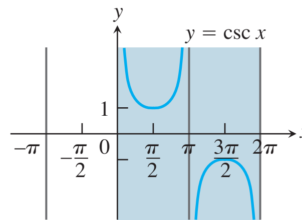
Tanım Kümesi: $(-\infty, \infty)$
Değer Kümesi: $[-1, 1]$



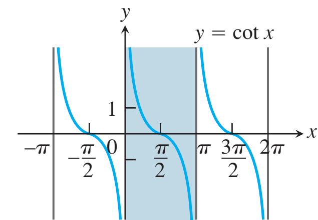
Tanım Kümesi: $\pi/2$'nin tek tamsayı katı dışındaki bütün reel sayılar
Değer Kümesi: $(-\infty, \infty)$



Tanım Kümesi: $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \ldots$
Değer Kümesi: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Tanım Kümesi: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Değer Kümesi: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Tanım Kümesi: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Değer Kümesi: $(-\infty, \infty)$

CEVAPLAR

BÖLÜM 11

Bölüm 11.1, Sayfa 757–761

1. $a_1 = 0, a_2 = -1/4, a_3 = -2/9, a_4 = -3/16$
3. $a_1 = 1, a_2 = -1/3, a_3 = 1/5, a_4 = -1/7$
5. $a_1 = 1/2, a_2 = 1/2, a_3 = 1/2, a_4 = 1/2$
7. $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \frac{63}{32}, \frac{127}{64}, \frac{255}{128}, \frac{511}{256}, \frac{1023}{512}$
9. $2, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, -\frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$
11. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 **13.** $a_n = (-1)^{n+1}, n \geq 1$
15. $a_n = (-1)^{n+1}(n)^2, n \geq 1$ **17.** $a_n = n^2 - 1, n \geq 1$
19. $a_n = 4n - 3, n \geq 1$ **21.** $a_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}, n \geq 1$
23. Yakınsar, 2 **25.** Yakınsar, -1 **27.** Yakınsar, -5
29. Iraksar **31.** Iraksar **33.** Yakınsar, 1/2
35. Yakınsar, 0 **37.** Yakınsar, $\sqrt{2}$ **39.** Yakınsar, 1
41. Yakınsar, 0 **43.** Yakınsar, 0 **45.** Yakınsar, 0
47. Yakınsar, 1 **49.** Yakınsar, e^7 **51.** Yakınsar, 1
53. Yakınsar, 1 **55.** Iraksar **57.** Yakınsar, 4
59. Yakınsar, 0 **61.** Iraksar **63.** Yakınsar, e^{-1}
65. Yakınsar, $e^{2/3}$ **67.** Yakınsar, $x\ (x > 0)$
69. Yakınsar, 0 **71.** Yakınsar, 1 **73.** Yakınsar, 1/2
75. Yakınsar, $\pi/2$ **77.** Yakınsar, 0 **79.** Yakınsar, 0
81. Yakınsar, 1/2 **83.** Yakınsar, 0 **85.** $x_n = 2^{n-2}$
87. **(a)** $f(x) = x^2 - 2,\ 1.414213562 \approx \sqrt{2}$
(b) $f(x) = \tan(x) - 1,\ 0.7853981635 \approx \pi/4$
(c) $f(x) = e^x$, Iraksar
89. **(b)** 1 **97.** Azalmayan, sınırlı
99. Azalmayan değil, sınırlı
101. Yakınsak, azalmayan dizi teoremi
103. Yakınsak, azalmayan dizi teoremi
105. Iraksak, ıraksaklık teoremi **109.** Yakınsar
111. Yakınsar **121.** $N = 692, a_n = \sqrt[n]{0.5}, L = 1$
123. $N = 65, a_n = (0.9)^n, L = 0$ **125.** **(b)** $\sqrt{3}$

Bölüm 11.2, Sayfa 769–771

1. $s_n = \frac{2(1 - (1/3)^n)}{1 - (1/3)}, 3$ **3.** $s_n = \frac{1 - (-1/2)^n}{1 - (-1/2)}, 2/3$
5. $s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n + 2}, \frac{1}{2}$ **7.** $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \cdots, \frac{4}{5}$
9. $\frac{7}{4} + \frac{7}{16} + \frac{7}{64} + \cdots, \frac{7}{3}$
11. $(5 + 1) + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{27}\right) + \cdots, \frac{23}{2}$
13. $(1 + 1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{25}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{125}\right) + \cdots, \frac{17}{6}$
15. 1 **17.** 5 **19.** 1 **21.** $-\frac{1}{\ln 2}$ **23.** Yakınsar, $2 + \sqrt{2}$
25. Yakınsar, 1 **27.** Iraksar **29.** Yakınsar, $\frac{e^2}{e^2 - 1}$
31. Yakınsar, 2/9 **33.** Yakınsar, 3/2 **35.** Iraksar
37. Iraksar **39.** Yakınsar, $\frac{\pi}{\pi - e}$
41. $a = 1, r = -x$; her $|x| < 1$ için $1/(1 + x)$'e yakınsar
43. $a = 3, r = (x - 1)/2$; $(-1, 3)$'teki her x için $6/(3 - x)$'e yakınsar
45. $|x| < \frac{1}{2}, \frac{1}{1 - 2x}$ **47.** $-2 < x < 0, \frac{1}{2 + x}$
49. $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, k bir tamsayı; $\frac{1}{1 - \sin x}$
51. 23/99 **53.** 7/9 **55.** 1/15 **57.** 41333/33300
59. **(a)** $\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{(n + 4)(n + 5)}$ **(b)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + 2)(n + 3)}$
(c) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n - 3)(n - 2)}$
69. **(a)** $r = 3/5$ **(b)** $r = -3/10$
71. $|r| < 1, \frac{1 + 2r}{1 - r^2}$ **73.** 28 m **75.** 8 m^2
77. **(a)** $3\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$
(b) $A_n = A + \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)A + \cdots + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}A$,
$A = \frac{\sqrt{3}}{4}, \lim_{n\to\infty} A_n = 2\sqrt{3}/5$

Bölüm 11.3, Sayfa 775–777

1. Yakınsar; geometrik seri, $r = \frac{1}{10} < 1$
3. Iraksar; $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n + 1} = 1 \neq 0$ **5.** Iraksar; p-serisi, $p < 1$

7. Yakınsar; geometrik seri, $r = \frac{1}{8} < 1$
9. Iraksar; İntegral Testi
11. Yakınsar; geometrik seri, $r = 2/3 < 1$
13. Iraksar; İntegral Testi **15.** Iraksar; $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n+1} \neq 0$
17. Iraksar; $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n}/\ln n\right) \neq 0$
19. Iraksar; geometrik seri, $r = \frac{1}{\ln 2} > 1$
21. Yakınsar; İntegral Testi **23.** Iraksar; n. Terim Testi
25. Yakınsar; İntegral Testi **27.** Yakınsar; İntegral Testi
29. Yakınsar; İntegral Testi **31.** $a = 1$ **33.** **(b)** 41.55 civarında
35. Doğru

Bölüm 11.4, Sayfa 781

1. Iraksar; $\sum\left(1/\sqrt{n}\right)$ ile limit karşılaştırması
3. Yakınsar; $\sum\left(1/2^n\right)$ ile karşılaştırın
5. Iraksar; n. Terim Testi
7. Yakınsar; $\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n < \left(\frac{n}{3n}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$
9. Iraksar; $\sum(1/n)$ ile doğrudan karşılaştırma
11. Yakınsar; $\sum(1/n^2)$ ile limit karşılaştırma
13. Iraksar; $\sum(1/n)$ ile limit karşılaştırma
15. Iraksar; $\sum(1/n)$ ile limit karşılaştırma
17. Iraksar; Integral Test
19. Yakınsar; $\sum(1/n^{3/2})$ ile karşılaştırın
21. Yakınsar; $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ **23.** Yakınsar; $\frac{1}{3^{n-1}+1} < \frac{1}{3^{n-1}}$
25. Iraksar; $\sum(1/n)$ ile limit karşılaştırması
27. Yakınsar; $\sum(1/n^2)$ ile karşılaştırın
29. Yakınsar; $\frac{\tan^{-1} n}{n^{1.1}} < \frac{\pi/2}{n^{1.1}}$
31. Yakınsar; $\sum(1/n^2)$ ile karşılaştırın
33. Iraksar; $\sum(1/n)$ ile limit karşılaştırması
35. Yakınsar; $\sum(1/n^2)$ ile limit karşılaştırması

Bölüm 11.5, Sayfa 786

1. Yakınsar; Oran Testi **3.** Iraksar; Oran Testi
5. Yakınsar; Oran Testi
7. Yakınsar; $\sum(3/(1.25)^n)$ ile karşılaştırın
9. Iraksar; $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{3}{n}\right)^n = e^{-3} \neq 0$
11. Yakınsar $\sum(1/n^2)$ ile karşılaştırın
13. Iraksar $\sum(1/(2n))$ ile karşılaştırın
15. Iraksar $\sum(1/n)$ **17.** Yakınsar; Oran Testi
19. Yakınsar; Oran Testi **21.** Yakınsar; Oran Testi
23. Yakınsar; Oran Testi
25. Converges; compare with $\sum(1/n^2)$
27. Yakınsar; Oran Testi **29.** Iraksar; Oran Testi
31. Yakınsar; Oran Testi **33.** Yakınsar; Oran Testi
35. Iraksar; $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{(1/n!)} \to 1$ **37.** Yakınsar; Oran Testi
39. Iraksar; Oran Testi **41.** Yakınsar; Oran Testi
43. Yakınsar; Oran Testi **47.** Evet

Bölüm 11.6, Sayfa 792–794

1. Teorem 16'ya göre yakınsar **3.** Iraksar; $a_n \nrightarrow 0$
5. Teorem 16'ya göre yakınsar **7.** Iraksar; $a_n \to 1/2$
9. Teorem 16'ya göre yakınsar
11. Mutlak yakınsak. Mutlak değerler serisi yakınsak bir geometrik seridir.
13. Koşullu yakınsak. $1/\sqrt{n} \to 0$ ama $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ıraksar.
15. Mutlak yakınsar $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$. ile karşılaştırın
17. Koşullu yakınsak. $1/(n+3) \to 0$ fakat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ ile karşılaştırın).
19. Iraksar; $\frac{3+n}{5+n} \to 1$
21. Koşullu yakınsak; $\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right) \to 0$ fakat $(1+n)/n^2 > 1/n$
23. Mutlak yakınsak; Kök Testi
25. İntegral Testine göre mutlak yakınsak. **27.** Iraksar; $a_n \nrightarrow 0$
29. Oran Testine göre, mutlak yakınsak.
31. Mutlak yakınsak; $\frac{1}{n^2+2n+1} < \frac{1}{n^2}$
33. $\left|\frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}\right| = \frac{1}{n^{3/2}}$ olduğundan mutlak yakınsak (yakınsak p-serisi))
35. Kök Testine göre mutlak yakınsak **37.** Iraksar; $a_n \to \infty$
39. Koşullu yakınsak; $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} =$ $1/\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right) \to 0$, fakat, mutlak değerler serisi ıraksar $\left(\sum\left(1/\sqrt{n}\right)\right.$ ile karşılaştırın$\left.\right)$
41. Iraksak, $a_n \to 1/2 \neq 0$
43. Mutlak yakınsak; $n = \frac{2}{e^n + e^{-n}} = \frac{2e^n}{e^{2n}+1} < \frac{2e^n}{e^{2n}} = \frac{2}{e^n}$, yakınsak bir geometrik seriden bir terim
45. $|\text{Hata}| < 0.2$ **47.** $|\text{Hata}| < 2 \times 10^{-11}$ **49.** 0.54030
51. **(a)** $a_n \geq a_{n+1}$ **(b)** $-1/2$

Bölüm 11.7, Sayfa 804–805

1. **(a)** $1, -1 < x < 1$ **(b)** $-1 < x < 1$ **(c)** yok
3. **(a)** $1/4, -1/2 < x < 0$ **(b)** $-1/2 < x < 0$ **(c)** yok
5. **(a)** $10, -8 < x < 12$ **(b)** $-8 < x < 12$ **(c)** yok
7. **(a)** $1, -1 < x < 1$ **(b)** $-1 < x < 1$ **(c)** yok
9. **(a)** $3, -3 \leq x \leq 3$ **(b)** $-3 \leq x \leq 3$ **(c)** yok
11. **(a)** ∞, her x için **(b)** her x için **(c)** yok
13. **(a)** ∞, her x için **(b)** her x için **(c)** yok
15. **(a)** $1, -1 \leq x < 1$ **(b)** $-1 < x < 1$ **(c)** $x = -1$
17. **(a)** $5, -8 < x < 2$ **(b)** $-8 < x < 2$ **(c)** yok
19. **(a)** $3, -3 < x < 3$ **(b)** $-3 < x < 3$ **(c)** yok
21. **(a)** $1, -1 < x < 1$ **(b)** $-1 < x < 1$ **(c)** yok
23. **(a)** $0, x = 0$ **(b)** $x = 0$ **(c)** yok
25. **(a)** $2, -4 < x \leq 0$ **(b)** $-4 < x < 0$ **(c)** $x = 0$

27. **(a)** $1, -1 \le x \le 1$ **(b)** $-1 \le x \le 1$ **(c)** yok
29. **(a)** $1/4, 1 \le x \le 3/2$ **(b)** $1 \le x \le 3/2$ **(c)** yok
31. **(a)** $1, (-1-\pi) \le x < (1-\pi)$
(b) $(-1-\pi) < x < (1-\pi)$ **(c)** $x = -1-\pi$
33. $-1 < x < 3,\ 4/(3 + 2x - x^2)$
35. $0 < x < 16,\ 2/\left(4 - \sqrt{x}\right)$
37. $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2},\ 3/(2 - x^2)$
39. $1 < x < 5,\ 2/(x-1),\ 1 < x < 5,\ -2/(x-1)^2$
41. **(a)** $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$; her x için yakınsar
(b) ve
(c) $2x - \frac{2^3x^3}{3!} + \frac{2^5x^5}{5!} - \frac{2^7x^7}{7!} + \frac{2^9x^9}{9!} - \frac{2^{11}x^{11}}{11!} + \cdots$
43. **(a)** $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \frac{17x^8}{2520} + \frac{31x^{10}}{14175},\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
(b) $1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + \frac{62x^8}{315} + \cdots,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Bölüm 11.8, Sayfa 810–811

1. $P_0(x) = 0,\ P_1(x) = x - 1,\ P_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2,$
$P_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$

3. $P_0(x) = \frac{1}{2},\ P_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2),$
$P_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2,$
$P_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3$

5. $P_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ P_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$
$P_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2,$
$P_3(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$

7. $P_0(x) = 2,\ P_1(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4),$
$P_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2,$
$P_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ **15.** $7\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ **17.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

19. $x^4 - 2x^3 - 5x + 4$
21. $8 + 10(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3$
23. $21 - 36(x+2) + 25(x+2)^2 - 8(x+2)^3 + (x+2)^4$
25. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n$ **27.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$
33. $L(x) = 0,\ Q(x) = -x^2/2$ **35.** $L(x) = 1,\ Q(x) = 1 + x^2/2$
37. $L(x) = x,\ Q(x) = x$

Bölüm 11.9, Sayfa 819–822

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5x)^n}{n!} = 1 - 5x + \frac{5^2x^2}{2!} - \frac{5^3x^3}{3!} + \cdots$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(-1)^n(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$= -5x + \frac{5x^3}{3!} - \frac{5x^5}{5!} + \frac{5x^7}{7!} + \cdots$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+1)^n}{(2n)!}$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \cdots$

9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$

11. $x - \frac{\pi^2x^3}{2!} + \frac{\pi^4x^5}{4!} - \frac{\pi^6x^7}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n} x^{2n+1}}{(2n)!}$

13. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!} =$
$1 - \frac{(2x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(2x)^4}{2\cdot 4!} - \frac{(2x)^6}{2\cdot 6!} + \frac{(2x)^8}{2\cdot 8!} - \cdots$

15. $x^2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n = x^2 + 2x^3 + 4x^4 + \cdots$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$

19. $|x| < (0.06)^{1/5} < 0.56968$
21. $|\text{ Hata }| < 10^{-3})^3/6 < 1.67 \times 10^{-10},\ -10^{-3} < x < 0$
23. $|\text{ Hata }| < (3^{0.1})(0.1)^3/6 < 1.87 \times 10^{-4}$ **25.** 0.000293653
27. $|x| < 0.02$ **31.** $\sin x,\ x = 0.1;\ \sin(0.1)$
33. $\tan^{-1} x,\ x = \pi/3$
35. $e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90}\cdots$
43. **(a)** $Q(x) = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2$ **(b)** $0 \le x < 100^{-1/3}$ için
49. **(a)** -1 **(b)** $\left(1/\sqrt{2}\right)(1+i)$ **(c)** $-i$
53. $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5\cdots$; her x için yakınsar

Bölüm 11.10, Sayfa 831–833

1. $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$ **3.** $1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \cdots$

5. $1 - x + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{2}$ **7.** $1 - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^6}{8} - \frac{5x^9}{16}$

9. $1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3}$

11. $(1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$

13. $(1 - 2x)^3 = 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3$

15. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = e^{-x}$ **17.** $y = \sum_{n=1}^{\infty}(x^n/n!) = e^x - 1$

19. $y = \sum_{n=2}^{\infty}(x^n/n!) = e^x - x - 1$ **21.** $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} = e^{x^2/2}$

23. $y = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^n = \frac{2}{1 - x}$ **25.** $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!} = \sinh x$

27. $y = 2 + x - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)!}$

29. $y = x - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!}$

31. $y = a + bx + \frac{1}{6}x^3 - \frac{ax^4}{3 \cdot 4} - \frac{bx^5}{4 \cdot 5} - \frac{x^7}{6 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{ax^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{bx^9}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} \cdots$.

33. 0.00267 **35.** 0.1 **37.** 0.0999444611 **39.** 0.100001

41. $1/(13 \cdot 6!) \approx 0.00011$ **43.** $\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!}$

45. **(a)** $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$

(b) $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^6}{5 \cdot 6} - \frac{x^8}{7 \cdot 8} + \cdots + (-1)^{15}\frac{x^{32}}{31 \cdot 32}$

47. 1/2 **49.** −1/24 **51.** 1/3 **53.** −1 **55.** 2

59. 500 terim **61.** 4 terim

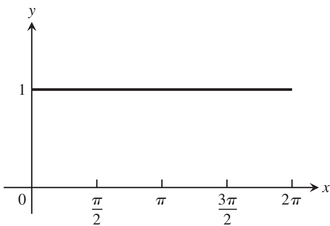
63. **(a)** $x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112}$, yakınsaklık yarıçapı = 1

(b) $\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112}$

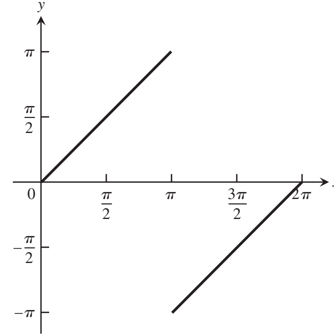
65. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$ **71.** **(c)** $3\pi/4$

Bölüm 11.11, Sayfa 838–839

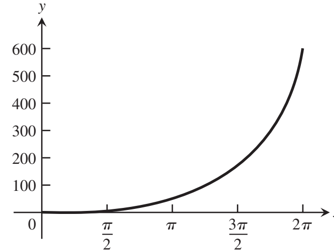
1. $f(x) = 1$



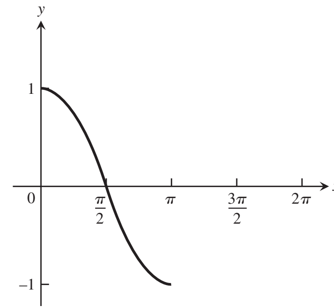
3. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}\sin(nx)}{n}$



5. $\frac{e^{2\pi} - 1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2 + 1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin(nx)}{n^2 + 1}\right)$



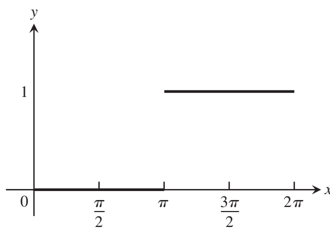
7. $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(1 + (-1)^n)}{n^2 - 1}\sin nx$



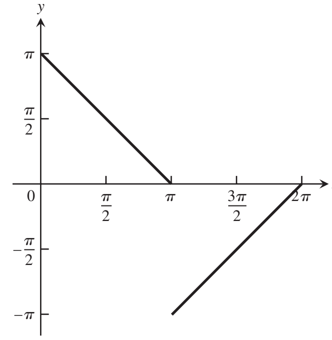
Problemler, Sayfa 840–842

1. 1'e yakınsar **3.** –1'e yakınsar **5.** Iraksar
7. 0'a yakınsar **9.** 1'e yakınsar **11.** e^{-5}'e yakınsar
13. 3'e yakınsar **15.** ln 2'e yakınsar **17.** Iraksar
19. 1/6 **21.** 3/2 **23.** $e/(e - 1)$ **25.** Iraksar
27. Koşullu yakınsak **29.** Koşullu yakınsak
31. Mutlak yakınsak **33.** Mutlak yakınsak
35. Mutlak yakınsak **37.** Mutlak yakınsak
39. Mutlak yakınsak
41. **(a)** $3, -7 \le x < -1$ **(b)** $-7 < x < -1$ **(c)** $x = -7$

43. (a) $1/3, 0 \le x \le 2/3$ **(b)** $0 \le x \le 2/3$ **(c)** yok
45. (a) ∞, her x için **(b)** her x için **(c)** yok
47. (a) $\sqrt{3}, -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ **(b)** $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$
(c) yok
49. (a) $e, -e < x < e$ **(b)** $-e < x < e$ **(c)** boş küme
51. $\frac{1}{1+x}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}$ **53.** $\sin x, \pi, 0$ **55.** $e^x, \ln 2, 2$ **57.** $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$
59. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ **61.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{5n}}{(2n)!}$
63. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{((\pi x)/2)^n}{n!}$
65. $2 - \frac{(x+1)}{2 \cdot 1!} + \frac{3(x+1)^2}{2^3 \cdot 2!} + \frac{9(x+1)^3}{2^5 \cdot 3!} + \cdots$
67. $\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2}(x-3) + \frac{1}{4^3}(x-3)^2 - \frac{1}{4^4}(x-3)^3$
69. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} x^n = -e^{-x}$
71. $y = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} x^n = 3e^{-2x}$
73. $y = -1 - x + 2\sum_{n=2}^{\infty}(x^n/n!) = 2e^x - 3x - 3$
75. $y = 1 + x + 2\sum_{n=0}^{\infty}(x^n/n!) = 2e^x - 1 - x$
77. 0.4849171431 **79.** ≈ 0.4872223583 **81.** $7/2$
83. $1/12$ **85.** -2 **87.** $r = -3, s = 9/2$
89. (b) $|\text{hata}| < |\sin(1/42)| < 0.02381$; az bir tahmindir, çünkü kalan pozitiftir.
91. $2/3$ **93.** $\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$; seri $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$'ye yakınsar
95. (a) ∞ **(b)** $a = 1, \quad b = 0$
97. Yakınsar
105. $\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin((2n-1)x)}{(2n-1)\pi}$



107. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos((2n-1)x)}{\pi(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin((2n-1)x)}{2n-1}$



Ek ve İleri Alıştırmalar, Sayfa 843–847

1. Yakınsak; Karşılaştırma Testi **3.** Yakınsak; n. Terim Testi
5. Yakınsak; Karşılaştırma Testi **7.** Yakınsak; n. Terim Testi
9. $a = \pi/3$ ile $\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \pi/3) - \frac{1}{4}(x-\pi/3)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}(x-\pi/3)^3 + \cdots$
11. $a = 0$ ile $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
13. $a = 22\pi$ ile $\cos x = 1 - \frac{1}{2}(x - 22\pi)^2 + \frac{1}{4!}(x-22\pi)^4 - \frac{1}{6!}(x-22\pi)^6 + \cdots$
15. Yakınsak, limit = b **17.** $\pi/2$ **23.** $b = \pm\frac{1}{5}$
25. $a = 2, L = -7/6$ **29. (b)** Evet
35. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ **(b)** 6 **(c)** $1/q$
37. (a) $R_n = C_0 e^{-kt_0}(1 - e^{-nkt_0})/(1 - e^{-kt_0})$,
$R = C_0(e^{-kt_0})/(1 - e^{-kt_0}) = C_0/(e^{kt_0} - 1)$
(b) $R_1 = 1/e \approx 0.368$,
$R_{10} = R(1 - e^{-10}) \approx R(0.9999546) \approx 0.58195$;
$R \approx 0.58198$; $0 < (R - R_{10})/R < 0.0001$
(c) 7

BÖLÜM 12

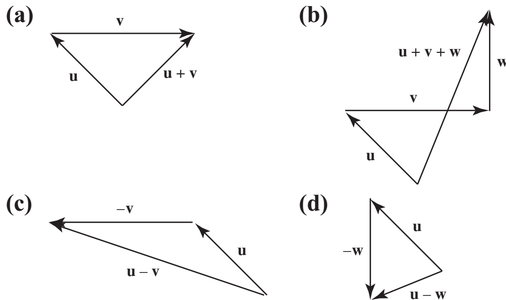
Bölüm 12.1, Sayfa 852–853

1. (2, 3, 0) noktasından geçen, z-eksenine paralel doğru.
3. x-ekseni **5.** xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = 4$ çemberi
7. xz-düzlemindeki $x^2 + z^2 = 4$ çemberi
9. yz-düzlemindeki $y^2 + z^2 = 1$ çemberi
11. xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = 16$ çemberi
13. (a) xy-düzleminin birinci dörtte bir bölgesi
(b) xy-düzleminin dördüncü dörtte bir bölgesi
15. (a) Merkezi orijinde olan 1 yarıçaplı top
(b) Orijinden 1 birimden uzak olan bütün noktalar
17. (a) Merkezi orijinde olan 1 yarıçaplı üst yarım küre
(b) Merkezi orijinde olan 1 yarıçaplı üst içi dolu yarım küre
19. (a) $x = 3$ **(b)** $y = -1$ **(c)** $z = -2$
21. (a) $z = 1$ **(b)** $x = 3$ **(c)** $y = -1$

23. **(a)** $x^2 + (y-2)^2 = 4, z = 0$
(b) $(y-2)^2 + z^2 = 4, x = 0$ **(c)** $x^2 + z^2 = 4, y = 2$
25. **(a)** $y = 3, z = -1$ **(b)** $x = 1, z = -1$ **(c)** $x = 1, y = 3$
27. $x^2 + y^2 + z^2 = 25, z = 3$ **29.** $0 \le z \le 1$ **31.** $z \le 0$
33. **(a)** $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 < 1$
(b) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 > 1$
35. 3 **37.** 7 **39.** $2\sqrt{3}$ **41.** $C(-2, 0, 2), a = 2\sqrt{2}$
43. $C(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}), a = \sqrt{2}$
45. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$
47. $(x+2)^2 + y^2 + z^2 = 3$ **49.** $C(-2, 0, 2), a = \sqrt{8}$
51. $C\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), a = \frac{5\sqrt{3}}{4}$
53. **(a)** $\sqrt{y^2 + z^2}$ **(b)** $\sqrt{x^2 + z^2}$ **(c)** $\sqrt{x^2 + y^2}$
55. $\sqrt{17} + \sqrt{33} + 6$

Bölüm 12.2, Sayfa 860–862

1. **(a)** $\langle 9, -6\rangle$ **(b)** $3\sqrt{13}$ **3.** **(a)** $\langle 1, 3\rangle$ **(b)** $\sqrt{10}$
5. **(a)** $\langle 12, -19\rangle$ **(b)** $\sqrt{505}$ **7.** **(a)** $\left\langle \frac{1}{5}, \frac{14}{5}\right\rangle$ **(b)** $\frac{\sqrt{197}}{5}$
9. $\langle 1, -4\rangle$ **11.** $\langle -2, -3\rangle$ **13.** $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$
15. $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ **17.** $\langle -3, 2, -1\rangle$ **19.** $\langle -3, 16, 0\rangle$
21. $\langle 3, 5, -8\rangle$
23. **v** vektörü yataydır ve uzunluğu 1 inç tir. **u** ve **w** vektörleri $11/16$ inç uzunluktadırlar. **w** yataydır, **u** vektörü yatayla 45° derecelik bir açı yapar. Bütün vektörler ölçekli çizilmelidir.

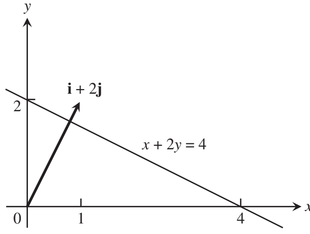


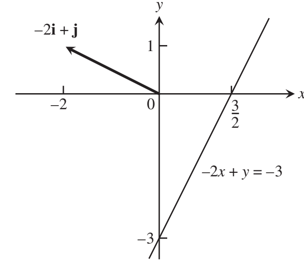
25. $3\left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$ **27.** $5(\mathbf{k})$
29. $\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right)$
31. **(a)** $2\mathbf{i}$ **(b)** $-\sqrt{3}\mathbf{k}$ **(c)** $\frac{3}{10}\mathbf{j} + \frac{2}{5}\mathbf{k}$ **(d)** $6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
33. $\frac{7}{13}(12\mathbf{i} - 5\mathbf{k})$
35. **(a)** $\frac{3}{5\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{4}{5\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$ **(b)** $(1/2, 3, 5/2)$
37. **(a)** $-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$ **(b)** $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$

39. $A(4, -3, 5)$ **41.** $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$ **43.** $5\sqrt{3}\mathbf{i}, 5\mathbf{j}$
45. $\approx\langle -338.095, 725.046\rangle$
47. **(a)** $(5\cos 60°, 5\sin 60°) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$
(b) $(5\cos 60° + 10\cos 315°, 5\sin 60° + 10\sin 315°) = \left(\frac{5 + 10\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{3} - 10\sqrt{2}}{2}\right)$
49. **(a)** $\frac{3}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ **(b)** $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ **(c)** $(2, 2, 1)$

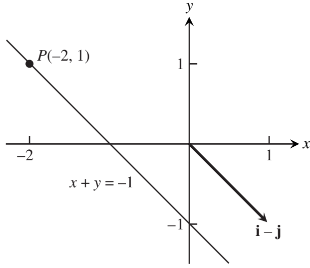
Bölüm 12.3, Sayfa 870–873

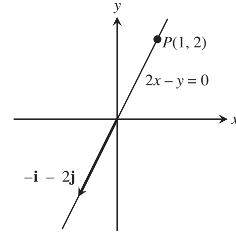
1. **(a)** $-25, 5, 5$ **(b)** -1 **(c)** -5 **(d)** $-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \sqrt{5}\mathbf{k}$
3. **(a)** $25, 15, 5$ **(b)** $\frac{1}{3}$ **(c)** $\frac{5}{3}$ **(d)** $\frac{1}{9}(10\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$
5. **(a)** $2, \sqrt{34}, \sqrt{3}$ **(b)** $\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{34}}$ **(c)** $\frac{2}{\sqrt{34}}$
(d) $\frac{1}{17}(5\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$
7. **(a)** $10 + \sqrt{17}, \sqrt{26}, \sqrt{21}$ **(b)** $\frac{10 + \sqrt{17}}{\sqrt{546}}$
(c) $\frac{10 + \sqrt{17}}{\sqrt{26}}$ **(d)** $\frac{10 + \sqrt{17}}{26}(5\mathbf{i} + \mathbf{j})$
9. 0.75 rad **11.** 1.77 rad
13. $A = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 63.435$ derece
$B = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53.130$ derece
$C = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 63.435$ derece
17. $\left(\frac{3}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}\right) + \left(-\frac{3}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} + 4\mathbf{k}\right)$
19. $\left(\frac{14}{3}\mathbf{i} + \frac{28}{3}\mathbf{j} - \frac{14}{3}\mathbf{k}\right) + \left(\frac{10}{3}\mathbf{i} - \frac{16}{3}\mathbf{j} - \frac{22}{3}\mathbf{k}\right)$
21. Eşit uzunluklu iki vektörün toplamı, $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\cdot(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1|^2 - |\mathbf{v}_2|^2 = 0$ denkleminden de görülebileceği gibi, *her zaman* farklarına diktir.
27. Yatay bileşen: ≈ 1188 ft/sn, dikey bileşen: ≈ 167 ft/sn
29. **(a)** $|\cos\theta| \le 1$ olduğundan
$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}||\cos\theta| \le |\mathbf{u}||\mathbf{v}|(1) = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$
buluruz.
(b) $|\cos\theta| = 1$ veya **u** ile **v**'nin biri ya da ikisi de 0 iken, eşitlik sağlanır. Sıfırdan faklı vektörler söz konusuysa, $\theta = 0$ veya π iken, yani vektörler paralelken eşitliği elde ederiz.
31. *a*
35. $x + 2y = 4$ **37.** $-2x + y = -3$





39. $x + y = -1$ **41.** $2x - y = 0$





43. 5 J **45.** 3464 J **47.** $\frac{\pi}{4}$ **49.** $\frac{\pi}{6}$ **51.** 0.14

53. Her nokta $\frac{\pi}{3}$ ve $\frac{2\pi}{3}$ **55.** (0, 0)'da: $\frac{\pi}{2}$; (1, 1)'de: $\frac{\pi}{4}$ ve $\frac{3\pi}{4}$

Bölüm 12.4, Sayfa 878–879

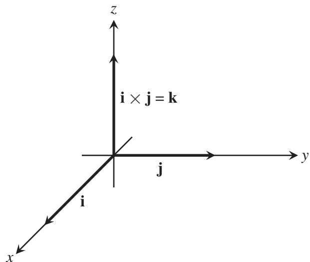
1. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 3$, yön $\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$'dir; $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 3$ yön $-\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$'dir.

3. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 0$, yön yoktur; $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 0$, yön yoktur

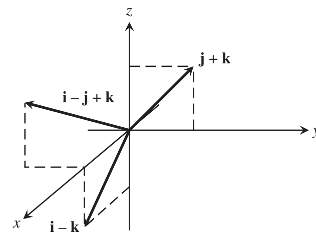
5. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 6$, yön $-\mathbf{k}$'dir; $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 6$, yön $\mathbf{k}$'dir.

7. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 6\sqrt{5}$, yön $\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$; $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 6\sqrt{5}$, yön $-\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$'dir.

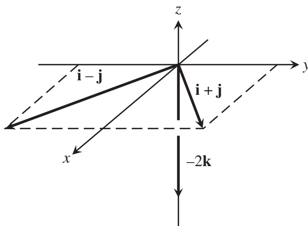
9.



11.



13.



15. **(a)** $2\sqrt{6}$ **(b)** $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

17. **(a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(b)** $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$

19. 8 **21.** 7 **23.** **(a)** Hiçbiri **(b)** $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{w}$ **25.** $10\sqrt{3}$ ft-lb

27. **(a)** Doğru **(b)** Her zaman doğru değil **(c)** Doğru **(d)** Doğru **(e)** Her zaman doğru değil **(f)** Doğru **(g)** Doğru **(h)** Doğru

29. **(a)** $\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}$ **(b)** $\pm\,\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ **(c)** $\pm\,(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ **(d)** $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v})\cdot\mathbf{w}|$

31. **(a)** Evet **(b)** Hayır **(c)** Evet **(d)** Hayır

33. Hayır. $\mathbf{v}$'nin $\mathbf{w}$'ya eşit olması gerekmez. Örneğin,
$\mathbf{i} + \mathbf{j} \neq -\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ama
$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{i} + \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} + \mathbf{k} = \mathbf{k}$ ve
$\mathbf{i} \times (-\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -\mathbf{i} \times \mathbf{i} + \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} + \mathbf{k} = \mathbf{k}$.'dir.

35. 2 **37.** 13 **39.** 11/2 **41.** 25/2

43. $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ ve $\mathbf{B} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ ise

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

olur ve üçgenin alanı

$$\frac{1}{2}\left|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\right| = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

bulunur. $\mathbf{A}$'dan $\mathbf{B}$'ye giden dar açı xy-düzleminde saat yönünün tersine ise, uygulanacak işaret (+), saat yönünde ise (–)' dir.

Bölüm 12.5, Sayfa 887–889

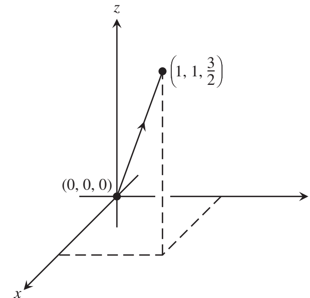
1. $x = 3 + t, y = -4 + t, z = -1 + t$

3. $x = -2 + 5t, y = 5t, z = 3 - 5t$ **5.** $x = 0, y = 2t, z = t$

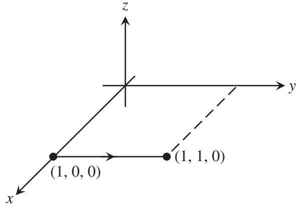
7. $x = 1, y = 1, z = 1 + t$ **9.** $x = t, y = -7 + 2t, z = 2t$

11. $x = t, y = 0, z = 0$

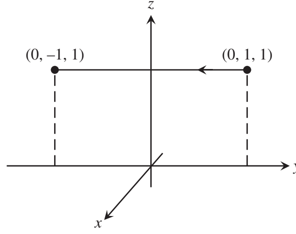
13. $x = t, y = t, z = \frac{3}{2}t, 0 \leq t \leq 1$



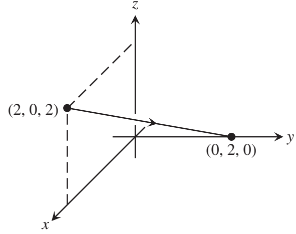
15. $x = 1, y = 1 + t, z = 0, -1 \leq t \leq 0$



17. $x = 0, y = 1 - 2t, z = 1, 0 \leq t \leq 1$



19. $x = 2 - 2t, y = 2t, z = 2 - 2t, 0 \leq t \leq 1$

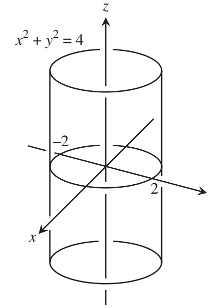


21. $3x - 2y - z = -3$ **23.** $7x - 5y - 4z = 6$
25. $x + 3y + 4z = 34$ **27.** $(1, 2, 3), -20x + 12y + z = 7$
29. $y + z = 3$ **31.** $x - y + z = 0$ **33.** $2\sqrt{30}$ **35.** 0
37. $\dfrac{9\sqrt{42}}{7}$ **39.** 3 **41.** $19/5$ **43.** $5/3$ **45.** $9/\sqrt{41}$
47. $\pi/4$ **49.** 1.76 rad **51.** 0.82 rad **53.** $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$
55. $(1, 1, 0)$ **57.** $x = 1 - t, y = 1 + t, z = -1$
59. $x = 4, y = 3 + 6t, z = 1 + 3t$
61. $L1$, $L2$'yi keser; $L2$, $L3$'e paraleldir, $L1$ ve $L3$ aykırıdır.
63. $x = 2 + 2t, y = -4 - t, z = 7 + 3t; x = -2 - t,$
$y = -2 + (1/2)t, z = 1 - (3/2)t$
65. $\left(0, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}\right), (-1, 0, -3), (1, -1, 0)$
69. Bir çok olası yanıt vardır. Bir olasılık: $x + y = 3$ ve $2y + z = 7$
71. $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ orijinden geçen veya bir koordinat eksenine paralel olanlar *hariç*, bütün düzlemleri tanımlar.

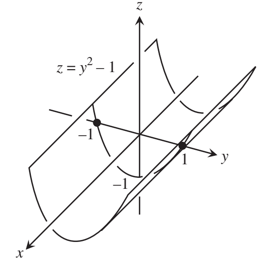
Bölüm 12.6, Sayfa 897–899

1. **(d),** elipsoid **3.** **(a),** silindir **5.** **(l),** hiperbolik paraboloid
7. **(b),** silindir **9.** **(k),** hiperbolik paraboloid **11.** **(h),** koni

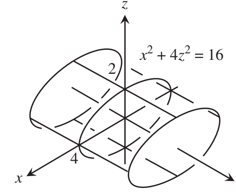
13.



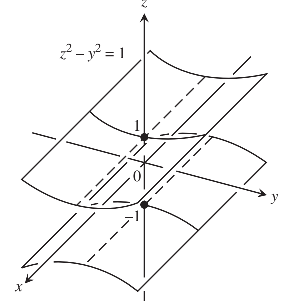
15.



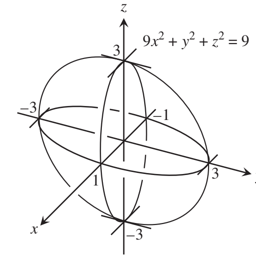
17.



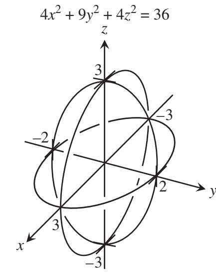
19.



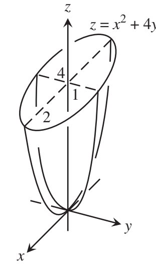
21.



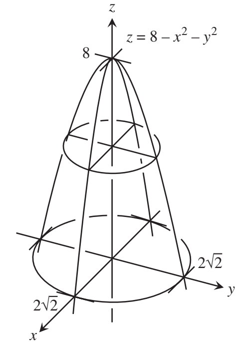
23.



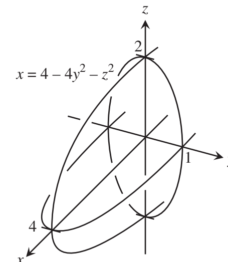
25.



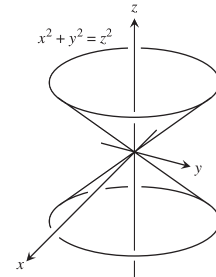
27.



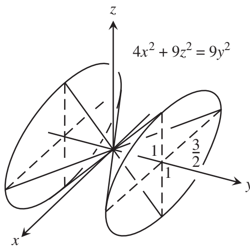
29.



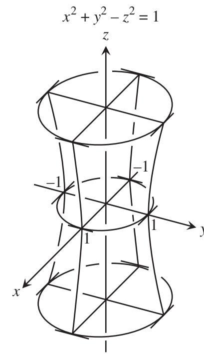
31.



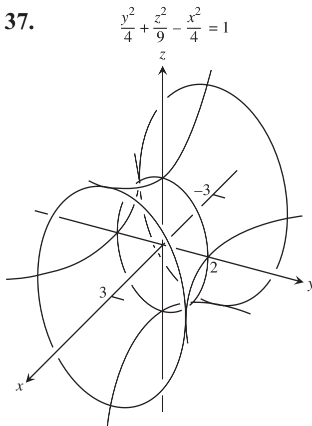
33.



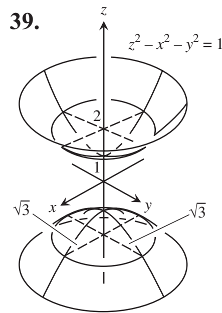
35.



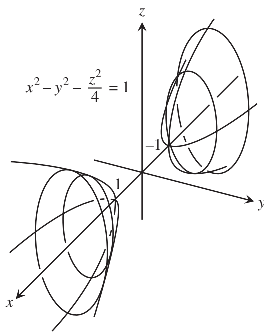
37.



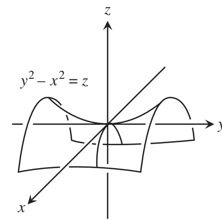
39.



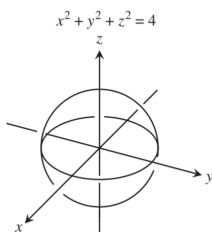
41.



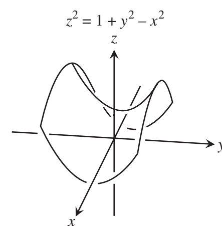
43.



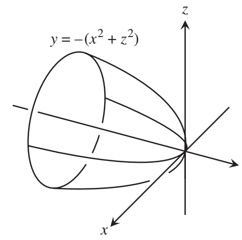
45.



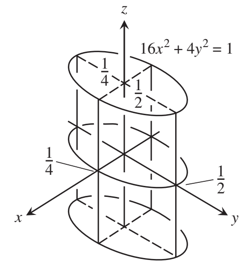
47.



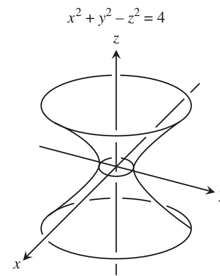
49.



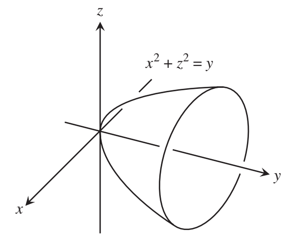
51.



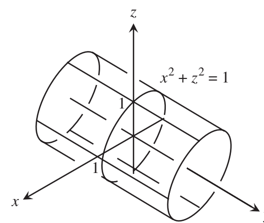
53.



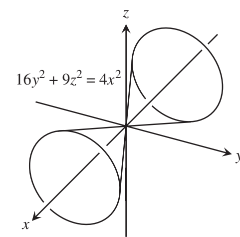
55.



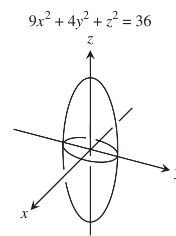
57.



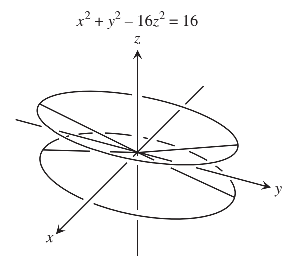
59.



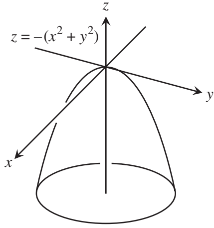
61.



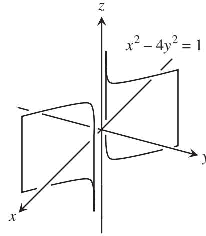
63.



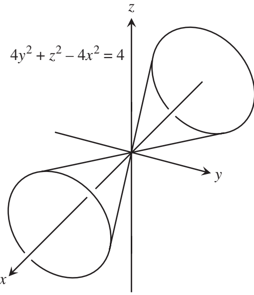
65.



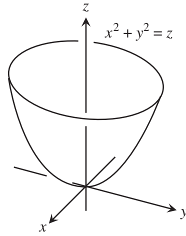
67.



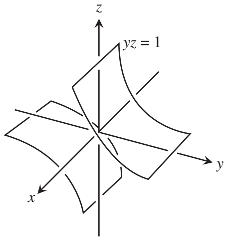
69.



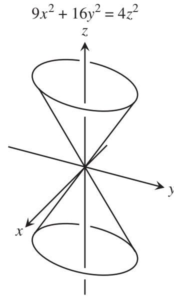
71.



73.



75.



77. **(a)** $\dfrac{2\pi(9 - c^2)}{9}$ **(b)** 8π **(c)** $\dfrac{4\pi abc}{3}$

81. Tepe noktası $(0, y_1, cy_1^{\,2}/b^2)$, odak $(0, y_1, c(y_1^{\,2}/b^2) - a^2/(4c))$

Problemler, Sayfa 900–902

1. **(a)** $\langle -17, 32\rangle$ **(b)** $\sqrt{1313}$ **3.** **(a)** $\langle 6, -8\rangle$ **(b)** 10

5. $\left\langle -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right\rangle$ [saat yönünün tersine kabul ile]

7. $\left\langle \dfrac{8}{\sqrt{17}}, -\dfrac{2}{\sqrt{17}}\right\rangle$

9. Uzunluk = 2, yön $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$'dir.

11. $\mathbf{v}(\pi/2) = 2(-\mathbf{i})$

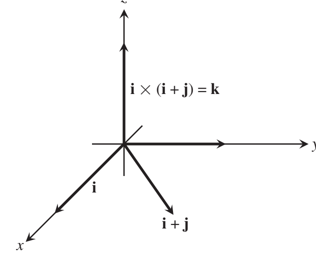
13. Uzunluk = 7, yön $\dfrac{2}{7}\mathbf{i} - \dfrac{3}{7}\mathbf{j} + \dfrac{6}{7}\mathbf{k}$'dir.

15. $\dfrac{8}{\sqrt{33}}\mathbf{i} - \dfrac{2}{\sqrt{33}}\mathbf{j} + \dfrac{8}{\sqrt{33}}\mathbf{k}$

17. $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}, |\mathbf{u}| = 3, \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 3, \mathbf{v}\times\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$,
$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, |\mathbf{v}\times\mathbf{u}| = 3, \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$,
$|\mathbf{u}|\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \dfrac{3}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

19. $\dfrac{4}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) - \dfrac{1}{3}(5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 11\mathbf{k})$

21. $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{k}$



23. $2\sqrt{7}$ **25.** **(a)** $\sqrt{14}$ **(b)** 1 **29.** $\sqrt{78}/3$

31. $x = 1 - 3t, y = 2, z = 3 + 7t$ **33.** $\sqrt{2}$

35. $2x + y + z = 5$ **37.** $-9x + y + 7z = 4$

39. $\left(0, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}\right), (-1, 0, -3), (1, -1, 0)$ **41.** $\pi/3$

43. $x = -5 + 5t, y = 3 - t, z = -3t$

45. **(b)** $x = -12t, y = 19/12 + 15t, z = 1/6 + 6t$

47. Evet; **v** düzleme paraleldir. **49.** 3 **51.** $-3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

53. $\dfrac{2}{\sqrt{35}}\left(5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}\right)$ **55.** $\left(\dfrac{11}{9}, \dfrac{26}{9}, \dfrac{7}{9}\right)$

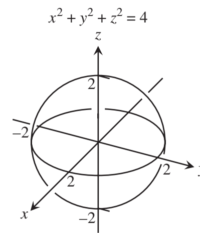
57. $(1, -2, -1); x = 1 - 5t, y = -2 + 3t, z = -1 + 4t$

59. $2x + 7y + 2z + 10 = 0$

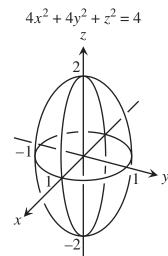
61. **(a)** hayır **(b)** hayır **(c)** hayır **(d)** hayır **(e)** evet

63. $11/\sqrt{107}$

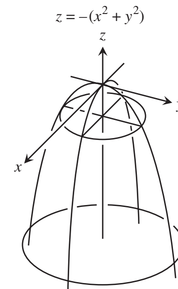
65.



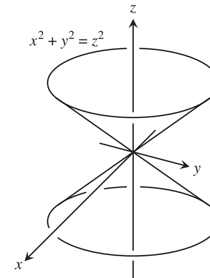
67.



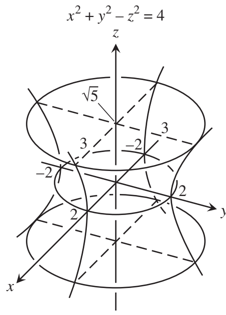
69.



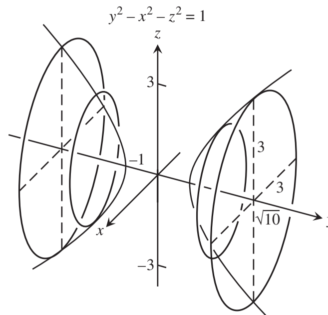
71.



73.



75.



Ek ve İleri Alıştırmalar, Sayfa 902–904

1. $(26, 23, -1/3)$ **3.** $|\mathbf{F}| = 20$ lb

7. **(a)** $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ **(b)** $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

13. $\frac{32}{41}\mathbf{i} + \frac{23}{41}\mathbf{j} - \frac{13}{41}\mathbf{k}$

15. **(a)** 0, 0 **(b)** $-10\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, -9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$
(c) $-4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
(d) $-10\mathbf{i} - 10\mathbf{k}, -12\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

25. **(a)** $|\mathbf{F}| = \frac{GMm}{d^2}\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{(i^2+1)^{3/2}}\right)$ **(b)** Evet

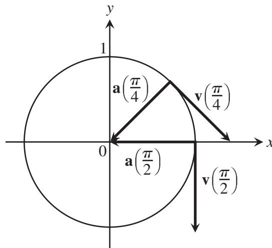
BÖLÜM 13

Bölüm 13.1, Sayfa 916–920

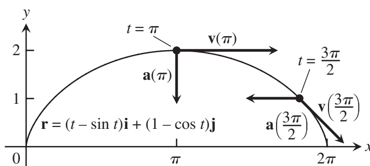
1. $y = x^2 - 2x, \mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \mathbf{a} = 2\mathbf{j}$

3. $y = \frac{2}{9}x^2, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

5. $t = \frac{\pi}{4}$: $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}, \mathbf{a} = \frac{-\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$;
$t = \pi/2$: $\mathbf{v} = -\mathbf{j}, \mathbf{a} = -\mathbf{i}$



7. $t = \pi$: $\mathbf{v} = 2\mathbf{i}, \mathbf{a} = -\mathbf{j}$; $t = \frac{3\pi}{2}$: $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{a} = -\mathbf{i}$



9. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}; \mathbf{a} = 2\mathbf{j}$; hız: 3; yön : $\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$; $\mathbf{v}(1) = 3\left(\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$

11. $\mathbf{v} = (-2\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$;
$\mathbf{a} = (-2\cos t)\mathbf{i} - (3\sin t)\mathbf{j}$; hız: $2\sqrt{5}$;
yön: $\left(-1/\sqrt{5}\right)\mathbf{i} + \left(2/\sqrt{5}\right)\mathbf{k}$;
$\mathbf{v}(\pi/2) = 2\sqrt{5}\left[\left(-1/\sqrt{5}\right)\mathbf{i} + \left(2/\sqrt{5}\right)\mathbf{k}\right]$

13. $\mathbf{v} = \left(\frac{2}{t+1}\right)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}; \mathbf{a} = \left(\frac{-2}{(t+1)^2}\right)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$;
hız : $\sqrt{6}$; yön: $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$;
$\mathbf{v}(1) = \sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}\right)$

15. $\pi/2$ **17.** $\pi/2$ **19.** $t = 0, \pi, 2\pi$

21. $(1/4)\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + (3/2)\mathbf{k}$ **23.** $\left(\frac{\pi + 2\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

25. $(\ln 4)\mathbf{i} + (\ln 4)\mathbf{j} + (\ln 2)\mathbf{k}$

27. $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{-t^2}{2} + 1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{-t^2}{2} + 2\right)\mathbf{j} + \left(\frac{-t^2}{2} + 3\right)\mathbf{k}$

29. $\mathbf{r}(t) = ((t+1)^{3/2} - 1)\mathbf{i} + (-e^{-t} + 1)\mathbf{j} + (\ln(t+1) + 1)\mathbf{k}$

31. $\mathbf{r}(t) = 8t\mathbf{i} + 8t\mathbf{j} + (-16t^2 + 100)\mathbf{k}$

33. $x = t, y = -1, z = 1 + t$ **35.** $x = at, y = a, z = 2\pi b + bt$

37. **(a)** (i): Hızı sabit ve 1'dir (ii): Evet
(iii): Saat yönünün tersine (iv): Evet
(b) (i): Hızı sabit ve 2'dir (ii): Evet
(iii): Saat yönünün tersine (iv): Evet
(c) (i): Hızı sabit ve 1'dir (ii): Evet
(iii): Saat yönünün tersine
(iv): (1, 0) yerine (0, –1)'den hareket eder
(d) (i): Hızı sabit ve 1'dir (ii): Evet
(iii): Saat yönünde (iv): Evet
(e) (i): Hızı değişkendir (ii): Hayır
(iii): Saat yönünün tersine (iv): Evet

39. $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 + \frac{6}{\sqrt{11}}t + 1\right)\mathbf{i} - \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{11}}t - 2\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{11}}t + 3\right)\mathbf{k} = \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2t}{\sqrt{11}}\right)(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$

41. $\mathbf{v} = 2\sqrt{5}\mathbf{i} + \sqrt{5}\mathbf{j}$

43. $\max|\mathbf{v}| = 3, \min|\mathbf{v}| = 2, \max|\mathbf{a}| = 3, \min|\mathbf{a}| = 2$

Bölüm 13.2, Sayfa 927–930

1. 50 sn

3. **(a)** 72.2 sn; 25,510 m **(b)** 4020 m **(c)** 6378 m

5. $t \approx 2.135$ sn, $x \approx 66.43$ ft

7. **(a)** $v_0 \approx 0$ 9.9 m/sn **(b)** $\alpha \approx 18.4°$ veya 71.6°

9. 190 mil/sa **11.** Golf topu üstteki yapraklara vuracaktır.

13. **(a)** 149 ft/sn **(b)** 2.25 sn **15.** 39.3° veya 50.7°

17. 46.6 ft/sn **21.** 1.92 sn, 73.7 ft (yaklaşık)
23. 4.00 ft, 7.80 ft/sn **25.** **(b)** $\mathbf{v}_0$, $\angle AOR$ açısını ikiye bölecektir.
27. **(a)** (Çarpışma noktasında "x"in sıfır olduğunu kabul ederek.) $x(t) = (35\cos 27°)t$ ve $y(t) = 4 + (35\sin 27°)t - 16t^2$ olmak üzere $\mathbf{r}(t) = (x(t))\mathbf{i} + (y(t))\mathbf{j}$
(b) $t \approx 0.497$ sn'de yaklaşık 7.945 ft olan maksimum yüksekliğine erişir.
(c) Menzil $\approx$ 37.45 ft; uçuş süresi $\approx$ 1.201 sn
(d) $t \approx 0.254$ ve $t \approx 0.740$ sn'de, düşeceği yere $\approx$ 29.532 ft ve $\approx$14.376 ft varken.
(e) Evet, Değişir, çünkü top fileyi geçmez.
31. **(a)** $x(t) = \left(\frac{1}{0.08}\right)(1 - e^{-0.08t}) \cdot (152\cos 20° - 17.6)$ ve $y(t) = 3 + \left(\frac{152}{0.08}\right)(1 - e^{-0.08t}) \cdot (\sin 20°) + \left(\frac{32}{0.08^2}\right)(1 - 0.08t - e^{-0.08t})$ olmak üzere $\mathbf{r}(t) = (x(t))\mathbf{i} + (y(t))\mathbf{j}$,
(b) $t \approx 1.527$ sn'de yaklaşık 41.893 ft olan maksimum yüksekliğine erişir.
(c) Menzil $\approx$ 351.734 ft; uçuş süresi $\approx$ 3.181 sn
(d) $t \approx 0.877$ sn ve $t \approx 2.190$ sn'de, düşeceği yere 106.028 ft ve 251.530 ft varken.
(e) Hayır. Topun çiti aşması için rüzgar vuruş yönünde ve hızı 12.846 ft/sn'den daha fazla olmalıdır.

Bölüm 13.3, Sayfa 935–936

1. $\mathbf{T} = \left(-\frac{2}{3}\sin t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2}{3}\cos t\right)\mathbf{j} + \frac{\sqrt{5}}{3}\mathbf{k}$, 3π

3. $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t}}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}\mathbf{k}$, $\frac{52}{3}$

5. $\mathbf{T} = -\cos t\,\mathbf{j} + \sin t\,\mathbf{k}$, $\frac{3}{2}$

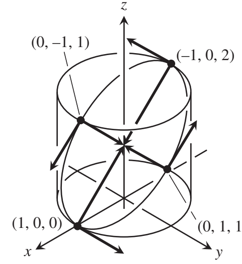
7. $\mathbf{T} = \left(\frac{\cos t - t\sin t}{t+1}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sin t + t\cos t}{t+1}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\sqrt{2}t^{1/2}}{t+1}\right)\mathbf{k}$, $\frac{\pi^2}{2} + \pi$

9. $(0, 5, 24\pi)$ **11.** $s(t) = 5t$, $L = \frac{5\pi}{2}$

13. $s(t) = \sqrt{3}e^t - \sqrt{3}$, $L = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ **15.** $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$

17. **(a)** Silindir $x^2 + y^2 = 1$'dir, düzlem $x + z = 1$'dir.

(b) ve **(c)**



(d) $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t}\,dt$ **(e)** $L \approx 7.64$

Bölüm 13.4, Sayfa 942–943

1. $\mathbf{T} = (\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j}$, $\mathbf{N} = (-\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j}$, $\kappa = \cos t$

3. $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}$, $\mathbf{N} = \frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}$, $\kappa = \frac{1}{2\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3}$

5. **(b)** $\cos x$

7. **(b)** $\mathbf{N} = \frac{-2e^{2t}}{\sqrt{1+4e^{4t}}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{1+4e^{4t}}}\mathbf{j}$
(c) $\mathbf{N} = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{4-t^2}\,\mathbf{i} + t\mathbf{j}\right)$

9. $\mathbf{T} = \frac{3\cos t}{5}\mathbf{i} - \frac{3\sin t}{5}\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}$, $\mathbf{N} = (-\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j}$, $\kappa = \frac{3}{25}$

11. $\mathbf{T} = \left(\frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}$, $\mathbf{N} = \left(\frac{-\cos t - \sin t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{-\sin t + \cos t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}$, $\kappa = \frac{1}{e^t\sqrt{2}}$

13. $\mathbf{T} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathbf{j}$, $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{t\mathbf{j}}{\sqrt{t^2+1}}$, $\kappa = \frac{1}{t(t^2+1)^{3/2}}$

15. $\mathbf{T} = \left(\operatorname{sech}\frac{t}{a}\right)\mathbf{i} + \left(\tanh\frac{t}{a}\right)\mathbf{j}$, $\mathbf{N} = \left(-\tanh\frac{t}{a}\right)\mathbf{i} + \left(\operatorname{sech}\frac{t}{a}\right)\mathbf{j}$, $\kappa = \frac{1}{a}\operatorname{sech}^2\frac{t}{a}$

19. $1/(2b)$ **21.** $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + y^2 = 1$

23. $\kappa(x) = 2/(1 + 4x^2)^{3/2}$ **25.** $\kappa(x) = |\sin x|/(1 + \cos^2 x)^{3/2}$

Bölüm 13.5, Sayfa 949–950

1. $\mathbf{B} = \left(\frac{4}{5}\cos t\right)\mathbf{i} - \left(\frac{4}{5}\sin t\right)\mathbf{j} - \frac{3}{5}\mathbf{k},\ \tau = -\frac{4}{25}$

3. $\mathbf{B} = \mathbf{k}, \tau = 0$ **5.** $\mathbf{B} = -\mathbf{k}, \tau = 0$ **7.** $\mathbf{B} = \mathbf{k}, \tau = 0$

9. $\mathbf{a} = |a|\mathbf{N}$ **11.** $\mathbf{a}(1) = \frac{4}{3}\mathbf{T} + \frac{2\sqrt{5}}{3}\mathbf{N}$ **13.** $\mathbf{a}(0) = 2\mathbf{N}$

15. $\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} - \mathbf{k},\ \mathbf{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j},$
$\mathbf{N}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j},\ \mathbf{B}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \mathbf{k}$; değen düzlem: $z = -1$; normal düzlem: $-x + y = 0$; doğrultucu düzlem: $x + y = \sqrt{2}$

17. Evet. Araba eğri bir yolda ilerliyorsa $(\kappa \neq 0)$, $a_N = \kappa|\mathbf{v}|^2 \neq 0$ ve $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

21. $|\mathbf{F}| = \kappa\left(m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right)$ **23.** $\kappa = \frac{1}{t}, \rho = t$

29. $\mathbf{v}$'nin bileşenleri: $-1.8701, 0.7089, 1.0000$
$\mathbf{a}$'nin bileşenleri: $-1.6960, -2.0307, 0$
Hız: 2.2361; $\mathbf{T}$'nin bileşenleri $-0.8364, 0.3170, 0.4472$
$\mathbf{N}$'nin bileşenleri: $-0.4143, -0.8998, -0.1369$
$\mathbf{B}$'nin bileşenleri: $0.3590, -0.2998, 0.8839$; Eğrilik: 0.5060
Burulma: 0.2813; İvmenin teğetsel bileşeni: 0.7746
İvmenin normal bileşeni: 2.5298

31. $\mathbf{v}$'nin bileşenleri: $2.0000, 0, 0.1629$
$\mathbf{a}$'nin bileşenleri: $0, -1.0000, 0.0086$; Hız: 2.0066
$\mathbf{T}$'nin bileşenleri: $0.9967, 0, 0.0812$
$\mathbf{N}$'nin bileşenleri: $-0.0007, -1.0000, 0.0086$
$\mathbf{B}$'nin bileşenleri: $0.0812, -0.0086, -0.9967$; Eğrilik: 0.2484
Burulma: -0.0411; ivmenin teğetsel bileşeni: 0.0007
İvmenin normal bileşeni: 1.0000

Bölüm 13.6, Sayfa 958–959

1. $T = 93.2$ min **3.** $a = 6764$ km **5.** $D = 6501$ km

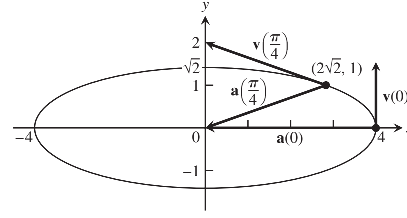
7. **(a)** 42,168 km **(b)** 35,789 km
(c) *Syncom 3, GOES 4*, and *Intelsat 5*

9. Dünyanın merkezinden $a = 383{,}200$ km, veya yüzeyden yaklaşık 376,821 km

11. 2.97×10^{-19} sn^2/m^3, 9.902×10^{-14} sn^2/m^3, 8.045×10^{-12} sn^2/m^3

Problemler, Sayfa 960–962

1. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{2} = 1$



$t = 0$'da $a_T = 0$, $a_N = 4$, $\kappa = 2$
$t = \frac{\pi}{4}$'de $a_T = \frac{7}{3}$, $a_N = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $\kappa = \frac{4\sqrt{2}}{27}$

3. $|\mathbf{v}|_{max} = 1$ **5.** $\kappa = 1/5$ **7.** $dy/dt = -x$; saat yönünde

11. Gülle durulan yerden yaklaşık 66 ft, 3 inç ileride yere çarpar

15. **(a)** 59.19 ft/sn **(b)** 74.58 ft/sn **19.** $\kappa = \pi s$

21. Uzunluk $= \frac{\pi}{4}\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}} + \ln\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}}\right)$

23. $\mathbf{T}(0) = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$; $\mathbf{N}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$;
$\mathbf{B}(0) = -\frac{1}{3\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{4}{3\sqrt{2}}\mathbf{k}$; $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $\tau = \frac{1}{6}$

25. $\mathbf{T}(\ln 2) = \frac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{j}$; $\mathbf{N}(\ln 2) = -\frac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{j}$;
$\mathbf{B}(\ln 2) = \mathbf{k}$; $\kappa = \frac{8}{17\sqrt{17}}$; $\tau = 0$

27. $\mathbf{a}(0) = 10\mathbf{T} + 6\mathbf{N}$

29. $\mathbf{T} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\mathbf{k}$;
$\mathbf{N} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)\mathbf{k}$;
$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$; $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\tau = 0$

31. $\pi/3$ **33.** $x = 1 + t, y = t, z = -t$

35. 5971 km, 1.639×10^7 km^2, %3.21 görülebilir

Ek ve İleri Alıştırmalar, Sayfa 962–964

1. **(a)** $\mathbf{r}(t) = \left(-\frac{8}{15}t^3 + 4t^2\right)\mathbf{i} + (-20t + 100)\mathbf{j}$; **(b)** $\frac{100}{3}$ m

3. **(a)** $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=2\pi} = 2\sqrt{\frac{\pi g b}{a^2 + b^2}}$

(b) $\theta = \frac{gbt^2}{2(a^2 + b^2)}, z = \frac{gb^2t^2}{2(a^2 + b^2)}$

(c) $\mathbf{v}(t) = \frac{gbt}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{T}$; $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{bg}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{T} + a\left(\frac{bgt}{a^2 + b^2}\right)^2\mathbf{N}$

B yönünde bileşen yoktur.

7. **(a)** $\dfrac{dx}{dt} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$, $\dfrac{dy}{dt} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$

(b) $\dfrac{dr}{dt} = \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta$, $r\dfrac{d\theta}{dt} = -\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta$

9. **(a)** $\mathbf{a}(1) = -9\mathbf{u}_r - 6\mathbf{u}_\theta$, $\mathbf{v}(1) = -\mathbf{u}_r + 3\mathbf{u}_\theta$ **(b)** 6.5 in.

11. **(c)** $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}$

BÖLÜM 14

Bölüm 14.1, Sayfa 973–975

1. **(a)** xy–düzlemindeki bütün noktalar **(b)** bütün reel sayılar
(c) $y - x = c$ doğruları **(d)** sınır noktaları yok
(e) hem açık hem kapalı **(f)** sınırlı değil

3. **(a)** xy–düzlemindeki bütün noktalar **(b)** $z \geq 0$
(c) $f(x, y) = 0$ için, orijin; $f(x, y) \neq 0$ için, merkezleri (0, 0)'da olan ve büyük ve küçük eksenleri sırasıyla x- ve y-eksenleri olan elipsler
(d) sınır noktaları yok **(e)** hem açık hem kapalı
(f) sınırlı değil

5. **(a)** xy–düzlemindeki bütün noktalar **(b)** bütün reel sayılar
(c) $f(x, y) = 0$ için, x- ve y-eksenleri; $f(x, y) \neq 0$ için asimptotları x- ve y-eksenleri olan hiperboller
(d) sınır noktaları yok **(e)** hem açık hem kapalı
(f) sınırlı değil

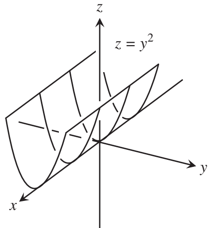
7. **(a)** $x^2 + y^2 < 16$ denklemini sağlayan her (x, y) **(b)** $z \geq 1/4$
(c) merkezleri orijinde ve yarıçapları $r < 4$ olan çemberler
(d) Sınır $x^2 + y^2 = 16$ çemberidir
(e) Açık **(f)** Sınırlı

9. **(a)** $(x, y) \neq (0, 0)$ **(b)** bütün reel sayılar
(c) Merkezi (0, 0)'da ve yarıçapları $r > 0$ olan çemberler
(d) Sınır bir tek (0, 0) noktasıdır
(e) Açık **(f)** Sınırlı

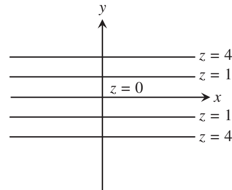
11. **(a)** $-1 \leq y - x \leq 1$ denklemini sağlayan her (x, y)
(b) $-\pi/2 \leq z \leq \pi/2$
(c) $-1 \leq c \leq 1$ olmak üzere $y - x = c$ şeklindeki doğrular
(d) Sınır $y = 1 + x$ ve $y = -1 + x$ doğrularıdır
(e) Açık **(f)** Sınırlı

13. (f) **15.** (a) **17.** (d)

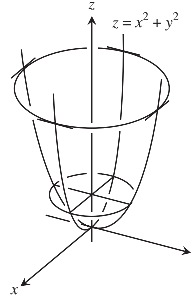
19. **(a)**



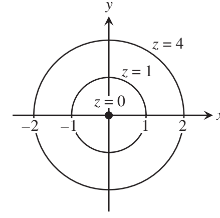
(b)



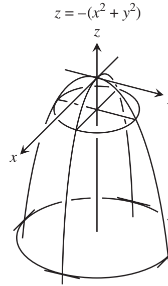
21. **(a)**



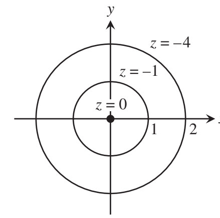
(b)



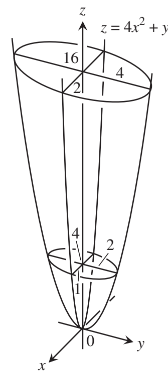
23. **(a)**



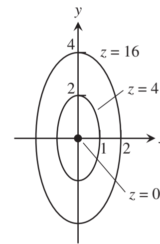
(b)



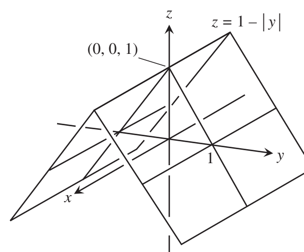
25. **(a)**



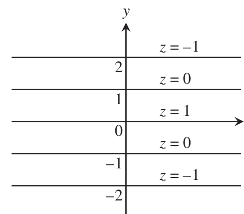
(b)



27. **(a)**

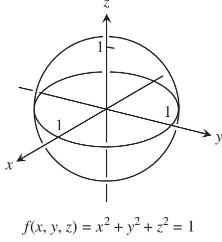


(b)

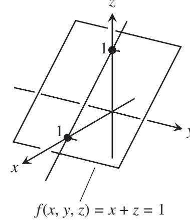


29. $x^2 + y^2 = 10$ **31.** $\tan^{-1} y - \tan^{-1} x = 2\tan^{-1}\sqrt{2}$

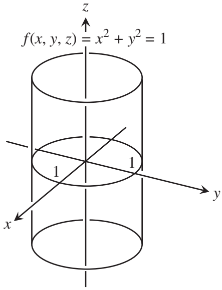
33.



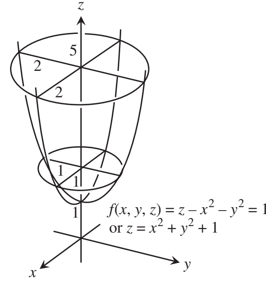
35.



37.



39.



41. $\sqrt{x - y} - \ln z = 2$ **43.** $\dfrac{x + y}{z} = \ln 2$ **45.** Evet, 2000
47. 63 km

Bölüm 14.2, Sayfa 982–984

1. $5/2$ **3.** $2\sqrt{6}$ **5.** 1 **7.** $1/2$ **9.** 1 **11.** 0 **13.** 0
15. -1 **17.** 2 **19.** $1/4$ **21.** $19/12$ **23.** 2 **25.** 3
27. **(a)** Her (x, y) **(b)** $(0, 0)$ hariç her (x, y)
29. **(a)** $x = 0$ veya $y = 0$ hariç her (x, y) **(b)** Her (x, y)
31. **(a)** Her (x, y, z) **(b)** $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin içindekiler hariç her (x, y, z)
33. **(a)** $z \neq 0$ ile her (x, y, z) **(b)** $x^2 + z^2 \neq 1$ ile her (x, y, z)
35. $y = x, x > 0$ boyunca ve $y = x, x < 0$ boyunca olan yolları ele alın
37. k bir sabit olmak üzere $y = kx^2$ yollarını ele alın
39. m bir sabit ve $m \neq -1$ olmak üzere, $y = mx$ yollarını ele alın
41. k bir sabit ve $k \neq 0$ olmak üzere $y = kx^2$ yollarını ele alın
43. Hayır **45.** Limit 1'dir **47.** Limit 0'dır
49. **(a)** $\tan\theta = m$ olmak üzere $f(x, y)|_{y=mx} = \sin 2\theta$ **51.** 0
53. Yoktur **55.** $\pi/2$ **57.** $f(0, 0) = \ln 3$
59. $\delta = 0.1$ **61.** $\delta = 0.005$ **63.** $\delta = \sqrt{0.015}$
65. $\delta = 0.005$

Bölüm 14.3, Sayfa 994–996

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x, \dfrac{\partial f}{\partial y} = -3$ **3.** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x(y + 2), \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2y(xy - 1), \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x(xy - 1)$

7. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

9. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-1}{(x + y)^2}, \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-1}{(x + y)^2}$

11. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-y^2 - 1}{(xy - 1)^2}, \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-x^2 - 1}{(xy - 1)^2}$

13. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y+1}, \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y+1}$ **15.** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x + y}, \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x + y}$

17. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2\sin(x - 3y)\cos(x - 3y),$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -6\sin(x - 3y)\cos(x - 3y)$

19. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$ **21.** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -g(x), \dfrac{\partial f}{\partial y} = g(y)$

23. $f_x = y^2, f_y = 2xy, f_z = -4z$

25. $f_x = 1, f_y = -y(y^2 + z^2)^{-1/2}, f_z = -z(y^2 + z^2)^{-1/2}$

27. $f_x = \dfrac{yz}{\sqrt{1 - x^2y^2z^2}}, f_y = \dfrac{xz}{\sqrt{1 - x^2y^2z^2}}, f_z = \dfrac{xy}{\sqrt{1 - x^2y^2z^2}}$

29. $f_x = \dfrac{1}{x + 2y + 3z}, f_y = \dfrac{2}{x + 2y + 3z}, f_z = \dfrac{3}{x + 2y + 3z}$

31. $f_x = -2xe^{-(x^2+y^2+z^2)}, f_y = -2ye^{-(x^2+y^2+z^2)}, f_z = -2ze^{-(x^2+y^2+z^2)}$

33. $f_x = \operatorname{sech}^2(x + 2y + 3z), f_y = 2\operatorname{sech}^2(x + 2y + 3z),$
$f_z = 3\operatorname{sech}^2(x + 2y + 3z)$

35. $\dfrac{\partial f}{\partial t} = -2\pi\sin(2\pi t - \alpha), \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = \sin(2\pi t - \alpha)$

37. $\dfrac{\partial h}{\partial \rho} = \sin\phi\cos\theta, \dfrac{\partial h}{\partial \phi} = \rho\cos\phi\cos\theta, \dfrac{\partial h}{\partial \theta} = -\rho\sin\phi\sin\theta$

39. $W_P(P, V, \delta, v, g) = V, W_V(P, V, \delta, v, g) = P + \dfrac{\delta v^2}{2g},$

$W_\delta(P, V, \delta, v, g) = \dfrac{Vv^2}{2g}, W_v(P, V, \delta, v, g) = \dfrac{V\delta v}{g},$

$W_g(P, V, \delta, v, g) = -\dfrac{V\delta v^2}{2g^2}$

41. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 + y, \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 + x, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 1$

43. $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2xy + y\cos x, \dfrac{\partial g}{\partial y} = x^2 - \sin y + \sin x,$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2y - y\sin x, \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\cos y,$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y} = 2x + \cos x$

45. $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{1}{x + y}, \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{1}{x + y}, \dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \dfrac{-1}{(x + y)^2}, \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \dfrac{-1}{(x + y)^2},$

$\dfrac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{-1}{(x + y)^2}$

47. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{2}{2x + 3y}, \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{3}{2x + 3y}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{-6}{(2x + 3y)^2}$

49. $\frac{\partial w}{\partial x} = y^2 + 2xy^3 + 3x^2y^4, \frac{\partial w}{\partial y} = 2xy + 3x^2y^2 + 4x^3y^3,$

$\frac{\partial^2 w}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} = 2y + 6xy^2 + 12x^2y^3$

51. **(a)** önce x **(b)** önce y **(c)** önce x
(d) önce x **(e)** önce y **(f)** önce y

53. $f_x(1, 2) = -13, f_y(1, 2) = -2$ **55.** 12 **57.** -2

59. $\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{a}{bc \sin A}, \frac{\partial A}{\partial b} = \frac{c \cos A - b}{bc \sin A}$ **61.** $v_x = \frac{\ln v}{(\ln u)(\ln v) - 1}$

77. Evet

Bölüm 14.4, Sayfa 1003–1005

1. **(a)** $\frac{dw}{dt} = 0,$ **(b)** $\frac{dw}{dt}(\pi) = 0$

3. **(a)** $\frac{dw}{dt} = 1,$ **(b)** $\frac{dw}{dt}(3) = 1$

5. **(a)** $\frac{dw}{dt} = 4t \tan^{-1} t + 1,$ **(b)** $\frac{dw}{dt}(1) = \pi + 1$

7. **(a)** $\frac{\partial z}{\partial u} = 4 \cos v \ln (u \sin v) + 4 \cos v,$
$\frac{\partial z}{\partial v} = -4u \sin v \ln (u \sin v) + \frac{4u \cos^2 v}{\sin v}$

(b) $\frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{2} (\ln 2 + 2), \frac{\partial z}{\partial v} = -2\sqrt{2} (\ln 2 - 2)$

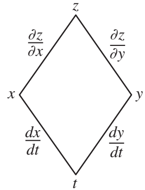
9. **(a)** $\frac{\partial w}{\partial u} = 2u + 4uv, \frac{\partial w}{\partial v} = -2v + 2u^2$

(b) $\frac{\partial w}{\partial u} = 3, \frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{3}{2}$

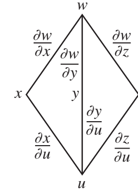
11. **(a)** $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{(z - y)^2}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-y}{(z - y)^2}$

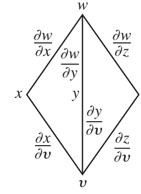
(b) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \frac{\partial u}{\partial z} = -2$

13. $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

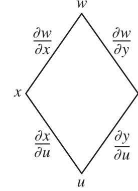


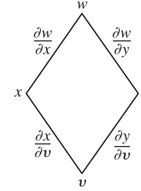
15. $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$
$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$



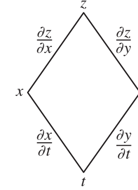


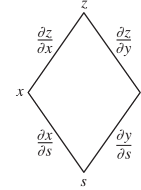
17. $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$



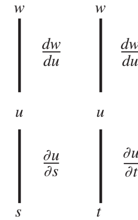


19. $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$



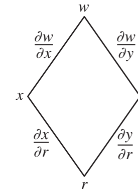


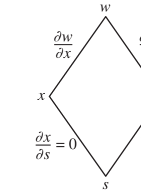
21. $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{du}\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{dw}{du}\frac{\partial u}{\partial t}$



23. $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dr} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dr} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dr}$ olduğundan $\frac{dy}{ds} = 0$

$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{ds}$;olduğundan $\frac{dx}{ds} = 0$





25. $4/3$ **27.** $-4/5$ **29.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{4}$

31. $\frac{\partial z}{\partial x} = -1, \frac{\partial z}{\partial y} = -1$ **33.** 12 **35.** -7

37. $\frac{\partial z}{\partial u} = 2, \frac{\partial z}{\partial v} = 1$ **39.** –0.00005 amps/sn

45. (cos 1, sin 1, 1) ve (cos(–2), sin(–2), –2)

47. (a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ve $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 'de maksimum,

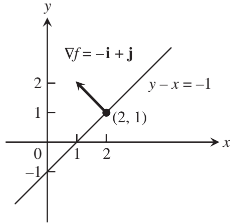
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ve $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$· 'de minimum

(b) Max = 6, min = 2

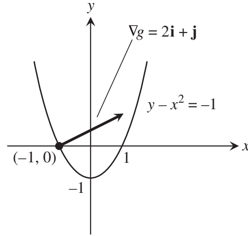
49. $2x\sqrt{x^8 + x^3} + \int_0^{x^2} \frac{3x^2}{2\sqrt{t^4 + x^3}}\, dt$

Bölüm 14.5, Sayfa 1013–1014

1.



3.



5. $\nabla f = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ **7.** $\nabla f = -\frac{26}{27}\mathbf{i} + \frac{23}{54}\mathbf{j} - \frac{23}{54}\mathbf{k}$

9. -4 **11.** 31/13 **13.** 3 **15.** 2

17. $\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}, (D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = \sqrt{2}; -\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j},$

$(D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -\sqrt{2}$

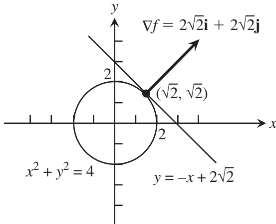
19. $-\frac{\pi}{4}$'te $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{\pi}{4}$'te $\frac{1}{3}\mathbf{k}, (D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = 3\sqrt{3};$

$-\mathbf{u} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{k}, (D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -3\sqrt{3}$

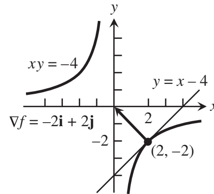
21. $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), (D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = 2\sqrt{3};$

$-\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), (D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -2\sqrt{3}$

23.



25.



27. $\mathbf{u} = \frac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{j}, -\mathbf{u} = -\frac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{j}$

29. Hayır, Değişimin maksimum hızı $\sqrt{185} < 14$ tür.

31. $-\frac{7}{\sqrt{5}}$

Bölüm 14.6, Sayfa 1024–1027

1. (a) $x + y + z = 3$
(b) $x = 1 + 2t, y = 1 + 2t, z = 1 + 2t$

3. (a) $2x - z - 2 = 0$ **(b)** $x = 2 - 4t, y = 0, z = 2 + 2t$

5. (a) $2x + 2y + z - 4 = 0$
(b) $x = 2t, y = 1 + 2t, z = 2 + t$

7. (a) $x + y + z - 1 = 0$ **(b)** $x = t, y = 1 + t, z = t$

9. $2x - z - 2 = 0$ **11.** $x - y + 2z - 1 = 0$

13. $x = 1, y = 1 + 2t, z = 1 - 2t$

15. $x = 1 - 2t, y = 1, z = \frac{1}{2} + 2t$

17. $x = 1 + 90t, y = 1 - 90t, z = 3$

19. $df = \frac{9}{11{,}830} \approx 0.0008$ **21.** $dg = 0$

23. (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3} - \frac{1}{2}\cos\sqrt{3} \approx 0.935°\text{C/ft}$
(b) $\sqrt{3}\sin\sqrt{3} - \cos\sqrt{3} \approx 1.87°\text{C/sec}$

25. (a) $L(x, y) = 1$ **(b)** $L(x, y) = 2x + 2y - 1$

27. (a) $L(x, y) = 3x - 4y + 5$ **(b)** $L(x, y) = 3x - 4y + 5$

29. (a) $L(x, y) = 1 + x$ **(b)** $L(x, y) = -y + \frac{\pi}{2}$

31. $L(x, y) = 7 + x - 6y; 0.06$ **33.** $L(x, y) = x + y + 1; 0.08$

35. $L(x, y) = 1 + x; 0.0222$

37. (a) $L(x, y, z) = 2x + 2y + 2z - 3$ **(b)** $L(x, y, z) = y + z$
(c) $L(x, y, z) = 0$

39. (a) $L(x, y, z) = x$ **(b)** $L(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$
(c) $L(x, y, z) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z$

41. (a) $L(x, y, z) = 2 + x$
(b) $L(x, y, z) = x - y - z + \frac{\pi}{2} + 1$
(c) $L(x, y, z) = x - y - z + \frac{\pi}{2} + 1$

43. $L(x, y, z) = 2x - 6y - 2z + 6, 0.0024$

45. $L(x, y, z) = x + y - z - 1, 0.00135$

47. Maksimum hata (öngörü) büyüklük olarak ≤ 0.31'dir.

49. Maximum yüzde hata = % ± 4.83

51. İki boyuttan küçük olanına daha çok dikkat edin. Daha büyük kısmi türev üretecektir.

53. (a) %0.30 **55.** *f d*'deki değişime daha duyarlıdır.

57. *Q, h*'deki değişime daha duyarlıdır.

61. $-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; 0'da 0; $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Bölüm 14.7, Sayfa 1034–1038

1. $f(-3, 3) = -5$, yerel minimum

3. $f\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = 0$, yerel maksimum **5.** $f(-2, 1)$, eyer noktası

7. $f\left(\frac{6}{5}, \frac{69}{25}\right)$, eyer noktası **9.** $f(2, 1)$, eyer noktası

11. $f(2, -1) = -6$, yerel minimum **13.** $f(1, 2)$, eyer noktası

15. $f(0, 0)$, eyer noktası

17. $f(0, 0)$, saddle point; $f\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{170}{27}$, yerel maksimum

19. $f(0, 0) = 0$, yerel minimum; $f(1, -1)$, eyer noktası

21. $f(0, 0)$, eyer noktası; $f\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{81}$, yerel minimum

23. $f(0, 0)$, eyer noktası; $f(0, 2) = -12$, yerel minimum; $f(-2, 0) = -4$, yerel maksimum; $f(-2, 2)$, eyer noktası

25. $f(0, 0)$, eyer noktası; $f(1, 1) = 2$, $f(-1, -1) = 2$, yerel maksimumlar

27. $f(0, 0) = -1$ yerel maksimum

29. $f(n\pi, 0)$, eyer noktası; $f(n\pi, 0) = 0$ her n için

31. Mutlak maksimum: 1 at (0, 0); mutlak minimum: (1, 2)'de –5

33. Mutlak maksimum: 4 at (0, 2); mutlak minimum: (0, 0)'da 0

35. Mutlak maksimum: 11 at $(0, -3)$; mutlak minimum: (4, –2)'de –10

37. Mutlak maksimum: (2, 0)'da 4; mutlak minimum: $\left(3, -\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(1, -\frac{\pi}{4}\right)$, ve $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$'te $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

39. $a = -3, b = 2$

41. En sıcak: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ve $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$'de $2\frac{1}{4}^\circ$; en soğuk: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$'da $-\frac{1}{4}^\circ$

43. **(a)** $f(0, 0)$, eyer noktası **(b)** $f(1, 2)$, yerel minimum **(c)** $f(1, -2)$, yerel minimum; $f(-1, -2)$, seyer noktası

49. $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{355}{36}\right)$

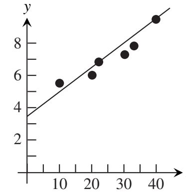
53. **(a)** Yarım çember üzerinde, $t = \pi/4$'te maks $f = 2\sqrt{2}$, $t = \pi$'de min $f = -2$. Çeyrek çemberde, $t = \pi/4$'te maks $f = 2\sqrt{2}$, $t = 0, \pi/2$'de min $f = 2$.
(b) Yarım çember üzerinde, $t = \pi/4$'te maks $g = 2$, $t = 3\pi/4$'te min $g = -2$. Çeyrek çemberde, $t = \pi/4$'te maks $g = 2$, $t = 0, \pi/2$'de min $g = 0$.
(c) Yarım çember üzerinde, $t = 0$'da maks $h = 8$; $t = \pi/2$'de min $h = 4$. Çeyrek çemberde, $t = 0$'da maks $h = 8$, $t = \pi/2$'de min $h = 4$.

55. i) min $f = -1/2$ at $t = -1/2$; no max ii) max $f = 0$ at $t = -1, 0$; min $f = -1/2$ at $t = -1/2$ iii) max $f = 4$ at $t = 1$; min $f = 0$ $t = -1/2$'de min $f = -1/2$; maks yok
ii) $t = -1$, 0'da maks $f = 0$; $t = -1/2$'de min $f = -1/2$
iii) $t = 1$'de max $f = 4$; $t = 0$'da min $f = 0$.

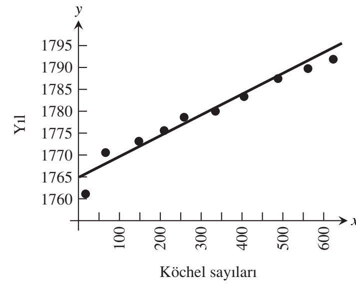
57. $y = -\frac{20}{13}x + \frac{9}{13}$, $y|_{x=4} = -\frac{71}{13}$

59. $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}$, $y|_{x=4} = \frac{37}{6}$

61. $y = 0.122x + 3.59$



63. **(a)**



(b) $y = 0.0427K + 1764.8$ **(c)** 1780

Bölüm 14.8, Sayfa 1047–1049

1. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ **3.** 39 **5.** $\left(3, \pm 3\sqrt{2}\right)$

7. **(a)** 8 **(b)** 64

9. $r = 2$ cm, $h = 4$ cm **11.** Uzunluk $= 4\sqrt{2}$, genişlik $= 3\sqrt{2}$

13. $f(0, 0) = 0$ minimum, $f(2, 4) = 20$ maksimum.

15. En düşük = 0°, en büyük = 125°

17. $\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$ **19.** 1 **21.** $(0, 0, 2), (0, 0, -2)$

23. $f(1, -2, 5) = 30$ maksimum, $f(-1, 2, -5) = -30$ minimum.

25. 3, 3, 3 **27.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ by $\frac{2}{\sqrt{3}}$ by $\frac{2}{\sqrt{3}}$ birim

29. $(\pm 4/3, -4/3, -4/3)$ **31.** $U(8, 14) = \$128$

33. $f(2/3, 4/3, -4/3) = \frac{4}{3}$ **35.** (2, 4, 4)

37. Maksimum $\left(\pm\sqrt{6}, \sqrt{3}, 1\right)$'de $1 + 6\sqrt{3}$, minimum; $\left(\pm\sqrt{6}, -\sqrt{3}, 1\right)$'de $1 - 6\sqrt{3}$

39. Maksimum $(0, 0 \pm 2)$da 4, minimum $\left(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 0\right)$'da 2

Bölüm 14.9, Sayfa 1053–1054

1. **(a)** 0 **(b)** $1 + 2z$ **(c)** $1 + 2z$

3. **(a)** $\frac{\partial U}{\partial P} + \frac{\partial U}{\partial T}\left(\frac{V}{nR}\right)$ **(b)** $\frac{\partial U}{\partial P}\left(\frac{nR}{V}\right) + \frac{\partial U}{\partial T}$

5. **(a)** 5 **(b)** 5

7. $\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta = \cos\theta$

$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Bölüm 14.10, Sayfa 1058–1059

1. Kuadratik: $x + xy$; kübik: $x + xy + \frac{1}{2}xy^2$

3. Kuadratik: xy; kübik: xy

5. Kuadratik: $y + \frac{1}{2}(2xy - y^2)$;

kübik: $y + \frac{1}{2}(2xy - y^2) + \frac{1}{6}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3)$

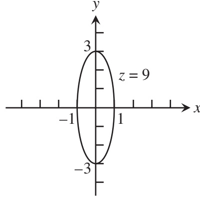
7. Kuadratik: $\frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2) = x^2 + y^2$; kübik: $x^2 + y^2$

9. Kuadratik: $1 + (x + y) + (x + y)^2$;
kübik: $1 + (x + y) + (x + y)^2 + (x + y)^3$

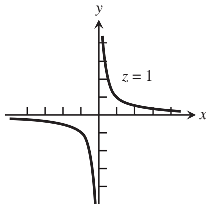
11. Kuadratik: $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$; $E(x, y) \leq 0.00134$

Problemler, Sayfa 1060–1063

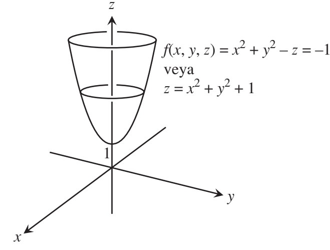
1. Tanım kümesi: xy-düzlemindeki bütün noktalar; değer kümesi: $z \geq 0$. Seviye eğrileri, büyük eksenleri y-ekseninde ve küçük eksenleri x-ekseninde olan elipslerdir.



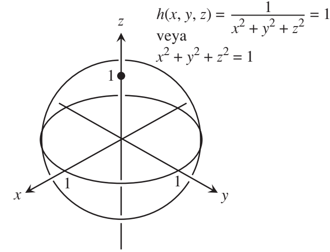
3. Tanım kümesi: $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ olmak üzere her (x, y); değer kümesi: $z \neq 0$. Seviye eğrileri, asimptotları x- ve y-eksenleri olan hiperbollerdir.



5. Tanım kümesi: xyz-uzayının her noktası; değer kümesi: bütün reel sayılar. Seviye yüzeyleri, eksenleri z-ekseni olan dönel paraboloidlerdir.



7. Tanım kümesi: $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ olmak üzere her (x, y, z); değer kümesi: pozitif reel sayılar. Seviye yüzeyleri, merkezleri $(0, 0, 0)$'da olan ve yarıçapı $r > 0$ olan kürelerdir.



9. -2 **11.** $1/2$ **13.** 1 **15.** $y = kx^2, k \neq 1$ olsun.

17. Hayır; $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ yoktur.

19. $\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta + \sin\theta$, $\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta + r\cos\theta$

21. $\frac{\partial f}{\partial R_1} = -\frac{1}{R_1^2}$, $\frac{\partial f}{\partial R_2} = -\frac{1}{R_2^2}$, $\frac{\partial f}{\partial R_3} = -\frac{1}{R_3^2}$

23. $\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{RT}{V}$, $\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{nT}{V}$, $\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{nR}{V}$, $\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}$

25. $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{y^2}$

27. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -30x + \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 1$

29. $\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0} = -1$

31. $\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{(r,s)=(\pi,0)} = 2$, $\left.\frac{\partial w}{\partial s}\right|_{(r,s)=(\pi,0)} = 2 - \pi$

33. $\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=1} = -(\sin 1 + \cos 2)(\sin 1) + (\cos 1 + \cos 2)(\cos 1)$
$- 2(\sin 1 + \cos 1)(\sin 2)$

35. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(0,1)} = -1$

37. $\mathbf{u} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$ yönünde en hızlı artar;

$-\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$; yönünde en hızlı azalır;

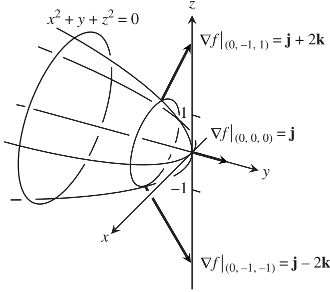
$\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ olmak üzere $D_{\mathbf{u}}f = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $D_{-\mathbf{u}}f = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
$D_{\mathbf{u}_1} f = -\dfrac{7}{10}$

39. $\mathbf{u} = \frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$ yönünde en hızlı artar;
$-\mathbf{u} = -\frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k}$ yönünde en hızlı azalır;
$\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ olmak üzere $D_{\mathbf{u}}f = 7$; $D_{-\mathbf{u}}f = -7$; $D_{\mathbf{u}_1}f = 7$

41. $\pi/\sqrt{2}$

43. **(a)** $f_x(1, 2) = f_y(1, 2) = 2$ **(b)** $14/5$

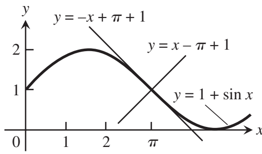
45.



47. Teğet: $4x - y - 5z = 4$; normal doğru: $x = 2 + 4t, y = -1 - t, z = 1 - 5t$

49. $2y - z - 2 = 0$

51. Teğet: $x + y = \pi + 1$; normal doğru: $y = x - \pi + 1$



53. $x = 1 - 2t, y = 1, z = 1/2 + 2t$

55. Cevaplar $|f_{xx}|, |f_{xy}|, |f_{yy}|$ için kullanılan üst sınıra bağlıdır. $M = \sqrt{2}/2$, $|E| \le 0.0142$ olur. $M = 1$, $|E| \le 0.02$ olur.

57. $L(x, y, z) = y - 3z$, $L(x, y, z) = x + y - z - 1$

59. Çapa daha fazla dikkat edin.

61. $dI = \%\ 0.038$; I'daki değişim = % 15.83, voltajdaki değişimi daha duyarlıdır.

63. **(a)** %5

65. (–2, –2)'de – 8 olan yerel minimum

67. (0, 0)'da eyer noktası, $f(0, 0) = 0$; (– 1/2, – 1/2)'de 1/4 olan yerel maksimum

69. (0, 0)'da eyer noktası, $f(0, 0) = 0$; (0, 2)'de – 4 olan yerel minimum; (–2, 0)'da 4 olan yerel maksimum; (–2, 2)'de eyer noktası, $f(-2, 2) = 0$

71. Mutlak maksimum: (0, 4)'te 28; mutlak minimum: (3/2, 0)'da –9/4

73. Mutlak maksimum: (2, –2)'de 18; mutlak minimum: (–2, 1/2)'de –17/4

75. Mutlak maksimum: (–2, 0)'da 8; mutlak minimum: (1, 0)'da –1

77. Mutlak maksimum: (1, 0)'da 4, mutlak minimum: (0, –1)'de – 4

79. Mutlak maksimum: (0, ±1)'de ve (1, 0)'da 1, mutlak minimum: (–1, 0)'da –1

81. Maksimum: (0, 1)'de 5, minimum: (0 –1/3)'te –1/3

83. Maksimum: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$'te $\sqrt{3}$; minimum: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$'te $-\sqrt{3}$

85. Genişlik $= \left(\dfrac{c^2V}{ab}\right)^{1/3}$, Derinlik $= \left(\dfrac{b^2V}{ac}\right)^{1/3}$, Yükseklik $= \left(\dfrac{a^2V}{bc}\right)^{1/3}$

87. Maksimum: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$ ve $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$'de $\frac{3}{2}$
minimum: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$ ve $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$'de $\frac{1}{2}$

89. **(a)** $(2y + x^2z)e^{yz}$ **(b)** $x^2e^{yz}\left(y - \dfrac{z}{2y}\right)$
(c) $(1 + x^2y)e^{yz}$

91. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \cos\theta \dfrac{\partial w}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial w}{\partial y} = \sin\theta\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial w}{\partial\theta}$

97. $(t, -t \pm 4, t)$, t reel bir sayı

Ek ve İleri Alıştırmalar, Sayfa 1063–1066

1. $f_{xy}(0, 0) = -1$, $f_{yx}(0, 0) = 1$

7. **(c)** $\dfrac{r^2}{2} = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ **13.** $V = \dfrac{\sqrt{3}abc}{2}$

17. $f(x, y) = \dfrac{y}{2} + 4$, $g(x, y) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{9}{2}$

19. $y = 2\ln|\sin x| + \ln 2$

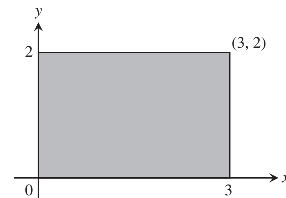
21. **(a)** $\dfrac{1}{\sqrt{53}}(2\mathbf{i} + 7\mathbf{j})$ **(b)** $\dfrac{-1}{\sqrt{29{,}097}}(98\mathbf{i} - 127\mathbf{j} + 58\mathbf{k})$

23. $w = e^{-c^2\pi^2t}\sin\pi x$

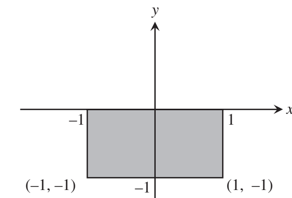
BÖLÜM 15

Bölüm 15.1, Sayfa 1079–1081

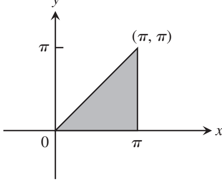
1. 16



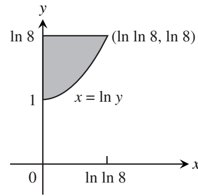
3. 1



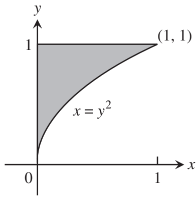
5. $\dfrac{\pi^2}{2} + 2$



7. $8 \ln 8 - 16 + e$

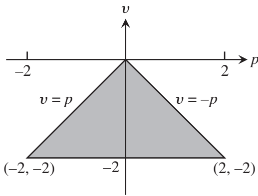


9. $e - 2$

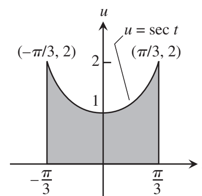


11. $\dfrac{3}{2} \ln 2$ **13.** $1/6$ **15.** $-1/10$

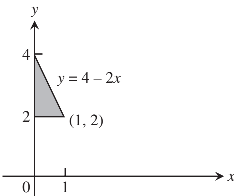
17. 8



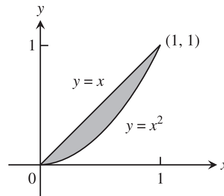
19. 2π



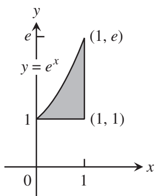
21. $\displaystyle\int_2^4 \int_0^{(4-y)/2} dx\, dy$



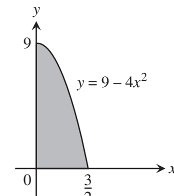
23. $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\, dx$



25. $\displaystyle\int_1^e \int_{\ln y}^{1} dx\, dy$

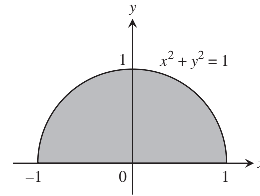


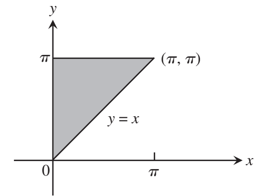
27. $\displaystyle\int_0^9 \int_0^{\left(\sqrt{9-y}\right)/2} 16x\, dx\, dy$



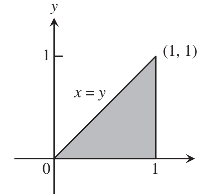
29. $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3y\, dy\, dx$

31. 2

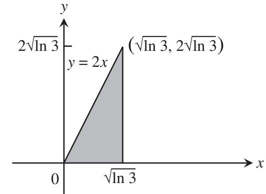




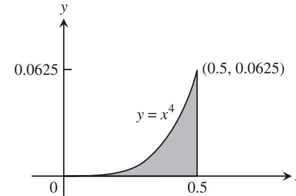
33. $\dfrac{e-2}{2}$



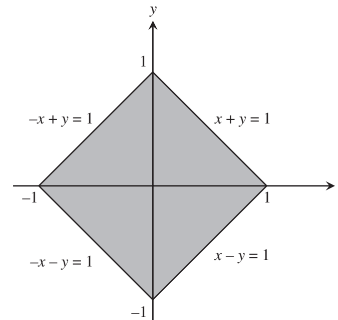
35. 2



37. $1/(80\pi)$



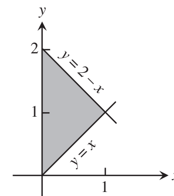
39. $-2/3$



41. $4/3$ **43.** $625/12$ **45.** 16 **47.** 20 **49.** $2(1 + \ln 2)$

51. 1 **53.** π^2 **55.** $-\dfrac{3}{32}$ **57.** $\dfrac{20\sqrt{3}}{9}$

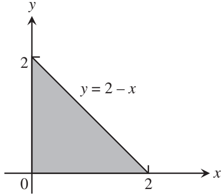
59. $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx = \frac{4}{3}$



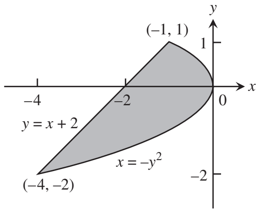
61. R, $x^2 + 2y^2 < 4$'ü sağlayan (x, y) noktalarının kümesidir.
63. Hayır, Fubini Teoremine göre, iki integrasyon sırasının aynı sonucu vermesi gerekir.
67. 0.603 **69.** 0.233

Bölüm 15.2, Sayfa 1089–1091

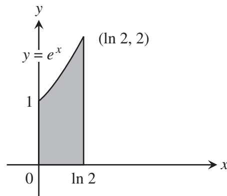
1. $\int_0^2 \int_0^{2-x} dy\, dx = 2$ or $\int_0^2 \int_0^{2-y} dx\, dy = 2$



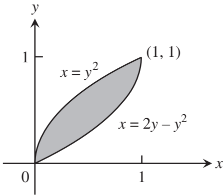
3. $\int_{-2}^{1} \int_{y-2}^{-y^2} dx\, dy = \frac{9}{2}$



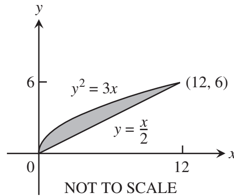
5. $\int_0^{\ln 2} \int_0^{e^x} dy\, dx = 1$



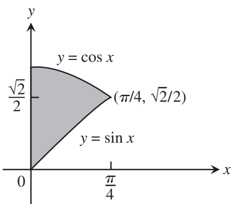
7. $\int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} dx\, dy = \frac{1}{3}$



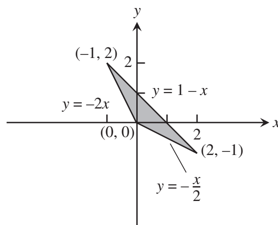
9. 12



11. $\sqrt{2} - 1$



13. $\frac{3}{2}$



15. **(a)** 0 **(b)** $4/\pi^2$ **17.** $8/3$ **19.** $\bar{x} = 5/14, \bar{y} = 38/35$
21. $\bar{x} = 64/35, \bar{y} = 5/7$ **23.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = 4/(3\pi)$
25. $\bar{x} = \bar{y} = 4a/(3\pi)$ **27.** $I_x = I_y = 4\pi, I_0 = 8\pi$
29. $\bar{x} = -1, \bar{y} = 1/4$ **31.** $I_x = 64/105, R_x = 2\sqrt{2/7}$
33. $\bar{x} = 3/8, \bar{y} = 17/16$
35. $\bar{x} = 11/3, \bar{y} = 14/27, I_y = 432, R_y = 4$
37. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 13/31, I_y = 7/5, R_y = \sqrt{21/31}$
39. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 7/10; I_x = 9/10, I_y = 3/10, I_0 = 6/5;$
$R_x = 3\sqrt{6}/10, R_y = 3\sqrt{2}/10, R_0 = 3\sqrt{2}/5$
41. $40{,}000(1 - e^{-2})\ln(7/2) \approx 43{,}329$
43. $0 < a \le 5/2$ ise, düşmesi için aletin 45°'den daha fazla döndürülmesi gerekir.
45. $(\bar{x}, \bar{y}) = (2/\pi, 0)$ **47.** **(a)** $3/2$ **(b)** Aynıdırlar
53. **(a)** $(7/5, 31/10)$ **(b)** $(19/7, 18/7)$ **(c)** $(9/2, 19/8)$ **(d)** $(11/4, 43/16)$
55. k.m.'nin ortak sınırda olması için, $h = a\sqrt{2}$'dir. k.m.'nin T'nin içinde olması için, $h = a\sqrt{2}$'dir.

Bölüm 15.3, Sayfa 1097–1098

1. $\pi/2$ **3.** $\pi/8$ **5.** πa^2 **7.** 36 **9.** $(1 - \ln 2)\pi$
11. $(2\ln 2 - 1)(\pi/2)$ **13.** $(\pi/2) + 1$ **15.** $\pi(\ln 4 - 1)$
17. $2(\pi - 1)$ **19.** 12π **21.** $(3\pi/8) + 1$ **23.** 4
25. $6\sqrt{3} - 2\pi$ **27.** $\bar{x} = 5/6, \bar{y} = 0$ **29.** $\frac{2a}{3}$ **31.** $\frac{2a}{3}$
33. $2\pi\left(2 - \sqrt{e}\right)$ **35.** $\frac{4}{3} + \frac{5\pi}{8}$ **37.** **(a)** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ **(b)** 1
39. $\pi \ln 4$, no **41.** $\frac{1}{2}(a^2 + 2h^2)$

Bölüm 15.4, Sayfa 1106–1109

1. $1/6$

3. $\int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{3-3x-3y/2} dz\, dy\, dx$, $\int_0^2 \int_0^{1-y/2} \int_0^{3-3x-3y/2} dz\, dx\, dy$,
$\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{2-2x-2z/3} dy\, dz\, dx$, $\int_0^3 \int_0^{1-z/3} \int_0^{2-2x-2z/3} dy\, dx\, dz$,
$\int_0^2 \int_0^{3-3y/2} \int_0^{1-y/2-z/3} dx\, dz\, dy$,
$\int_0^3 \int_0^{2-2z/3} \int_0^{1-y/2-z/3} dx\, dy\, dz$.
Altı integralin de değeri 1 dir.

5. $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\, dz\, dx\, dy$, $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\, dz\, dx\, dy$,
$\int_{-2}^{2} \int_4^{8-y^2} \int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} 1\, dx\, dz\, dy + \int_{-2}^{2} \int_{y^2}^{4} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} 1\, dx\, dz\, dy$,
$\int_4^8 \int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}} \int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} 1\, dx\, dy\, dz + \int_0^4 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} 1\, dx\, dy\, dz$,
$\int_{-2}^{2} \int_4^{8-x^2} \int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} 1\, dy\, dz\, dx + \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1\, dy\, dz\, dx$,

$$\int_4^8 \int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}} \int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} 1\, dy\, dx\, dz + \int_0^4 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1\, dy\, dx\, dz.$$

Altı integralin de değeri 16π dir.

7. 1 **9.** 1 **11.** $\frac{\pi^3}{2}(1 - \cos 1)$ **13.** 18 **15.** 7/6

17. 0 **19.** $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$

21. **(a)** $\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\int_{x^2}^{1-z} dy\, dz\, dx$ **(b)** $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}}\int_{x^2}^{1-z} dy\, dx\, dz$

(c) $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\, dy\, dz$ **(d)** $\int_0^1\int_0^{1-y}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\, dz\, dy$

(e) $\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_0^{1-y} dz\, dx\, dy$

23. 2/3 **25.** 20/3 **27.** 1 **29.** 16/3 **31.** $8\pi - \frac{32}{3}$

33. 2 **35.** 4π **37.** 31/3 **39.** 1 **41.** 2 sin 4 **43.** 4

45. $a = 3$ or $a = 13/3$

47. Tanım kümesi, $4x^2 + 4y^2 + z^2 \le 4$'ü sağlayan bütün (x, y, z) noktalarıdır.

Bölüm 15.5, Sayfa 1112–1114

1. $R_x = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{12}}, R_y = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{12}}, R_z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{12}}$

3. $I_x = \frac{M}{3}(b^2 + c^2), I_y = \frac{M}{3}(a^2 + c^2), I_z = \frac{M}{3}(a^2 + b^2)$

5. $\bar{x} = \bar{y} = 0, \bar{z} = 12/5, I_x = 7904/105 \approx 75.28,$
$I_y = 4832/63 \approx 76.70, I_z = 256/45 \approx 5.69$

7. **(a)** $\bar{x} = \bar{y} = 0, \bar{z} = 8/3$ **(b)** $c = 2\sqrt{2}$

9. $I_L = 1386, R_L = \sqrt{\frac{77}{2}}$ **11.** $I_L = \frac{40}{3}, R_L = \sqrt{\frac{5}{3}}$

13. **(a)** 4/3 **(b)** $\bar{x} = 4/5, \bar{y} = \bar{z} = 2/5$

15. **(a)** 5/2 **(b)** $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 8/15$ **(c)** $I_x = I_y = I_z = 11/6$

(d) $R_x = R_y = R_z = \sqrt{\frac{11}{15}}$ **17.** 3 **19.** **(a)** $\frac{4}{3}g$ **(b)** $\frac{4}{3}g$

23. **(a)** $I_{\text{c.m.}} = \frac{abc(a^2 + b^2)}{12}, R_{\text{c.m.}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{12}}$

(b) $I_L = \frac{abc(a^2 + 7b^2)}{3}, R_L = \sqrt{\frac{a^2 + 7b^2}{3}}$

27. **(a)** $h = a\sqrt{3}$ **(b)** $h = a\sqrt{2}$

Bölüm 15.6, Sayfa 1124–1128

1. $\frac{4\pi(\sqrt{2} - 1)}{3}$ **3.** $\frac{17\pi}{5}$ **5.** $\pi(6\sqrt{2} - 8)$ **7.** $\frac{3\pi}{10}$

9. $\pi/3$

11. **(a)** $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta$

(b) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^1 r\, dr\, dz\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{3}}^{2}\int_0^{\sqrt{4-z^2}} r\, dr\, dz\, d\theta$

(c) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-r^2}}\int_0^{2\pi} r\, d\theta\, dz\, dr$

13. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\int_0^{3r^2} f(r, \theta, z)\, dz\, r\, dr\, d\theta$

15. $\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_0^{4-r\sin\theta} f(r, \theta, z)\, dz\, r\, dr\, d\theta$

17. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_1^{1+\cos\theta}\int_0^{4} f(r, \theta, z)\, dz\, r\, dr\, d\theta$

19. $\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\theta}\int_0^{2-r\sin\theta} f(r, \theta, z)\, dz\, r\, dr\, d\theta$ **21.** π^2 **23.** $\pi/3$

25. 5π **27.** 2π **29.** $\left(\frac{8 - 5\sqrt{2}}{2}\right)\pi$

31. **(a)** $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{2} \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta +$
$\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^{\csc\phi} \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

(b) $\int_0^{2\pi}\int_1^{2}\int_{\pi/6}^{\sin^{-1}(1/\rho)} \rho^2 \sin\phi\, d\phi\, d\rho\, d\theta +$
$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{\pi/6} \rho^2 \sin\phi\, d\phi\, d\rho\, d\theta$

33. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_{\cos\phi}^{2} \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \frac{31\pi}{6}$

35. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1-\cos\phi} \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \frac{8\pi}{3}$

37. $\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\phi} \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \frac{\pi}{3}$

39. **(a)** $8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2} \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

(b) $8\int_0^{\pi/2}\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta$

(c) $8\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$

41. (a) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\phi}^{2}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

(b) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$

(c) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$ **(d)** $5\pi/3$

43. $8\pi/3$ **45.** $9/4$ **47.** $\dfrac{3\pi-4}{18}$ **49.** $\dfrac{2\pi a^3}{3}$ **51.** $5\pi/3$

53. $\pi/2$ **55.** $\dfrac{4(2\sqrt{2}-1)\pi}{3}$ **57.** 16π **59.** $5\pi/2$

61. $\dfrac{4\pi(8-3\sqrt{3})}{3}$ **63.** $2/3$ **65.** $3/4$

67. $\bar{x}=\bar{y}=0, \bar{z}=3/8$ **69.** $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,3/8)$

71. $\bar{x}=\bar{y}=0, \bar{z}=5/6$ **73.** $I_z=30\pi, R_z=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

75. $I_x=\pi/4$ **77.** $\dfrac{a^4h\pi}{10}$

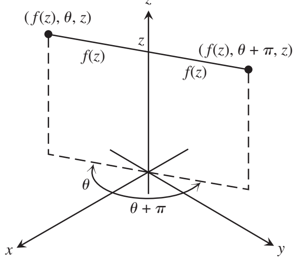
79. (a) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(0,0,\dfrac{4}{5}\right), I_z=\dfrac{\pi}{12}, R_z=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

(b) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(0,0,\dfrac{5}{6}\right), I_z=\dfrac{\pi}{14}, R_z=\sqrt{\dfrac{5}{14}}$

83. $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(0,0,\dfrac{2h^2+3h}{3h+6}\right), I_z=\dfrac{\pi a^4(h^2+2h)}{4}, R_z=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

85. $\dfrac{3M}{\pi R^3}$

89. Yüzeyin $r=f(z)$ denklemi, (r,θ,z) noktasının her θ için yüzey üzerinde olacağını söylemektedir. Özel olarak, $(f(z),\theta,z)$ yüzey üzerinde oldukça $(f(z),\theta+\pi,z)$ da yüzey üzerindedir. Dolayısıyla yüzey z-eksenine göre simetriktir.



Bölüm 15.7, Sayfa 1135–1137

1. (a) $x=\dfrac{u+v}{3}, y=\dfrac{v-2u}{3}; \dfrac{1}{3}$
(b) Sınırları $u=0$, $v=0$ ve $u+v=3$ olan üçgen bölge

3. (a) $x=\dfrac{1}{5}(2u-v), y=\dfrac{1}{10}(3v-u); \dfrac{1}{10}$
(b) Sınırları $3v=u$, $v=2u$ ve $3u+v=10$ olan üçgen bölge

7. $64/5$ **9.** $\int_1^2\int_1^3 (u+v)\dfrac{2u}{v}\,du\,dv = 8+\dfrac{52}{3}\ln 2$

11. $\dfrac{\pi ab(a^2+b^2)}{4}$ **13.** $\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{3}{e^2}\right)\approx 0.4687$

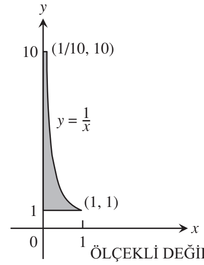
15. (a) $\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix} = u\cos^2 v + u\sin^2 v = u$

(b) $\begin{vmatrix}\sin v & u\cos v\\ \cos v & -u\sin v\end{vmatrix} = -u\sin^2 v - u\cos^2 v = -u$

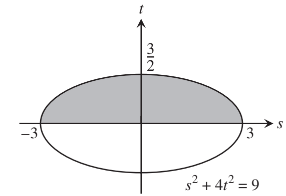
19. 12 **21.** $\dfrac{a^2b^2c^2}{6}$

Problemler, Sayfa 1138–1140

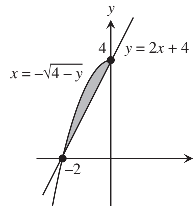
1. $9e-9$



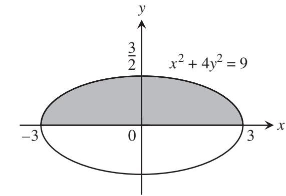
3. $9/2$



5. $\int_{-2}^{0}\int_{2x+4}^{4-x^2} dy\,dx = \dfrac{4}{3}$



7. $\int_{-3}^{3}\int_0^{(1/2)\sqrt{9-x^2}} y\,dy\,dx = \dfrac{9}{2}$



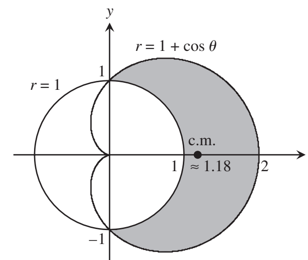
9. $\sin 4$ **11.** $\dfrac{\ln 17}{4}$ **13.** $4/3$ **15.** $4/3$ **17.** $1/4$

19. $\bar{x}=\bar{y}=\dfrac{1}{2-\ln 4}$ **21.** $I_0=104$ **23.** $I_x=2\delta, R_x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

25. $M=4, M_x=0, M_y=0$ **27.** π **29.** $\bar{x}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}, \bar{y}=0$

31. (a) $\bar{x}=\dfrac{15\pi+32}{6\pi+48}, \bar{y}=0$

(b)



33. $\frac{\pi - 2}{4}$ **35.** 0 **37.** $8/35$ **39.** $\pi/2$ **41.** $\frac{2(31 - 3^{5/2})}{3}$

43. **(a)** $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 3\,dz\,dx\,dy$

(b) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^2 3\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$ **(c)** $2\pi(8 - 4\sqrt{2})$

45. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\phi}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{\pi}{3}$

47. $\int_0^1\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2xy\,dz\,dy\,dx$

$+ \int_1^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3-x^2}}\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2xy\,dz\,dy\,dx$

49. **(a)** $\frac{8\pi(4\sqrt{2} - 5)}{3}$ **(b)** $\frac{8\pi(4\sqrt{2} - 5)}{3}$

51. $I_z = \frac{8\pi\delta(b^5 - a^5)}{15}$

Ek ve İleri Alıştırmalar, Sayfa 1140–1142

1. **(a)** $\int_{-3}^{2}\int_{x}^{6-x^2} x^2\,dy\,dx$ **(b)** $\int_{-3}^{2}\int_{x}^{6-x^2}\int_0^{x^2} dz\,dy\,dx$

(c) $125/4$

3. 2π **5.** $3\pi/2$ **7.** **(a)** Delik yarıçapı = 1, küre yarıçapı = 2

(b) $4\sqrt{3}\pi$ **9.** $\pi/4$ **11.** $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ **15.** $1/\sqrt[4]{3}$

17. Kütle = $a^2\cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - b\sqrt{a^2 - b^2}$,

$I_0 = \frac{a^4}{2}\cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{b^3}{2}\sqrt{a^2 - b^2} - \frac{b^3}{6}(a^2 - b^2)^{3/2}$

19. $\frac{1}{ab}(e^{a^2b^2} - 1)$ **21.** **(b)** 1 **(c)** 0

25. $h = \sqrt{20}$ inç $h = \sqrt{60}$ inç **27.** $2\pi\left[\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

BÖLÜM 16

Bölüm 16.1, Sayfa 1147–1149

1. (c) Grafiği **3.** (g) Grafiği **5.** (d) Grafiği **7.** (f) Grafiği

9. $\sqrt{2}$ **11.** $\frac{13}{2}$ **13.** $3\sqrt{14}$ **15.** $\frac{1}{6}(5\sqrt{5} + 9)$

17. $\sqrt{3}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ **19.** $\frac{10\sqrt{5} - 2}{3}$ **21.** 8 **23.** $2\sqrt{2} - 1$

25. **(a)** $4\sqrt{2} - 2$ **(b)** $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$

27. $I_z = 2\pi\delta a^3$, $R_z = a$

29. **(a)** $I_z = 2\pi\sqrt{2}\delta$, $R_z = 1$ **(b)** $I_z = 4\pi\sqrt{2}\delta$, $R_z = 1$

31. $I_x = 2\pi - 2$, $R_x = 1$

Bölüm 16.2, Sayfa 1158–1160

1. $\nabla f = -(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$

3. $\nabla g = -\left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$

5. $\mathbf{F} = -\frac{kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{i} - \frac{ky}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{j}$, herhangi bir $k > 0$

7. **(a)** $9/2$ **(b)** $13/3$ **(c)** $9/2$

9. **(a)** $1/3$ **(b)** $-1/5$ **(c)** 0

11. **(a)** 2 **(b)** $3/2$ **(c)** $1/2$

13. $1/2$ **15.** $-\pi$ **17.** $69/4$ **19.** $-39/2$ **21.** $25/6$

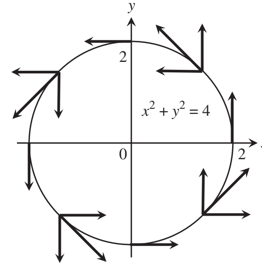
23. **(a)** Dolaşım$_1$ = 0, dolaşım$_2$ = 2π, akı$_1$ = 2π, akı$_2$ = 0

(b) Dolaşım$_1$ = 0, dolaşım$_2$ = 8π, akı$_1$ = 8π, akı$_2$ = 0

25. Dolaşım = 0, akı = $a^2\pi$, **27.** Dolaşım = $a^2\pi$, akı = 0

29. **(a)** $-\frac{\pi}{2}$ **(b)** 0 **(c)** 1

31.



33. **(a)** $\mathbf{G} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ **(b)** $\mathbf{G} = \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{F}$

35. $\mathbf{F} = -\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ **37.** 48 **39.** π **41.** 0 **43.** $\frac{1}{2}$

Bölüm 16.3, Sayfa 1168–1169

1. Korunmalı **3.** Korunmalı değil **5.** Korunmalı değil

7. $f(x, y, z) = x^2 + \frac{3y^2}{2} + 2z^2 + C$

9. $f(x, y, z) = xe^{y+2z} + C$

11. $f(x, y, z) = x\ln x - x + \tan(x + y) + \frac{1}{2}\ln(y^2 + z^2) + C$

13. 49 **15.** -16 **17.** 1 **19.** $9\ln 2$ **21.** 0 **23.** -3

27. $\mathbf{F} = \nabla\left(\frac{x^2 - 1}{y}\right)$ **29.** **(a)** 1 **(b)** 1 **(c)** 1

31. **(a)** 2 **(b)** 2 **33.** **(a)** $c = b = 2a$ **(b)** $c = b = 2$

35. Hangi yolu kullandığınız fark etmez. İş her yolda aynı olacaktır, çünkü alan korunmalıdır.

37. Alan korunmalıdır çünkü M, N ve P'nin bütün kısmi türevleri

sıfırdır. $f(x, y, z) = ax + by + cz + C$; $A = (xa, ya, za)$ ve $B = (xb, yb, zb)$. Bu nedenle, $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A) = a(xb - xa) + b(yb - ya) + c(zb - za) = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Bölüm 16.4, Sayfa 1179–1181

1. Akı = 0, dolaşım = $2\pi a^2$ **3.** Akı = $-\pi a^2$, dolaşım = 0
5. Akı = 2, dolaşım = 0 **7.** Akı = –9, dolaşım = 9
9. Akı = 1/2, dolaşım = 1/2 **11.** Akı = 1/5, dolaşım = –1/12
13. 0 **15.** 2/33 **17.** 0 **19.** -16π **21.** πa^2 **23.** $\frac{3}{8}\pi$
25. (a) C saat yönünün tersine izlenirse 4π
(b) $(h - k)$(bölgenin alanı) **35. (a)** 0

Bölüm 16.5, Sayfa 1190–1192

1. $\frac{13}{3}\pi$ **3.** 4 **5.** $6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$ **7.** $\pi\sqrt{c^2 + 1}$
9. $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)$ **11.** $3 + 2\ln 2$ **13.** $9a^3$
15. $\frac{abc}{4}(ab + ac + bc)$ **17.** 2 **19.** 18 **21.** $\frac{\pi a^3}{6}$
23. $\frac{\pi a^2}{4}$ **25.** $\frac{\pi a^3}{2}$ **27.** -32 **29.** -4 **31.** $3a^4$
33. $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$
35. $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$, $I_z = \frac{15\pi\sqrt{2}}{2}\delta$, $R_z = \frac{\sqrt{10}}{2}$
37. (a) $\frac{8\pi}{3}a^4\delta$ **(b)** $\frac{20\pi}{3}a^4\delta$ **39.** $\frac{\pi}{6}\left(13\sqrt{13} - 1\right)$
41. $5\pi\sqrt{2}$ **43.** $\frac{2}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$

Bölüm 16.6, Sayfa 1199–1201

1. $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r^2\mathbf{k}$, $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$
3. $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + (r/2)\mathbf{k}$, $0 \le r \le 6$, $0 \le \theta \le \pi/2$
5. $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9 - r^2}\,\mathbf{k}$, $0 \le r \le 3\sqrt{2}/2$, $0 \le \theta \le 2\pi$; Ayrıca: $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (3\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (3\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (3\cos\phi)\mathbf{k}$, $0 \le \phi \le \pi/4$, $0 \le \theta \le 2\pi$
7. $\mathbf{r}(\phi, \theta) = \left(\sqrt{3}\sin\phi\cos\theta\right)\mathbf{i} + \left(\sqrt{3}\sin\phi\sin\theta\right)\mathbf{j} + \left(\sqrt{3}\cos\phi\right)\mathbf{k}$, $\pi/3 \le \phi \le 2\pi/3$, $0 \le \theta \le 2\pi$
9. $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (4 - y^2)\mathbf{k}$, $0 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$
11. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + (3\cos v)\mathbf{j} + (3\sin v)\mathbf{k}$, $0 \le u \le 3$, $0 \le v \le 2\pi$
13. (a) $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + (1 - r\cos\theta - r\sin\theta)\mathbf{k}$, $0 \le r \le 3$, $0 \le \theta \le 2\pi$
(b) $\mathbf{r}(u, v) = (1 - u\cos v - u\sin v)\mathbf{i} + (u\cos v)\mathbf{j} + (u\sin v)\mathbf{k}$, $0 \le u \le 3$, $0 \le v \le 2\pi$
15. $\mathbf{r}(u, v) = (4\cos^2 v)\mathbf{i} + u\mathbf{j} + (4\cos v\sin v)\mathbf{k}$, $0 \le u \le 3$, $-(\pi/2) \le v \le (\pi/2)$; Başka bir yol: $\mathbf{r}(u, v) = (2 + 2\cos v)\mathbf{i} + u\mathbf{j} + (2\sin v)\mathbf{k}$, $0 \le u \le 3$, $0 \le v \le 2\pi$

17. $\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{5}}{2} r\,dr\,d\theta = \frac{\pi\sqrt{5}}{2}$

19. $\int_0^{2\pi}\int_1^3 r\sqrt{5}\,dr\,d\theta = 8\pi\sqrt{5}$ **21.** $\int_0^{2\pi}\int_1^4 1\,du\,dv = 6\pi$

23. $\int_0^{2\pi}\int_0^1 u\sqrt{4u^2 + 1}\,du\,dv = \frac{\left(5\sqrt{5} - 1\right)}{6}\pi$

25. $\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi} 2\sin\phi\,d\phi\,d\theta = \left(4 + 2\sqrt{2}\right)\pi$

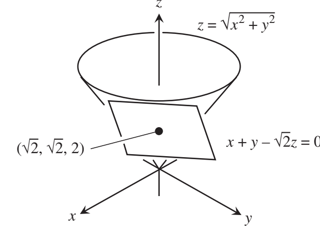
27. $\iint_S x\,d\sigma = \int_0^3\int_0^2 u\sqrt{4u^2 + 1}\,du\,dv = \frac{17\sqrt{17} - 1}{4}$

29. $\iint_S x^2\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\phi\cos^2\theta\,d\phi\,d\theta = \frac{4\pi}{3}$

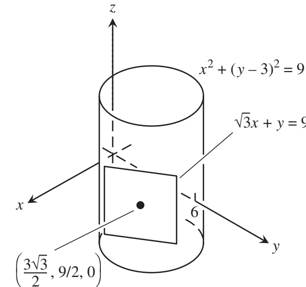
31. $\iint_S z\,d\sigma = \int_0^1\int_0^1 (4 - u - v)\sqrt{3}\,dv\,du = 3\sqrt{3}$
(for $x = u, y = v$)

33. $\iint_S x^2\sqrt{5 - 4z}\,d\sigma = \int_0^1\int_0^{2\pi} u^2\cos^2 v\cdot\sqrt{4u^2 + 1}\cdot u\sqrt{4u^2 + 1}\,dv\,du = \int_0^1\int_0^{2\pi} u^3(4u^2 + 1)\cos^2 v\,dv\,du = \frac{11\pi}{12}$

35. -32 **37.** $\pi a^3/6$ **39.** $13a^4/6$ **41.** $2\pi/3$ **43.** $-73\pi/6$
45. $(a/2, a/2, a/2)$ **47.** $8\delta\pi a^4/3$
49.



51.



55. (b) $A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [a^2b^2\sin^2\phi\cos^2\phi + b^2c^2\cos^4\phi\cos^2\theta + a^2c^2\cos^4\phi\sin^2\theta]^{1/2}\,d\phi\,d\theta$
57. $x_0x + y_0y = 25$

Bölüm 16.7, Sayfa 1209–1211

1. 4π **3.** $-5/6$ **5.** 0 **7.** -6π **9.** $2\pi a^2$ **13.** 12π
15. $-\pi/4$ **17.** -15π **25.** $16I_y + 16I_x$

Bölüm 16.8, Sayfa 1220–1222

1. 0 **3.** 0 **5.** -16 **7.** -8π **9.** 3π **11.** $-40/3$
13. 12π **15.** $12\pi(4\sqrt{2} - 1)$
21. İntegralin değeri hiçbir zaman S'nin yüzey alanını geçmez.

Problemler, Sayfa 1223–1226

1. Yol 1: $2\sqrt{3}$; yol 2: $1 + 3\sqrt{2}$ **3.** $4a^2$ **5.** 0
7. $8\pi \sin(1)$ **9.** 0 **11.** $\pi\sqrt{3}$ **13.** $2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
15. $\frac{abc}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$ **17.** 50
19. $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (6 \sin\phi \cos\theta)\mathbf{i} + (6 \sin\phi \sin\theta)\mathbf{j} + (6\cos\phi)\mathbf{k}$, $\frac{\pi}{6} \le \phi \le \frac{2\pi}{3}, 0 \le \theta \le 2\pi$
21. $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + (1 + r)\mathbf{k}, 0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi$
23. $\mathbf{r}(u, v) = (u\cos v)\mathbf{i} + 2u^2\mathbf{j} + (u\sin v)\mathbf{k}, 0 \le u \le 1, 0 \le v \le \pi$
25. $\sqrt{6}$ **27.** $\pi\left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]$ **29.** Korunmalı
31. Korunmalı değil **33.** $f(x, y, z) = y^2 + yz + 2x + z$
35. Yol 1: 2; yol 2: 8/3 **37.** **(a)** $1 - e^{-2\pi}$ **(b)** $1 - e^{-2\pi}$
39. 0 **41.** **(a)** $4\sqrt{2} - 2$ **(b)** $\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$
43. $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(1, \frac{16}{15}, \frac{2}{3}\right); I_x = \frac{232}{45}, I_y = \frac{64}{15}, I_z = \frac{56}{9};$ $R_x = \frac{2\sqrt{29}}{3\sqrt{5}}, R_y = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{15}}, R_z = \frac{2\sqrt{7}}{3}$
45. $\bar{z} = \frac{3}{2}, I_z = \frac{7\sqrt{3}}{3}, R_z = \sqrt{\frac{7}{3}}$
47. $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 49/12), I_z = 640\pi, R_z = 2\sqrt{2}$
49. Akı: 3/2; dolaşım: $-1/2$ **53.** 3 **55.** $\frac{2\pi}{3}\left(7 - 8\sqrt{2}\right)$
57. 0 **59.** π

Ek ve İleri Alıştırmalar, Sayfa 1226–1228

1. 6π **3.** 2/3
5. **(a)** $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ **(b)** $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{k}$
(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i}$
7. $\frac{16\pi R^3}{3}$ **9.** $a = 2, b = 1$. Minimum akı -4.
11. **(b)** $\frac{16}{3}g$
(c) $\text{Work} = \left(\int_C gxy\, ds\right)\bar{y} = g\int_C xy^2\, ds = \frac{16}{3}g$
13. **(c)** $\frac{4}{3}\pi w$ **19.** $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ise yanlış

EKLER

Ek E.5

1. **(a)** (14, 8) **(b)** $(-1, 8)$ **(c)** $(0, -5)$
3. **(a)** z'yi reel eksene göre yansıtarak
(b) z'yi sanal eksene göre yansıtarak
(c) z'yi reel eksene göre yansıtıp, vektörün boyunu $1/|z|^2$ ile Çarparak
5. **(a)** $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin üzerindeki noktalar
(b) $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin içindeki noktalar
(c) $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin dışındaki noktalar
7. 1 yarıçaplı, merkezi (–1, 0)'daki bir çemberin üzerindeki noktalar
9. $y = -x$ doğrusu üzerindeki noktalar **11.** $4e^{2\pi i/3}$ **13.** $1e^{2\pi i/3}$
15. $\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$ **17.** $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
19. $2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$ **21.** $\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$
23. $1 \pm \sqrt{3}i, -1 \pm \sqrt{3}i$

İNDEKS

Not: italik sayılar şekilleri "t"ler tabloları; "e"ler alıştırmaları göstermektedir.

KISA BİR İNTEGRAL TABLOSU

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \neq 1, \quad a > 0$

3. $\int \cos u\,du = \sin u + C$

4. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

5. $\int (ax+b)^n\,dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad n \neq -1$

6. $\int (ax+b)^{-1}\,dx = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

7. $\int x(ax+b)^n\,dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a^2}\left[\dfrac{ax+b}{n+2} - \dfrac{b}{n+1}\right] + C, \quad n \neq -1, -2$

8. $\int x(ax+b)^{-1}\,dx = \dfrac{x}{a} - \dfrac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$

9. $\int x(ax+b)^{-2}\,dx = \dfrac{1}{a^2}\left[\ln|ax+b| + \dfrac{b}{ax+b}\right] + C$

10. $\int \dfrac{dx}{x(ax+b)} = \dfrac{1}{b}\ln\left|\dfrac{x}{ax+b}\right| + C$

11. $\int \left(\sqrt{ax+b}\right)^n dx = \dfrac{2}{a}\dfrac{\left(\sqrt{ax+b}\right)^{n+2}}{n+2} + C, \quad n \neq -2$

12. $\int \dfrac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

13. **(a)** $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax-b}} = \dfrac{2}{\sqrt{b}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{ax-b}{b}} + C$ **(b)** $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C$

14. $\int \dfrac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\,dx = -\dfrac{\sqrt{ax+b}}{x} + \dfrac{a}{2}\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$

15. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\dfrac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \dfrac{a}{2b}\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$

16. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} + C$

17. $\int \dfrac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \dfrac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \dfrac{1}{2a^3}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} + C$

18. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right| + C$

19. $\int \dfrac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \dfrac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \dfrac{1}{4a^3}\ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right| + C$

20. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}\dfrac{x}{a} + C = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

21. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

22. $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \dfrac{x}{8}(a^2+2x^2)\sqrt{a^2+x^2} - \dfrac{a^4}{8}\ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

23. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2+x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C$

24. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) - \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + C$

25. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = -\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + C$

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x} + C$

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

29. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

30. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{8}x\sqrt{a^2-x^2}\,(a^2-2x^2) + C$

31. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$

32. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C$

33. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C$

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

37. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

38. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n dx = \frac{x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n}{n+1} - \frac{na^2}{n+1}\int\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2}dx,\quad n\neq -1$

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n} = \frac{x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{2-n}}{(2-n)a^2} - \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int\frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2}},\quad n\neq 2$

40. $\displaystyle\int x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n dx = \frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n+2}}{n+2} + C,\quad n\neq -2$

41. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

42. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$

43. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + C$

44. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + C$

45. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right| + C$

46. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C$

47. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

48. $\displaystyle\int \sqrt{2ax - x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

49. $\displaystyle\int \left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^n dx = \frac{(x-a)\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^n}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int \left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^{n-2} dx$

50. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^n} = \frac{(x-a)\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^{2-n}}{(n-2)a^2} + \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^{n-2}}$

51. $\displaystyle\int x\sqrt{2ax - x^2}\,dx = \frac{(x+a)(2x-3a)\sqrt{2ax - x^2}}{6} + \frac{a^3}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

52. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x}\,dx = \sqrt{2ax - x^2} + a\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

53. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^2}\,dx = -2\sqrt{\frac{2a-x}{x}} - \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

54. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = a\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) - \sqrt{2ax - x^2} + C$

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}} + C$

56. $\displaystyle\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

57. $\displaystyle\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$

58. $\displaystyle\int \sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C$

59. $\displaystyle\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C$

60. $\displaystyle\int \sin^n ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\,dx$

61. $\displaystyle\int \cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\,dx$

62. **(a)** $\displaystyle\int \sin ax \cos bx\,dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$

(b) $\displaystyle\int \sin ax \sin bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$

(c) $\displaystyle\int \cos ax \cos bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$

63. $\displaystyle\int \sin ax \cos ax\,dx = -\frac{\cos 2ax}{4a} + C$

64. $\displaystyle\int \sin^n ax \cos ax\,dx = \frac{\sin^{n+1} ax}{(n+1)a} + C, \quad n \neq -1$

65. $\displaystyle\int \frac{\cos ax}{\sin ax}\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax| + C$

66. $\displaystyle\int \cos^n ax \sin ax\,dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n+1)a} + C, \quad n \neq -1$

67. $\displaystyle\int \frac{\sin ax}{\cos ax}\,dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| + C$

68. $\int \sin^n ax \cos^m ax\, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(m+n)} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2} ax \cos^m ax\, dx, \quad n \neq -m$ ($\sin^n ax$ indirgenir)

69. $\int \sin^n ax \cos^m ax\, dx = \frac{\sin^{n+1} ax \cos^{m-1} ax}{a(m+n)} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{n} ax \cos^{m-2} ax\, dx, \quad m \neq -n$ ($\cos^m ax$ indirgenir)

70. $\int \frac{dx}{b + c\sin ax} = \frac{-2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)\right] + C, \quad b^2 > c^2$

71. $\int \frac{dx}{b + c\sin ax} = \frac{-1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln\left|\frac{c + b\sin ax + \sqrt{c^2 - b^2}\cos ax}{b + c\sin ax}\right| + C, \quad b^2 < c^2$

72. $\int \frac{dx}{1 + \sin ax} = -\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + C$

73. $\int \frac{dx}{1 - \sin ax} = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + C$

74. $\int \frac{dx}{b + c\cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \tan\frac{ax}{2}\right] + C, \quad b^2 > c^2$

75. $\int \frac{dx}{b + c\cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln\left|\frac{c + b\cos ax + \sqrt{c^2 - b^2}\sin ax}{b + c\cos ax}\right| + C, \quad b^2 < c^2$

76. $\int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a}\tan\frac{ax}{2} + C$

77. $\int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a}\cot\frac{ax}{2} + C$

78. $\int x \sin ax\, dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{x}{a}\cos ax + C$

79. $\int x \cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax + C$

80. $\int x^n \sin ax\, dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\, dx$

81. $\int x^n \cos ax\, dx = \frac{x^n}{a}\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\, dx$

82. $\int \tan ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax| + C$

83. $\int \cot ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax| + C$

84. $\int \tan^2 ax\, dx = \frac{1}{a}\tan ax - x + C$

85. $\int \cot^2 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cot ax - x + C$

86. $\int \tan^n ax\, dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

87. $\int \cot^n ax\, dx = -\frac{\cot^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \cot^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

88. $\int \sec ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax + \tan ax| + C$

89. $\int \csc ax\, dx = -\frac{1}{a}\ln|\csc ax + \cot ax| + C$

90. $\int \sec^2 ax\, dx = \frac{1}{a}\tan ax + C$

91. $\int \csc^2 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cot ax + C$

92. $\int \sec^n ax\, dx = \frac{\sec^{n-2} ax \tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

93. $\int \csc^n ax\, dx = -\frac{\csc^{n-2} ax \cot ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

94. $\int \sec^n ax \tan ax\, dx = \frac{\sec^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

95. $\int \csc^n ax \cot ax\, dx = -\frac{\csc^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

96. $\int \sin^{-1} ax\,dx = x \sin^{-1} ax + \frac{1}{a}\sqrt{1 - a^2x^2} + C$

97. $\int \cos^{-1} ax\,dx = x \cos^{-1} ax - \frac{1}{a}\sqrt{1 - a^2x^2} + C$

98. $\int \tan^{-1} ax\,dx = x \tan^{-1} ax - \frac{1}{2a}\ln(1 + a^2x^2) + C$

99. $\int x^n \sin^{-1} ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1 - a^2x^2}}, \quad n \neq -1$

100. $\int x^n \cos^{-1} ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos^{-1} ax + \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1 - a^2x^2}}, \quad n \neq -1$

101. $\int x^n \tan^{-1} ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\tan^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\,dx}{1 + a^2x^2}, \quad n \neq -1$

102. $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

103. $\int b^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\frac{b^{ax}}{\ln b} + C, \quad b > 0, b \neq 1$

104. $\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C$

105. $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$

106. $\int x^n b^{ax}\,dx = \frac{x^n b^{ax}}{a \ln b} - \frac{n}{a \ln b}\int x^{n-1}b^{ax}\,dx, \quad b > 0, b \neq 1$

107. $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C$

108. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C$

109. $\int \ln ax\,dx = x \ln ax - x + C$

110. $\int x^n(\ln ax)^m\,dx = \frac{x^{n+1}(\ln ax)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int x^n(\ln ax)^{m-1}\,dx, \quad n \neq -1$

111. $\int x^{-1}(\ln ax)^m\,dx = \frac{(\ln ax)^{m+1}}{m+1} + C, \quad m \neq -1$

112. $\int \frac{dx}{x \ln ax} = \ln|\ln ax| + C$

113. $\int \sinh ax\,dx = \frac{1}{a}\cosh ax + C$

114. $\int \cosh ax\,dx = \frac{1}{a}\sinh ax + C$

115. $\int \sinh^2 ax\,dx = \frac{\sinh 2ax}{4a} - \frac{x}{2} + C$

116. $\int \cosh^2 ax\,dx = \frac{\sinh 2ax}{4a} + \frac{x}{2} + C$

117. $\int \sinh^n ax\,dx = \frac{\sinh^{n-1} ax \cosh ax}{na} - \frac{n-1}{n}\int \sinh^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 0$

118. $\int \cosh^n ax\,dx = \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 0$

119. $\int x \sinh ax\,dx = \frac{x}{a}\cosh ax - \frac{1}{a^2}\sinh ax + C$

120. $\int x \cosh ax\,dx = \frac{x}{a}\sinh ax - \frac{1}{a^2}\cosh ax + C$

121. $\int x^n \sinh ax\,dx = \frac{x^n}{a}\cosh ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cosh ax\,dx$

122. $\int x^n \cosh ax\,dx = \frac{x^n}{a}\sinh ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sinh ax\,dx$

123. $\int \tanh ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\cosh ax) + C$

124. $\int \coth ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sinh ax| + C$

125. $\int \tanh^2 ax\, dx = x - \frac{1}{a}\tanh ax + C$

126. $\int \coth^2 ax\, dx = x - \frac{1}{a}\coth ax + C$

127. $\int \tanh^n ax\, dx = -\frac{\tanh^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \tanh^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

128. $\int \coth^n ax\, dx = -\frac{\coth^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \coth^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

129. $\int \operatorname{sech} ax\, dx = \frac{1}{a}\sin^{-1}(\tanh ax) + C$

130. $\int \operatorname{csch} ax\, dx = \frac{1}{a}\ln\left|\tanh\frac{ax}{2}\right| + C$

131. $\int \operatorname{sech}^2 ax\, dx = \frac{1}{a}\tanh ax + C$

132. $\int \operatorname{csch}^2 ax\, dx = -\frac{1}{a}\coth ax + C$

133. $\int \operatorname{sech}^n ax\, dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} ax \tanh ax}{(n-1)a} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{sech}^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

134. $\int \operatorname{csch}^n ax\, dx = -\frac{\operatorname{csch}^{n-2} ax \coth ax}{(n-1)a} - \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{csch}^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

135. $\int \operatorname{sech}^n ax \tanh ax\, dx = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

136. $\int \operatorname{csch}^n ax \coth ax\, dx = -\frac{\operatorname{csch}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

137. $\int e^{ax}\sinh bx\, dx = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} - \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C, \quad a^2 \neq b^2$

138. $\int e^{ax}\cosh bx\, dx = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} + \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C, \quad a^2 \neq b^2$

139. $\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}\, dx = \Gamma(n) = (n-1)!, \quad n > 0$

140. $\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0$

141. $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \begin{cases} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n}\cdot\frac{\pi}{2}, & (n \geq 2 \text{ bir çift tamsayı ise} \\ \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n}, & (n \geq 3 \text{ bir tek tamsayı ise} \end{cases}$

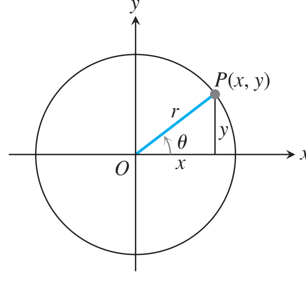
Trigonometri Formülleri

1. Tanımlar ve Temel Özdeşlikler

Sine: $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{1}{\csc\theta}$

Cosine: $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{\sec\theta}$

Tangent: $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{\cot\theta}$



2. Özdeşlik

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta, \quad \csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B},$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

$$\sin\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos A, \qquad \cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \sin A$$

$$\sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \cos A, \qquad \cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin A$$

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}\cos(A - B) - \frac{1}{2}\cos(A + B)$$

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\cos(A - B) + \frac{1}{2}\cos(A + B)$$

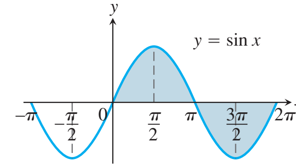
$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\sin(A - B) + \frac{1}{2}\sin(A + B)$$

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$$

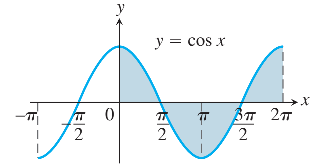
$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\sin\frac{1}{2}(A - B)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A + B)\sin\frac{1}{2}(A - B)$$



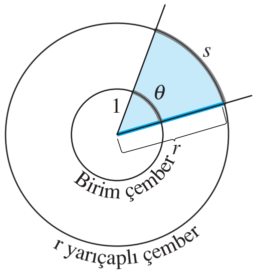
Tanım Kümesi: (–∞, ∞)
Değer Kümesi: [–1, 1]



Tanım Kümesi: (–∞, ∞)
Değer Kümesi: [–1, 1]

Trigonometrik Fonksiyonlar

Radyan Ölçü

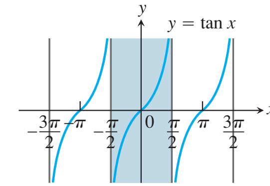


$$\frac{s}{r} = \frac{\theta}{1} = \theta \quad \text{veya} \quad \theta = \frac{s}{r},$$

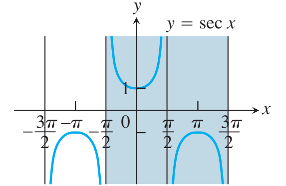
$180° = \pi$ radyan

Derece	Radyan
$\sqrt{2}$, 45, 1, 45, 90, 1	$\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4}$, 1, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, 1
2, 30, $\sqrt{3}$, 60, 90, 1	2, $\frac{\pi}{6}$, $\sqrt{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, 1

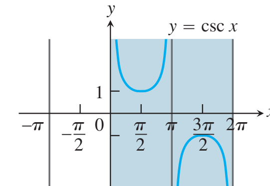
Eş iki üçgenin derece ve radyan cinsinden açıları



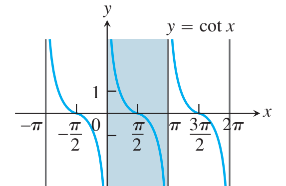
Tanım Kümesi: $\pi/2$'nin tek tamsayı katı dışındaki bütün reel sayılar
Değer Kümesi: (–∞, ∞)



Tanım Kümesi: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Değer Kümesi: (–∞, –1] ⋃ [1, ∞)



Tanım Kümesi: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Değer Kümesi: (–∞, –1] ⋃ [1, ∞)



Tanım Kümesi: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Değer Kümesi: (–∞, ∞)

SERİLER

Taylor Serileri

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \tanh^{-1} x = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| < 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| \leq 1$$

Binom Seriler

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^k}{k!} + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, \qquad |x| < 1,$$

olduğundan

$$k \geq 3 \text{ için } \binom{m}{1} = m, \qquad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!}, \qquad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$$

LİMİTLER

Genel Kurallar

L, M, c ve *k* reel sayılar ve

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x \to c} g(x) = M$$

ise aşağıdakiler geçerlidir.

Toplam Kuralı: $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$

Fark Kuralı: $\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = L - M$

Çarpım Kuralı: $\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

Sabitle Çarpım Kuralı: $\lim_{x \to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

Bölüm Kuralı: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$

Sandöviç Teoremi

c'yi içeren bir açık aralıkta $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, $x = c$ hariç olabilir, ise ve

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

ise $\lim_{x \to c} f(x) = L$'dir.

Eşitsizlikler

c'yi içeren bir açık aralıkta $f(x) \leq f(x)$, $x = c$ hariç olabilir, ise ve her iki limit mevcut ise

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x)$$

dir.

Süreklilik

g fonksiyonu L'de sürekli ise ve $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ise

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(L)$$

dir.

Özel Formüller

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, ise

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_0$$

dır.

$P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom ve $Q(c) \neq 0$ ise

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

dir.

$f(x)$ fonksiyonu $x = c$'de sürekli ise

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

dir.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

L'Hôpital Kuralı

a noktasını içeren bir I açık aralığında $f(a) = g(a) = 0$ ise ve hem f' ve hem g' mevcut ise, ayrıca I üzerinde iken $g'(x) \neq 0$ ise sağ taraftaki limitin var olması koşuluyla

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dir.

İNTEGRAL KURALLARI

Genel Formüller

Sıfır: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

İntegrasyon Sırası: $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Sabitle Çarpım Kuralı: $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ (k herhangi bir sayı)

$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ $(k = -1)$

Toplamlar ve Farklar: $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

Toplanabilirlik: $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

Max-Min Eşitsizliği: f fonksiyonunun ‘a, b] aralığı üzerindeki maksimum ve minimum değerler max f ve min f ise

$$\min f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \max f \cdot (b - a)$$ ’dir.

Baskınlık: $[a, b]$ üzerinde $f(x) \geq g(x)$ ise $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$’dir.

$[a, b]$ üzerinde $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$’dır.

Analizin Temel Teoremi

Kısım 1 f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ise, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde süreklidir, (a, b)’de türevlenebilirdir ve türevi $f(x)$’dir;

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Kısım 2 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığının her noktasında sürekli ve F’de f’nin $[a, b]$ aralığındaki herhangi bir ters türevi ise

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

olur.

Belirli İntegrallerde Değişken Dönüşümü

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Kısmi İntegrasyon

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$